JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. PLÜCKER

Sur une nouvelle Géométrie de l'espace

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 337-404.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__337_0>

SUR UNE

NOUVELLE GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE;

Par M. J. PLÜCKER,

Professeur à l'Université de Bonn, Membre associé de la Société Royale de Londres [*].

I. — *Des complexes linéaires de lignes droites.*

1. L'espace indéfini peut, au point de vue géométrique, être considéré indistinctement comme étant formé par des points, ou comme étant traversé par des plans. Dans le premier cas, chaque point est déterminé par ses coordonnées (x, y, z, par exemple) prises dans leur acception ordinaire. Dans le second mode de conception, chaque plan est de même déterminé par ses coordonnées (t, u, v, par exemple), dont nous avons introduit l'usage dans la Géométrie analytique vers l'année 1830.

L'équation

$$tx + uy + vz + 1 = 0,$$

si l'on y regarde x, y, z comme des variables, et t, u, v comme des quantités constantes, représente l'ensemble des points situés dans un même plan, c'est-à-dire représente ce plan lui-même. Les trois constantes t, u, v sont les coordonnées du plan.

La même équation, si l'on y regarde t, u, v comme des variables, et x, y, z comme des constantes, représente l'ensemble des plans qui passent par un même point, et par conséquent représente ce point lui-même; les trois constantes sont les coordonnées du point.

Un point donné par ses coordonnées et un point déterminé par son équation, ou, pour parler géométriquement, par un nombre infini de

[*] Le Mémoire original, écrit en anglais, a été présenté à la Société Royale de Londres le 22 décembre 1864, et lu dans la séance du 2 février 1865.

plans qui se coupent en ce point, sont deux idées entièrement différentes et qu'on ne doit pas confondre l'une avec l'autre. Il en est de même d'un plan donné par ses coordonnées et d'un plan représenté par son équation, c'est-à-dire considéré comme contenant un nombre infini de points.

De là découle une double signification de la ligne droite. On peut la considérer comme étant le lieu géométrique d'une infinité de points, ou, ce qui revient au même, comme étant décrite par un point qui se meut dans sa direction; et, dans ce cas, on la représente par deux équations en x, y, z, dont chacune représente un plan passant par cette droite.

Mais on peut également regarder la ligne droite comme étant l'intersection commune d'une infinité de plans, ou comme étant l'enveloppe d'un plan mobile qui tourne sur elle comme autour d'un axe; et, dans ce cas, elle est représentée par deux équations en t, u, v, dont chacune représente un de ses points, choisi d'ailleurs arbitrairement.

2. La constitution géométrique de l'espace, que nous venons de rapporter au point ou au plan, peut également être dérivée de la ligne droite; et, comme celle-ci est susceptible d'une double définition (**1**), il s'ensuit que, dans ce nouvel ordre d'idées, la constitution de l'espace peut être envisagée à un double point de vue.

Dans le premier de ces deux points de vue, l'espace indéfini est regardé comme étant traversé par des lignes droites dont chacune se compose d'une infinité de points consécutifs, c'est-à-dire est décrite par le mouvement d'un de ses points. Par chaque point de l'espace, il passe un nombre infini de lignes droites qui ont toutes les directions possibles. Cette constitution géométrique de l'espace est celle qu'on admet implicitement, en optique, quand on considère les sources lumineuses comme envoyant des rayons de lumière dans toutes les directions, et, en mécanique, quand on regarde les forces comme agissant en tous sens sur les points matériels dont on suppose que les corps sont formés.

D'après l'autre point de vue, l'espace indéfini est encore regardé comme traversé par des lignes droites; seulement ces lignes sont déterminées, non plus par les points qui les composent, mais par les plans qui y passent. Chaque plan contient un nombre infini de lignes droites qui y possèdent toutes les positions et toutes les directions imaginables, et le plan peut tourner autour de chacune d'elles. On adopte implicitement cette deuxième conception, en optique, quand, au lieu de rayons de lumière, on considère les surfaces correspondantes des ondes et leurs intersections mutuelles, et, en mécanique, quand on introduit avec Poinsot la notion ingénieuse et philosophique des *couples*, qui s'y présentent au même titre que les forces ordinaires et y remplissent un rôle non moins essentiel. Les axes instantanés de rotation sont des droites qui appartiennent à ce deuxième mode de conception.

3. Afin de poser les fondements d'une nouvelle Géométrie de l'espace, basée sur les considérations qui précèdent, il faut avant tout fixer dans l'espace la position d'une ligne droite qui dépend de quatre constantes. A cet effet, nous eussions pu prendre quatre droites fixes et y rapporter la position d'une droite quelconque, en déterminant, par exemple, les plus courtes distances de la droite à ces quatre axes. Mais nous avons cru devoir rejeter ce système et d'autres analogues, et adopter simplement, pour la détermination dont il s'agit, celui des axes coordonnés dont on fait ordinairement usage. Ainsi les recherches que nous publions aujourd'hui sont intimement liées avec les méthodes usuelles de la Géométrie analytique; mais ces méthodes y sont mises en œuvre d'une manière nouvelle, dont le présent Mémoire a pour but de donner une idée précise, et dont l'importance est, si nous ne nous abusons, plus grande peut-être qu'on ne croirait au premier abord. D'autres Mémoires pourront venir corroborer cette opinion, s'il nous est donné de les terminer.

4. Nous donnerons le nom de *rayon* à la ligne droite, quand on la considère d'après le premier mode de génération, et le nom d'*axe* quand on la considère d'après le deuxième mode.

