JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. C. Jordan intitulé: Recherches sur les polyèdres

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 217-220.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__217_0>

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. C. Jordan intitulé : Recherches sur les polyèdres ;

Par M. BERTRAND.

(Commissaires : MM. Chasles, Serret, Bertrand. — *Comptes rendus*, t. LXII, p. 1268.)

Le Mémoire de M. Jordan est relatif à une question intéressante et nouvelle qu'il a eu à la fois le mérite de poser le premier et de résoudre d'une façon très-heureuse.

Si l'on cherche, sans le secours d'un modèle en relief, à faire la description d'un polyèdre en mentionnant la forme et l'ordre de succession de ses diverses faces, arêtes ou sommets, il arrivera en général que chacun de ces éléments jouera un rôle distinct et spécial, sans pouvoir être confondu avec aucun autre, et cela indépendamment de toute mesure numérique et en raison seulement de l'ordre dans lequel se succèdent les faces, arêtes et sommets enchaînés autour de lui. Il y a cependant de nombreuses exceptions, et il peut arriver de bien des manières que la description verbale d'un polyèdre reste la même quand on change le premier sommet autour duquel tous les autres sont considérés comme groupés. C'est l'étude de ce nouveau genre de symétrie que M. Jordan s'est proposée dans le Mémoire dont nous avons à rendre compte à l'Académie, et qu'il a su faire avec beaucoup de bonheur et d'habileté. Il convient, avant tout, de préciser, comme l'auteur le fait au début de son Mémoire, le mode de description dont il est ici question.

Soit M, dit-il, un sommet de polyèdre, MN une de ses arêtes. Un observateur placé en M, sur la surface extérieure du polyèdre, et regardant dans la direction MN, verra les arêtes, faces et sommets divers s'enchaîner les uns aux autres suivant un certain ordre que j'appellerai, pour abréger, *l'aspect* du polyèdre relativement à l'arête MN et au sommet M.

Cette définition un peu vague, ajoute M. Jordan, peut être précisée de la manière suivante. Supposons l'observateur situé sur l'arête MN en un point très-voisin de M extérieurement au polyèdre; supposons qu'il se mette à tourner dans le sens direct autour du point M, en restant toujours sur la surface extérieure du polyèdre. Il traversera successivement une série de faces μ, ν, π, etc., auxquelles il donnera la série des numéros successifs 1, 2, 3, etc. Il numérotera de même les arêtes MN, MP,.... dans l'ordre où il les rencontre; quant aux sommets, l'origine M portera le n° 1, et les extrémités des arêtes MN, MP,... recevront successivement les n^{os} 2, 3, etc.

Cela fait, l'observateur se transportera sur l'arête MN dans les environs du point N, et se mettra à décrire sur la surface extérieure du polyèdre un petit contour autour de N; les faces qu'il traverse et qui ne sont pas encore numérotées recevront des numéros à la suite des précédents. De même pour les arêtes nouvelles, dans l'ordre où on les traverse. A mesure qu'on numérote une arête nouvelle, on numérote également son extrémité.

On se transportera ensuite au point P, où l'on opérera de même, et l'on continuera en se transportant successivement aux divers sommets dans l'ordre où ils sont inscrits, sur celle des arêtes déjà numérotées et passant par le sommet dont le numéro d'ordre est le moindre. A mesure qu'on traverse une face ou une arête nouvelle, on la numérote à la suite; on numérote aussi les sommets qui sont à l'extrémité de ces arêtes nouvelles lorsqu'ils n'ont pas été déjà enregistrés.

En opérant de la sorte, on évite toute ambiguïté, et l'aspect du polyèdre pourra être ainsi défini : la relation entre le numéro d'ordre de chaque arête, ceux de ses deux extrémités et ceux des deux faces qu'elle borde, telle qu'elle est donnée par le tableau comparatif que l'on peut dresser aisément.

Soit A le nombre des arêtes du polyèdre, l'observateur peut se placer sur l'une quelconque d'entre elles, en une de ses deux extrémités choisie à volonté. Le polyèdre peut donc être envisagé sous 2 A aspects en général différents, mais plusieurs peuvent être semblables entre eux, et la classification des diverses manières possibles est le but du travail de M. Jordan.

Les définitions suivantes sont nécessaires pour l'intelligence de l'énoncé des résultats obtenus.

Les faces et sommets du polyèdre sont réunis sous le nom générique d'*éléments* par opposition aux arêtes.