Cela posé, un *rayon* peut être déterminé par le moyen de ses projections sur deux plans fixes. Afin d'obtenir le plus de symétrie possible, sans trop généraliser, nous choisirons les projections sur les plans coordonnés XZ, YZ, et nous prendrons pour leurs équations, soit le système

$$(1)\qquad \begin{cases} x = rz + \rho, \\ y = sz + \sigma, \end{cases}$$

soit le système

$$(2)\qquad \begin{cases} tx + v_x z = 1, \\ uy + v_y z = 1. \end{cases}$$

Si l'on adopte le premier système de ces équations, les quatre constantes r, s, ρ, σ sont les *coordonnées du rayon* : deux d'entre elles, r, s, marquent sa direction; les deux autres, ρ, σ, fixent ensuite sa position dans l'espace. Le point où le rayon perce le plan XY a pour coordonnées $x = \rho$, $y = \sigma$.

Si l'on adopte le second système d'équations, le même rayon est déterminé par les quatre constantes t, u, v_x, v_y, qu'on peut aussi regarder comme étant ses coordonnées; t et u $\left(\text{égales respectivement à } \frac{1}{\rho} \text{ et } \frac{1}{\sigma}\right)$ indiquent les valeurs réciproques des segments interceptés sur les axes OX, OY, à partir de l'origine O, par les deux projections du rayon; v_x, et v_y $\left(\text{égales respectivement à } -\frac{r}{\rho} \text{ et } -\frac{s}{\sigma}\right)$ indiquent les valeurs réciproques des segments qu'on obtient sur l'axe OZ, quand on y projette ces deux projections.

5. Un *axe*, c'est-à-dire une ligne droite envisagée d'après le deuxième mode de génération, est déterminé par deux quelconques de ses points. On peut choisir, pour ces points, ceux où l'axe perce les deux plans XZ et YZ, et les représenter soit par le système d'équations

$$(3)\qquad \begin{cases} xt + z_t v = 1, \\ yu + z_u v = 1, \end{cases}$$

soit par cet autre système, qui est également symétrique,

$$(4)\qquad \begin{cases} t = pv + \varpi, \\ u = qv + \varkappa. \end{cases}$$

En faisant usage du système (3), on a, pour les *coordonnées de l'axe*, les quatre constantes x, y, z_t, z_u qui fixent la position des deux points dans les plans XZ, YZ.

Si l'on adopte les deux équations (4), les constantes p, q, π, $\varkappa$ sont les quatre coordonnées de l'axe, qui est déterminé par l'intersection de deux plans, savoir : celui qui le projette sur le plan XY, et celui qui passe par l'axe et par l'origine O. Le premier de ces deux plans est déterminé par deux des quatre coordonnées

$$t = \varpi = \frac{1}{x}, \quad u = \varkappa = \frac{1}{y};$$

l'autre est déterminé par les deux coordonnées restantes

$$t = pv = -\frac{z_t}{x} v, \quad u = qv = -\frac{z_u}{x} v,$$

et a pour équation

$$px + qy + z = 0.$$

6. Si l'on regarde comme variables les quatre coordonnées d'un rayon, on peut, en leur donnant successivement toutes les valeurs possibles, obtenir la représentation analytique d'un rayon situé d'une manière quelconque dans l'espace. Actuellement, si l'on suppose que ces quatre coordonnées soient liées entre elles par une équation de condition, tous les rayons de l'espace ne satisfont plus à la question, et il y en a qui sont exclus par cette condition. Quant à l'ensemble de ceux qui restent, nous dirons qu'*ils forment un* COMPLEXE [*] *représenté par l'équation de condition.*

S'il existe, entre les coordonnées générales d'un rayon, deux équations de condition au lieu d'une, les rayons dont les coordonnées satisfont à ces deux équations simultanées forment ce que nous appelle-

---

[*] Le mot latin *complexus*, qui signifie un *entrelacement*, un *entre-croisement*, nous a semblé très-convenable pour exprimer l'idée nouvelle que nous présentons ici. Faute d'en trouver un meilleur, nous demandons la permission de l'introduire dans le langage mathématique.

rons une *congruence représentée par le système des deux équations*. Une *congruence* contenant tous les rayons communs à deux *complexes* peut être regardée comme étant l'intersection mutuelle de ces deux systèmes.

Si les équations de condition entre les quatre coordonnées sont au nombre de trois, les rayons correspondants sont situés sur une *surface réglée représentée par le système des trois équations*. Une surface réglée peut être regardée comme l'intersection mutuelle de trois complexes, c'est-à-dire comme le lieu géométrique des rayons communs aux trois complexes.

Quatre complexes ou deux surfaces réglées se coupent mutuellement suivant un nombre limité de rayons.

Les nombres des rayons dont l'ensemble forme une surface réglée, une congruence, un complexe et l'espace, sont des infinis du premier, du second, du troisième et du quatrième ordre respectivement.

7. Si l'on regarde les droites comme étant des *axes*, au lieu de les considérer comme des *rayons*, les complexes et les congruences de rayons deviennent des *complexes* et des *congruences d'axes*.

8. Une surface réglée composée de rayons ou d'axes, et représentée par trois équations linéaires, est un hyperboloïde ou un paraboloïde, selon les coordonnées dont on fait choix.

Supposons que la surface soit formée par des rayons, et que les trois équations données soient les suivantes :

$$\text{(5)} \qquad \left\{ \begin{aligned} Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho &= 0, \\ A'r + B's + C' + D'\sigma + E'\rho &= 0, \\ A''r + B''s + C'' + D''\sigma + E''\rho &= 0. \end{aligned} \right.$$

De ces équations on peut en déduire, par l'élimination, six autres, dont chacune ne contienne que deux des quatre variables. Soient

$$\text{(6)} \qquad ar + bs = 1,$$

$$\text{(7)} \qquad c\rho + d\sigma = 1,$$

$$(8)\qquad a'r + c'\rho = 1,$$

$$(9)\qquad b's + d'\sigma = 1,$$

$$(10)\qquad a''r + d''\sigma = 1,$$

$$(11)\qquad b''s + c''\rho = 1,$$

les six équations ainsi obtenues. Trois quelconques d'entre elles peuvent servir, au lieu des équations (5), pour représenter la surface réglée.

L'équation (7) peut s'écrire

$$(7')\qquad cx + dy = 1,$$

en y remplaçant ρ et σ par x et y (5). Elle représente une ligne droite située dans le plan XY, et rencontrée par tous les rayons de la surface réglée.

Les équations (8) et (9) représentent deux points situés dans les plans XZ, YZ, et par lesquels passent les projections respectives de tous les rayons de la surface; en conséquence, les rayons eux-mêmes rencontrent deux droites passant par ces points et parallèles respectivement aux axes OY et OX.

Si l'on écrit les équations (8) et (9) de la manière suivante :

$$\frac{1}{c'} = \frac{a'}{c'} r + \rho,$$

$$\frac{1}{d'} = \frac{b'}{d'} s + \sigma,$$

on en tire immédiatement (4)

$$c'x = 1, \quad c'z = a',$$

$$d'y = 1, \quad d'z = b',$$

qui représentent ces deux lignes droites.

Ainsi, en choisissant les trois équations (7), (8), (9) pour représenter la surface réglée, et en cherchant leur interprétation géométrique, on prouve aisément que tous les rayons dont elle se compose coupent trois droites fixes, dont l'une est située dans le plan XY, tandis que les deux autres sont parallèles à OY et à OX. Donc tous ces rayons, qui rencontrent trois droites parallèles à un même plan, forment un paraboloïde hyperbolique.

Pour déterminer ce paraboloïde, nous pouvons remplacer l'une des trois équations dont nous venons de faire usage par l'équation (6), qui indique que tous les rayons sont parallèles à un même plan fixe, dont l'équation (si on le mène par l'origine O)

$$ax + by = z$$

se déduit de (6) en écrivant $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, au lieu de r et s.

Nous nous bornerons à ajouter qu'une surface réglée composée de rayons, représentée par trois équations linéaires, devient un hyperboloïde, si ces équations ont lieu entre les coordonnées t, u, v_x, v_y, au lieu des coordonnées r, s, ρ, σ.

9. Une surface réglée composée d'*axes*, et représentée par trois équations linéaires, serait un paraboloïde si ces équations linéaires avaient lieu entre les coordonnées x, y, z_t, z_u; mais elle devient un hyperboloïde, si l'on prend pour coordonnées les variables $p, q, \varpi, \varkappa$. Nous nous bornerons à considérer ce dernier cas, et pour cela nous remplacerons directement les équations (6)-(11) par les suivantes :

$$ap + bq = 1, \tag{12}$$

$$c\varpi + d\varkappa = 1, \tag{13}$$

$$a'p + c'\varpi = 1, \tag{14}$$

$$b'q + d'\varkappa = 1, \tag{15}$$

$$a''p + d''\varkappa = 1, \tag{16}$$

$$b''q + c''\varpi = 1. \tag{17}$$

Trois quelconques de ces équations, renfermant six constantes, suffisent pour déterminer la surface réglée.

Si, après avoir remplacé p, q, ϖ, $\varkappa$ par

$$-\frac{z_t}{x},\quad -\frac{z_u}{y},\quad \frac{1}{x},\quad \frac{1}{y},$$

nous regardons x, y, z_t, z_u comme variables, les équations (14) et (15) peuvent s'écrire ainsi qu'il suit :

$$x + a'z = c',$$
$$y + b'z = d',$$

et représentent, dans les plans XZ, YZ, deux lignes droites (AA′, BB′), lieux des points de rencontre des deux plans par les axes générateurs de la surface réglée.

En regardant ϖ et $\varkappa$ comme les coordonnées d'une ligne droite, l'équation (13) écrite ainsi

$$ct + du = 1$$

représente un point fixe (E), dont les coordonnées ordinaires sont

$$x = c, \quad y = d,$$

et qui est enveloppé par les projections des axes sur le plan XY dans lequel il est lui-même situé. Donc toutes les génératrices de la surface réglée s'appuient sur une troisième droite cc' parallèle à OZ et coupant le plan XY au point E.

Nous concluons de là que la surface représentée par les trois équations linéaires est un hyperboloïde.

Le plan BOA, qui passe par l'origine O et par un axe quelconque AB, a pour équation

$$z + qy + px = 0.$$

L'équation (12), étant du premier degré par rapport à p et q, indique que tous les plans tels que BOA, dont chacun contient un des axes générateurs de la surface, se coupent mutuellement suivant une droite DD′ qui passe par le point O. Donc tous ces axes rencontrent une même quatrième droite, située elle-même sur l'hyperboloïde.

La détermination complète de l'hyperboloïde ne présente pas de difficulté. On peut trouver, par exemple, son centre et ses axes principaux en déterminant la plus courte distance de deux de ses génératrices.

10. Soit une congruence de rayons ou d'axes représentée par deux équations linéaires. Si à ces équations on en ajoute deux autres qui soient pareillement du premier degré, il n'existe qu'un seul rayon ou qu'un seul axe dont les coordonnées satisfassent simultanément aux quatre équations. Ces deux équations supplémentaires peuvent être choisies de telle sorte que les rayons et les axes soient assujettis à passer par un point donné ou à se trouver dans un plan donné.

S'il s'agit de rayons, soit (x', y', z') un point fixe; les deux équations

$$x' = rz' + \rho,$$
$$y' = sz' + \sigma$$

expriment que tous les rayons passent par ce point. Soit

$$t'x + u'y + v'z + 1 = 0$$

l'équation d'un plan donné; les deux équations

$$t'r + u's + v = 0,$$
$$t'\rho + u'\sigma + 1 = 0$$

expriment que les rayons sont situés dans ce plan.