Deux polyèdres sont dits *pareils* si, en choisissant convenablement dans chacun d'eux un premier sommet et une première arête, on peut faire en sorte qu'ils présentent un aspect semblable ; si plusieurs aspects d'un même polyèdre sont semblables entre eux, les éléments ou arêtes qui portent les mêmes numéros sous les divers aspects sont dits pareils.

Un élément ou arête sera dit n fois répété si le nombre des éléments ou arêtes pareils est égal à n.

Si les deux aspects relatifs à une même arête sont semblables, le polyèdre sera dit *symétrique par retournement* autour de cette arête. Si un élément présente le même numéro par rapport à k aspects semblables entre eux, on dira qu'il y a symétrie par rotation d'ordre k autour de cet élément.

Ces définitions établies, les principaux résultats obtenus par M. Jordan se résument dans les propositions suivantes :

Les diverses sortes de symétrie que peut présenter un polyèdre P sont au nombre de cinq.

1° *Symétrie par rotation.* — Solides présentant deux éléments singuliers, dont chacun est unique de son espèce et doué d'une symétrie de rotation d'ordre k; les autres éléments ou arêtes sont tous k fois répétés.

L'entier k peut être quelconque. S'il se réduit à deux, l'un des éléments singuliers ou tous les deux peuvent être remplacés par des arêtes à retournement.

2° *Symétrie par rotation et renversement.* — Solides présentant : 1° un système de deux éléments pareils E et E', seuls de leur espèce et doués d'une symétrie de rotation d'ordre k; 2° deux autres systèmes d'éléments ou d'arêtes remarquables composés chacun, soit de k éléments pareils doués de symétrie de rotation binaire, soit de k arêtes pareilles, douées de la symétrie de retournement dont les autres éléments ou arêtes sont $2k$ fois répétés.

L'entier k peut être quelconque. S'il se réduit à deux, les éléments E et E' peuvent être remplacés par des arêtes à retournement.

Les trois autres classes dérivent des polyèdres réguliers par le procédé suivant :

Prenons un polyèdre *pareil* à l'un des polyèdres réguliers : remplaçons les arêtes par des lignes polygonales, ou plus généralement par des fuseaux à facettes polyédriques pareils entre eux et présentant une symétrie de rotation binaire autour d'un de leurs éléments, ou une symétrie de retournement autour d'une de leurs arêtes; remplaçons de même les faces par des calottes polyédriques pareilles entre elles et présentant autour d'un de leurs éléments une symétrie par rotation dont l'ordre soit égal au nombre des côtés de la face (ces calottes peuvent se réduire à de simples points) ; nous aurons reconstitué ainsi ou les polyèdres cherchés ou leurs polaires.

Cette construction donne trois types différents, dont le premier se rattache au tétraèdre, le second au cube ou à l'octaèdre, le troisième enfin au dodécaèdre ou à l'icosaèdre, la substitution de l'un de ces solides à l'autre revenant à substituer des sommets aux faces, et réciproquement.

M. Jordan prouve enfin que ce mode de symétrie relatif au nombre et à l'ordre est corrélatif d'une symétrie parfaite et toujours possible, et qu'étant donné un polyèdre P pareil à lui-même sous plusieurs aspects, on pourra toujours trouver une infinité de polyèdres à faces planes ou gauches, pareils à P et exactement superposables à eux-mêmes sous les mêmes aspects.

Les polyèdres superposables à eux-mêmes, auxquels ceux que considère M. Jordan se trouvent ainsi rattachés par lui, ont été considérés déjà par Bravais sous le nom de *polyèdres sphéroédriques*, dans ses très-belles et très-importantes *Recherches sur la théorie des polyèdres*. Ce rapprochement, loin de rien enlever à l'intérêt de la théorie nouvelle, doit être considéré plutôt comme lui donnant un nouveau prix. Le Mémoire de M. Jordan, très-intéressant par ses résultats, montre chez son auteur, en même temps qu'une grande perspicacité, une rare habileté dans l'emploi des considérations géométriques les plus délicates, et l'Académie ne saurait trop encourager l'auteur à persévérer dans cette voie où il a su, dans une question tout élémentaire et placée en quelque sorte au seuil de la science, déployer un véritable talent de géomètre.

Le Mémoire de M. Jordan nous semble très-digne d'être approuvé par l'Académie et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.