S'il s'agit d'axes, soit (t', u', v') un plan fixe; nous aurons les équations linéaires

$$t'x + v'z_t = 1, \quad t' = pv' + \varpi,$$
$$u'x + v'z_u = 1, \quad u' = qv' + \varkappa,$$

pour exprimer qu'un axe est situé dans ce plan. Soit, en regardant x', y', z' comme des constantes et t, u, v comme des variables,

$$x't + y'u + z'v + 1 = 0$$

l'équation d'un point fixe, les équations

$$x'p + y'q + z' = 0,$$
$$x'\varpi + y'\varkappa + 1 = 0$$

exprinent que les axes passent par ce point. Donc, *quand une congruence est représentée par un système de deux équations linéaires, elle ne contient qu'un seul rayon ou qu'un seul axe qui passe par un point donné, ou qui soit situé dans un plan donné.*

11. Nous ferons usage des coordonnées t, u, v_x, v_y pour représenter une congruence de rayons. Soient

$$\begin{gathered} \mathrm{A}t + \mathrm{B}u + \mathrm{C}v_x + \mathrm{D}v_y + 1 = 0, \\ \mathrm{A}'t + \mathrm{B}'u + \mathrm{C}'v_x + \mathrm{D}'v_y + 1 = 0 \end{gathered}$$

ses deux équations. En éliminant successivement chacune des coordonnées, nous tirerons de ces deux équations quatre équations nouvelles de la forme

$$\begin{gathered} at + bu + cv_x + 1 = 0, \\ a't + b'u + dv_y + 1 = 0, \\ a''t + c'v_x + d'v_y + 1 = 0, \\ b''u + c''v_x + d''v_y + 1 = 0, \end{gathered}$$

dont on peut prendre deux quelconques, renfermant six constantes, pour remplacer les équations primitives, les deux autres étant une conséquence de celles-là.

Les deux premières de ces équations, si l'on y considère t, u, v_x et t, u, v_y comme des *coordonnées planaires*, représentent deux points (U, V) dont les coordonnées sont

$$(\mathrm{U}) \qquad x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$
$$(\mathrm{V}) \qquad x = a', \quad y = b', \quad z = c'.$$

Conséquemment les six constantes desquelles dépend la congruence, si on la rapporte à trois axes coordonnés OX, OY, OZ, sont déterminées par les deux points U et V, et de là découle la construction suivante des rayons de la congruence.

Par les deux points U et V respectivement, menez deux plans quelconques qui se coupent suivant une droite située dans le plan XY, et qui rencontre les axes OX, OY aux points D, F. Soient E, G les points de rencontre de l'axe OZ par ces plans. Les droites DE, FG seront les projections d'un rayon de la congruence sur les plans XZ, YZ. Le rayon (AC) ainsi déterminé coupera le plan XY au point C, dont les coordonnées sont

$$x = \frac{1}{t} = \mathrm{OD}, \quad y = \frac{1}{u} = \mathrm{OF}.$$

Si l'on mène un plan quelconque par les deux points U et V, les deux points E, G se confondent en un seul A', et le rayon correspondant (A'C') coupe l'axe OZ.

Si l'on projette la droite UV sur les plans YZ, XZ, ses projections rencontrent OZ en deux points A'', A'''. C'est en ces points que l'axe OZ est coupé par les rayons de la congruence qui sont parallèles à OX et à OY. Le rayon parallèle à l'axe OZ coupe le plan XY en un point C'', dont les coordonnées sont

$$x = \mathrm{OD}'', \quad y = \mathrm{OF}'',$$

D'' et F'' étant les points de rencontre de OX et OY par la projection de UV sur le plan XY.

Et de là on peut conclure la construction des rayons qui passent par un point quelconque de l'axe OZ ou du plan XY. Mais nous n'insisterons pas sur ce sujet.

12. En second lieu, supposons qu'une congruence d'*axes* soit représentée par les équations

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z_t + \mathrm{D}z_u + 1 &= 0, \\ \mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}'z_t + \mathrm{D}'z_u + 1 &= 0. \end{aligned}$$

En éliminant successivement z_u et z_t, nous pouvons remplacer successivement ces équations par les deux suivantes :

$$\begin{aligned} ax + by + cz_t + 1 &= 0, \\ a'x + b'y + c'z_u + 1 &= 0, \end{aligned}$$

dont les six constantes sont une conséquence de celles qui étaient données primitivement. En regardant x, y, z_t, z_u comme des *coordonnées ponctuelles,* et écrivant z au lieu de z_t et z_u, ces dernières équations représentent deux plans. Les six coordonnées de ces deux plans, savoir :

$$t = a, \quad u = b, \quad v = c,$$
$$t = a', \quad u = b', \quad v = c',$$

sont les six constantes de la congruence. La congruence est donc déterminée par ces deux plans et par les axes coordonnés.

Supposons que ces deux plans soient connus, et soit menée parallèlement à OZ une droite quelconque qui rencontre le premier en M et le second en M′; enfin projetons le point M en A sur XZ et le point M′ en B sur YZ. La droite AB est un axe de la congruence.

Si l'on projette sur XZ et sur YZ un point quelconque de la droite JK, intersection des deux plans, la droite B′A′ qui joint ces deux projections est un axe parallèle au plan XY. Tous les axes obtenus ainsi rencontrent les deux projections de JK sur les plans XZ et YZ. Donc les axes de la congruence, parallèles au plan XY, forment un paraboloïde. Le rayon situé dans le plan XY s'obtient en projetant sur les axes OX et OY le point de rencontre des traces des deux plans sur le plan XY, et en joignant ces deux projections B″, A″ par une ligne droite, etc.

13. Après ces discussions préliminaires, nous allons suivre une marche plus systématique, et nous ne ferons usage que des coordonnées r, s, ρ, σ.

Quand un complexe de rayons est représenté par l'équation linéaire

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{A}r + \mathrm{B}s + \mathrm{D}\sigma + \mathrm{E}\rho + 1 = 0,$$

il est aisé de prouver que les rayons, en nombre infini, qui passent par un même point de l'espace, sont situés dans un même plan, et que, réciproquement, tous les rayons situés dans le même plan concourent en un même point de ce plan.

Pour distinguer ceux des rayons du complexe qui passent par le point donné (x', y', z'), il faut joindre les deux équations suivantes à celle du complexe

$$(2)\qquad \begin{cases} x' = rz' + \rho, \\ y' = sz' + \sigma. \end{cases}$$

Éliminant ρ et σ, il vient

$$(3)\qquad (A - Ez')r + (B - Dz')s + (1 + Ex' + Dy') = 0.$$

Cette équation étant du premier degré par rapport aux variables restantes r et s, prouve que les rayons correspondants sont parallèles à un plan fixe, et conséquemment sont situés dans un même plan mené suivant cette direction par le point (x', y', z'). Remplaçant, dans cette dernière équation, r et s par leurs valeurs $\frac{x-x'}{z-z'}$, $\frac{y-y'}{z-z'}$, on obtient, pour l'équation du plan dont il s'agit,

$$(4)\quad (A - Ez')(x - x') + (B - Dz')(y - y') + (1 + Ex' + Dy')(z - z') = 0.$$

14. Cette équation, qui est du premier degré par rapport à (x', y', z'), prouve que, réciproquement, tous les rayons contenus dans un plan donné concourent en un même point de ce plan.

15. Un complexe dont les rayons sont distribués dans l'espace de telle sorte que, par chaque point, il en passe une infinité contenus dans un même plan et que, réciproquement, dans chaque plan il y en a une infinité concourant en un même point, peut être appelé un *complexe linéaire de rayons*. Nous pouvons dire aussi que, relativement à ce complexe, les points et les plans de l'espace indéfini *se correspondent mutuellement;* chaque plan contenant tous les rayons qui se rencontrent en un même point de ce plan, et chaque point étant traversé par tous les rayons situés dans un plan qui passe par ce point.

16. L'équation (1) représente un complexe linéaire de rayons; mais il est aisé de voir que cette équation n'est pas l'équation *générale* d'un complexe linéaire. Les considérations suivantes vont nous amener à généraliser les développements dans lesquels nous sommes déjà entré, et en même temps à les rendre plus symétriques.

Jusqu'à présent nous avons déterminé un rayon par ses deux projections sur les plans XZ, YZ

$$x = rz + \rho,$$
$$y = sz + \sigma,$$

d'où l'on déduit, pour sa projection sur le plan XY,

$$(5) \qquad ry - sx = r\sigma - s\rho.$$

Cette équation fournit le nouveau terme $(r\sigma - s\rho)$ qui dépend linéairement, de même que ρ et σ, de r et de s aussi bien que de x et y.

Pareillement, des équations

$$tr + us + v = 0,$$
$$t\rho + u\sigma + w = 0,$$

exprimant que le rayon (r, s, ρ, σ) est situé dans le plan (t, u, v, w) représenté par l'équation

$$tx + uy + vz + w = 0\ [*],$$

on déduit la relation

$$(6) \qquad \frac{w}{t}\cdot s - \frac{v}{t}\sigma = (r\sigma - s\rho).$$

17. Si l'on introduit un nouveau terme contenant $(s\rho - r\sigma)$, l'équation du complexe peut s'écrire ainsi :

$$(7) \qquad Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) = 0.$$

Ensuite éliminant $(r\sigma - s\rho)$ à l'aide de l'équation

$$ry' - sx' = r\sigma - s\rho,$$

---

[*] Désormais nous ferons usage des quatre coordonnées planaires t, u, v, w, et par suite nous représenterons un point par une équation homogène. Quelquefois nous écrirons, pour abréger et pour plus de symétrie, $\frac{\xi}{\theta}$, $\frac{\eta}{\theta}$, $\frac{\zeta}{\theta}$ au lieu de x, y, z, et conséquemment un plan sera représenté par une équation homogène entre les quatre coordonnées ponctuelles ξ, η, ζ, θ.

et suivant la marche adoptée au n° **15**, on trouve, pour représenter le plan relatif au point x', y', z', l'équation

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &(A - Fy' - Ez')(x - x') + (B + Fx' - Dz')(y - y') \\ &\qquad\qquad + (C + Ex' + Dy')(z - z') = 0. \end{aligned} \right.$$

On peut développer cette équation comme il suit :

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &(A - Fy' - Ez')x + (B + Fx' - Dz')y \\ &\qquad\qquad + (C + Ex' + Dy')z = Ax' + By' + Cz', \end{aligned} \right.$$

et la ramener ensuite à la forme plus symétrique

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + D(y'z - z'y) \\ &\qquad\qquad + E(x'z - z'x) + F(x'y - y'x) = 0. \end{aligned} \right.$$

18. Nous allons prouver directement que tous les rayons situés dans un plan donné concourent en un même point. Soit

$$(11)\qquad t'x + u'y + v'z + w' = 0$$

l'équation de ce plan. Pour exprimer qu'un rayon y est contenu, on peut prendre les trois équations suivantes :

$$\begin{gathered} t'r + u's + v' = 0, \\ t'\rho + u'\sigma + w' = 0, \\ w's - v'\sigma - (r\sigma - s\rho)t' = 0, \end{gathered}$$

dont chacune est une conséquence des deux autres. Entre ces équations et celle du complexe, éliminons les quantités $(r\sigma - s\rho)$, r et ρ. L'équation résultante

$$(12)\quad (Bt' - Au' - Fw')s + (Dt' - Eu' + Fv')\sigma + Ct' - Av' - Ew' = 0$$

étant linéaire par rapport aux deux variables restantes s et σ, représente une ligne droite parallèle à OX, et coupant le plan YZ en un point qui a pour coordonnées

$$(13)\qquad \begin{cases} z' = \dfrac{\mathrm{B}t' - \mathrm{A}u' - \mathrm{F}w'}{\mathrm{D}t' - \mathrm{E}u' - \mathrm{F}v'}, \\[2ex] y' = -\dfrac{\mathrm{C}t' - \mathrm{A}v' - \mathrm{E}w'}{\mathrm{D}t' - \mathrm{E}u' + \mathrm{F}v'}. \end{cases}$$

D'où l'on voit que tous les rayons du complexe qui sont contenus dans le plan (11) coupent cette ligne droite, et par conséquent se rencontrent en un même point. Deux des coordonnées de ce point sont données par les équations (13) ; la troisième

$$(14)\qquad x' = \frac{\mathrm{C}u' - \mathrm{B}v' - \mathrm{D}w'}{\mathrm{D}t' - \mathrm{E}u' + \mathrm{F}v'}$$

s'obtient en introduisant dans l'équation du plan les valeurs précédentes de z' et y'.

Nous pouvons représenter le point qui correspond au plan donné (t', u', v', w') par son équation

$$(15)\quad \begin{cases} (\mathrm{C}u' - \mathrm{B}v' - \mathrm{D}w')t - (\mathrm{C}t' - \mathrm{A}v' - \mathrm{E}w')u + (\mathrm{B}t' - \mathrm{A}u' - \mathrm{F}w')v \\ \qquad\qquad + (\mathrm{D}t' - \mathrm{E}u' + \mathrm{F}v')w = 0, \end{cases}$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$(16)\quad \begin{cases} \mathrm{A}(v'u - u'v) + \mathrm{B}(t'v - v't) + \mathrm{C}(u't - t'u + \mathrm{D}(t'w - w't) \\ \qquad\qquad + \mathrm{E}(w'u - u'w) + \mathrm{F}(v'w - w'v) = 0. \end{cases}$$

19. Les équations (10) et (16) sont les plus générales qu'on puisse employer pour établir une correspondance mutuelle entre un point et un plan. L'équation (7) est donc l'équation la plus générale d'un complexe linéaire [*].

---

[*] Pour justifier cette assertion, il suffit d'avoir égard à la remarque suivante.

L'équation (10) doit représenter, si l'on regarde x, y, z comme variables, un plan passant par le point (x', y', z') ; reciproquement, si l'on regarde x', y', z' comme variables, un plan passant par le point (x, y, z) et représenté par l'équation (10) ;

20. D'après la propriété caractéristique d'un complexe linéaire quelconque, le plan correspondant à un point donné est déterminé par deux des rayons qui passent par ce point, et, de même, le point correspondant à un plan donné est déterminé par deux quelconques des rayons situés dans ce plan.

Soient P, P′ deux points quelconques de l'espace, p et p' les plans qui leur correspondent. Soient L la droite qui joint les deux points et A la droite d'intersection des deux plans. Par la droite L menons un plan quelconque qui coupe A au point Q, et joignons PQ, P′Q. Ces deux droites, passant par les points P et P′ et se trouvant dans les plans p, p', sont des rayons du complexe. Le plan PQP′, qui contient les deux rayons, correspond au point Q; donc tous les plans qui passent par un point quelconque de A se coupent suivant la droite L. Semblablement, tout plan mené par A coupe L au point qui lui correspond. D'après cela, nous dirons que les droites L, A sont *deux droites conjuguées par rapport au complexe linéaire*, ou simplement sont *deux droites conjuguées*. La relation qui existe entre deux droites conjuguées est réciproque; chacune d'elles peut être regardée comme un *axe* autour duquel un plan tourne, tandis que le point correspondant à ce plan décrit la seconde, et inversement, chacune de ces droites peut être regardée comme un rayon décrit par un point mobile, tandis que le plan correspondant à ce point tourne autour de l'autre.

Toute droite qui rencontre deux droites conjuguées est un rayon du complexe.

Toute droite de l'espace a une conjuguée.

Si un point se meut le long d'un rayon du complexe, le plan correspondant tourne autour de ce rayon lui-même, puisqu'il contient sans cesse tous les rayons passant par le point, donc en particulier le rayon même que ce point décrit. Et par conséquent chaque rayon du complexe représente deux droites conjuguées coïncidentes.

---

donc cette équation, linéaire par rapport à x, y, z d'une part, et à x', y', z' d'autre part, ne doit contenir que les termes

$$x - x', \quad y - y', \quad z - z', \quad yz' - y'z, \quad xz' - x'z, \quad xy' - x'y,$$

ce qu'il fallait démontrer.

21. On peut rattacher ces dernières propriétés au *principe de la réciprocité polaire*. En effet, l'équation générale (10), qui représente le plan correspondant à un point donné, ne change pas si l'on y permute entre elles les lettres x', y', z' et x, y, z. Donc, si nous adoptons les dénominations de *pôle* et de *plan polaire* pour indiquer un point et le plan qui lui correspond, nous pouvons dire que les plans polaires de tous les points d'un plan donné passent par le pôle de ce plan, et réciproquement, que les pôles de tous les plans menés par un point donné sont situés dans le plan polaire de ce point. Dans le cas particulier qui nous occupe, un plan contenant son propre pôle est déterminé par les pôles de deux plans quelconques passant par ce pôle; et pareillement un point, étant toujours situé dans son plan polaire, est déterminé par les plans polaires de deux quelconques des points de ce plan. La droite qui joint deux points de l'espace est *conjuguée* à la droite suivant laquelle se coupent les plans polaires de ces deux points. Si l'une des deux droites enveloppe une courbe plane, sa conjuguée décrit une surface conique, et le sommet du cône est situé dans le plan de la courbe. En général, si l'une des deux droites décrit une surface réglée, sa conjuguée décrit aussi une surface réglée, et quand l'une de ces deux surfaces devient un cône, l'autre dégénère en une courbe plane [*].

22. *Un point de l'espace étant donné, construire le plan qui contient tous les rayons du complexe passant par ce point.*

Toute droite qui s'appuie sur deux droites conjuguées est un rayon du complexe. Le plan cherché est donc déterminé par deux droites dont chacune, passant par le point donné, sera menée de manière à rencontrer les deux droites de deux systèmes conjugués donnés.

Un plan quelconque étant donné, construire le point vers lequel convergent tous les rayons du complexe situés dans ce plan.

Toute droite qui joint les deux points d'intersection de deux droites

[*] La *polarité réciproque*, de nature particulière, que nous rencontrons ici, a été remarquée pour la première fois par M. Mœbius, dans le tome X du *Journal de Crelle*, et développée plus tard par M. L.-F. Magnus dans son excellent ouvrage intitulé : *Sammlung von Aufgaben und Lehrsatzen*....

conjuguées par un même plan est un rayon du complexe. Il suffit donc, pour déterminer le point cherché, de connaître deux systèmes de droites conjuguées, et de joindre les points d'intersection de chacun d'eux par le plan proposé.

Remarquons enfin que toute droite, qui joint les deux points de rencontre de deux droites conjuguées par un plan, est un rayon du complexe qui converge vers le pôle de ce plan. De même, toute droite située à la fois dans deux plans menés par un même point de l'espace, et respectivement par deux droites conjuguées, est un rayon du complexe situé dans le plan polaire de ce point.

23. Après cette digression géométrique qui était naturellement indiquée, reprenons la marche analytique.

Si dans l'équation générale (9), qui représente le plan correspondant à un point donné (x', y', z'), on fait

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0,$$

on trouve

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{17}$$

pour l'équation du plan qui correspond à l'origine des coordonnées.

Si l'on y fait ensuite et successivement

$$\begin{aligned} z' &= \infty, \\ y' &= \infty, \\ x' &= \infty, \end{aligned}$$

la même équation devient

$$\left\{\begin{aligned} &C + Ex + Dy = 0, \\ &B + Fx - Dz = 0, \\ &A - Fy - Ez = 0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Ces trois équations représentent donc respectivement les plans correspondants aux points situés à l'infini sur les axes OZ, OY, OX.

En combinant chacune des équations (18) avec (17), on obtient les rayons conjugués aux axes coordonnés OZ, OY, OX, lesquels forment un triangle dont les sommets tombent aux points correspondants dans les trois plans coordonnés XY, XZ, YX.

24. Si l'on fait

$$w' = \infty,$$

l'équation (15), qui représente le point correspondant à un plan donné (t', u', v', w'), devient

$$-\mathrm{D}t + \mathrm{E}u - \mathrm{F}v = 0;$$

elle indique que le point correspondant au plan situé à l'infini est lui-même situé à l'infini sur la droite que représentent les équations

$$\frac{x}{\mathrm{D}} = -\frac{y}{\mathrm{E}} = \frac{z}{\mathrm{F}}, \tag{19}$$

tandis que

$$\mathrm{D}x - \mathrm{E}y + \mathrm{F}z = 0$$

représente le plan qui lui est perpendiculaire, les axes étant supposés rectangulaires.

Nous donnerons à la droite (19) le nom de *droite caractéristique du complexe*, parce qu'elle a avec lui une relation nécessaire et invariable.

25. Si l'on fait successivement

$$t' = \infty,$$
$$u' = \infty,$$
$$v' = \infty,$$

on obtient les trois équations suivantes, qui représentent les points correspondants aux plans coordonnés YZ, XZ, XY, et situés dans ces plans respectifs :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{C}u - \mathrm{B}v - \mathrm{D}w &= 0,\\ \mathrm{C}t - \mathrm{A}v - \mathrm{E}w &= 0,\\ \mathrm{B}t - \mathrm{A}u - \mathrm{F}w &= 0. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Les coordonnées de ces points sont donc

$$(21)\quad \begin{cases} x = 0, & y = -\frac{C}{D} = y_t, \quad z = \frac{B}{D} = z_t, \\ y = 0, & x = -\frac{C}{E} = x_u, \quad z = \frac{A}{E} = z_u, \\ z = 0, & x = -\frac{B}{F} = x_v, \quad y = \frac{A}{F} = y_v, \end{cases}$$

d'où l'on déduit la relation

$$\frac{x_v y_t z_u}{x_u y_v z_t} = -1.$$

Si l'on pose $C = -1$, la ligne droite conjuguée à OZ, étant regardée comme un axe, peut être déterminée par ses quatre coordonnées

$$p = A, \quad q = B, \quad \varpi = D, \quad \varkappa = E.$$

Ces coordonnées sont donc quatre des constantes du complexe

$$Ar + Bs + D\sigma + E\rho + F(s\rho - s\sigma) = 1.$$

La droite MN, conjuguée à OZ, ne change pas quelle que soit la valeur de F. Donc, si cette dernière équation devient linéaire en faisant $F = 0$, le complexe est complétement déterminé par la seule ligne MN, conjuguée de OZ.

26. Le rapport des trois constantes desquelles dépend la direction caractéristique du complexe (19), savoir :

$$D:E:F,$$

ne change pas avec la position de l'origine, ni par conséquent si le complexe se meut parallèlement à lui-même. Mais ce rapport est altéré, si le complexe subit un mouvement de rotation et si la direction caractéristique change en même temps. L'une des trois constantes F, E, D devient nulle, si la caractéristique est située dans les plans XY, XZ, YZ; deux d'entre elles s'annulent, savoir : F et E, F et D ou E et D, si cette caractéristique coïncide avec les axes OX, OY ou OZ respectivement.

Dans cette dernière hypothèse, qui présente trois cas distincts, l'équation générale prend l'une des trois formes suivantes :

$$(22)\qquad \begin{cases} Ar + Bs + C + D\sigma = 0, \\ Ar + Bs + C + E\rho = 0, \\ Ar + Bs + C + F(s\rho - r\sigma) = 0. \end{cases}$$

27. Le rapport des trois constantes

$$A:B:C$$

varie si le complexe se meut parallèlement à lui-même. Quand le plan correspondant au point O passe par l'un des axes OZ, OY, OX, l'une des trois constantes C, B, A devient nulle; quand ce plan se confond avec XY, XZ ou YZ, c'est-à-dire quand O est le point correspondant de XY, XZ ou YZ, deux des constantes s'annulent, savoir : A et B, ou A et C, ou enfin B et C, et l'équation générale du complexe devient

$$(23)\qquad \begin{cases} D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) + C = 0, \\ D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) + Bs = 0, \\ D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) + Ar = 0, \end{cases}$$

28. Afin de représenter un complexe linéaire par les équations les plus simples possible, prenons l'un des plans coordonnés XY, XZ, YZ perpendiculaire à la direction caractéristique, et faisons passer les axes OZ, OY, OX par le point O correspondant à ce plan et qui y est situé. Les équations qui résultent de ces trois hypothèses sont

$$(23')\qquad \begin{cases} F(s\rho - r\sigma) + C = 0, \\ Bs + E\rho = 0, \\ Ar + D\sigma = 0. \end{cases}$$

Les plans correspondant à tous les points d'une droite parallèle à la caractéristique sont parallèles entre eux; et réciproquement, le lieu des points correspondant à des plans parallèles est une droite parallèle à la caractéristique. D'où l'on conclut qu'il existe une droite fixe et déterminée, dont les points correspondent aux plans qui lui sont perpendiculaires. Donc, en supposant les axes rectangulaires, on ne peut représenter un complexe linéaire que d'une seule manière par des équations ayant la forme des équations (23').

29. Pour obtenir, par exemple, la première de ces équations qui peut s'écrire

$$s\rho - s\sigma = k,$$

en y remplaçant

$$-\frac{C}{F} \text{ par } k,$$

il suffit de prendre la droite fixe pour l'axe des z. D'ailleurs, comme on n'a fait aucune supposition relativement à la position de l'origine O sur OZ, ni relativement aux directions des axes OX, OY, situés dans le plan XY perpendiculaire à OZ, cette équation demeure invariable, soit qu'on transporte le système des coordonnées parallèlement à lui-même le long de OZ, soit qu'on le fasse tourner autour de cette droite. En d'autres termes,

Un complexe linéaire de rayons reste invariable, quand on le transporte parallèlement à lui-même le long d'une certaine droite fixe, ou qu'on le fait tourner autour de cette droite.

Cette droite fixe peut être appelée l'*axe de rotation* ou plus brièvement l'*axe* du complexe.

30. On peut donner diverses interprétations géométriques aux trois équations (23'), dont chacune exprime une propriété caractéristique d'un complexe linéaire de rayons.

Deux plans XZ, YZ qui se coupent suivant OZ étant donnés, on peut déterminer les rayons de l'espace, soit par leurs projections sur ces plans, soit par les points où les rayons les rencontrent. Dans le premier cas, si l'on mène un troisième plan qui coupe à angle droit les plans XZ, YZ suivant OX et OY, il existe deux plans parallèles entre eux LMN, L'M'N' qui passent respectivement par les projections données LN, M'N' et qui rencontrent les axes OZ, OY, OX aux points N et N', M et M', L et L'. Dans le second cas, soient U et V les points d'intersection du rayon avec les plans XZ et YZ, et U', V' les projections de ces points sur les plans YZ, XZ. En conséquence, U'V, UV' et U'V' sont les projections de UV sur les plans XZ, YZ et sur OZ. Si, dans le premier cas, on a

$$\frac{\mathrm{LL'.MM'}}{\mathrm{NN'}} = k,$$

et si, dans le second cas, on a

$$\frac{\mathrm{UU'.VV'}}{\mathrm{U'V'}} = k,$$

tous les rayons ainsi déterminés constituent un complexe linéaire représenté par l'équation

$$s\rho - r\sigma = k,$$

et dont l'axe est OZ.

Si $k = 0$, le complexe linéaire est d'espèce particulière : tous ses rayons rencontrent l'axe OZ.

31. On peut parvenir directement aux résultats du n° **29**. Soit x', y', z' un point de l'espace; d'après l'équation (10), le plan correspondant à ce point dans le complexe qui a pour équation

$$s\rho - r\sigma = k, \tag{24}$$

est représenté par

$$y'x - x'y = k(z - z'). \tag{25}$$

Si l'on fait $x' = 0, y' = 0$, cette équation montre que tous les plans correspondant aux points de l'axe de rotation OZ sont perpendiculaires à cet axe (ou parallèles à XY, si les coordonnées sont obliques).

Si le point est situé dans le plan XY, il faut faire $Z' = 0$, d'où

$$y'x - x'y = kz;$$

et conséquemment le plan correspondant passe par le point O. Appelons λ l'angle de ce plan avec l'axe de rotation, on a

$$\cos\lambda = \frac{k}{\sqrt{y'^2 + x'^2 + k^2}},$$

d'où

$$y'^2 + x'^2 = k^2 \operatorname{tang}^2 \lambda. \tag{26}$$

Et par conséquent :

Des droites parallèles à l'axe du complexe et situées à égale distance de cet axe sont rencontrées sous le même angle par les plans qui correspondent à leurs points respectifs.

32. De l'équation (26) découlent les conséquences suivantes.

Le plan p, correspondant à un point P, passe par OP, O étant la projection du point P sur OZ. Faisons tourner de 90 degrés, autour de l'axe OZ, le plan p et la perpendiculaire OM abaissée du point O sur ce plan, et désignons-les par p' et OM′ dans leur nouvelle position. La projection de OP sur OM′ est constante, et pareillement la perpendiculaire abaissée du point P sur p'.

Ensuite, k étant donné, on peut déterminer λ et par suite construire le plan correspondant à un point donné, et réciproquement on peut déterminer OP et par conséquent construire le point correspondant à un plan donné.

Quant à l'équation (25), elle donne lieu à l'interprétation suivante : Par le point P, menez un plan XY perpendiculaire à OZ. Dans le plan p correspondant à ce point, prenez un point R dont la projection sur le plan XY soit R′. Le double de l'aire du triangle POR′ divisée par R′R est constant et égal à k.

33. Un complexe linéaire dépend de cinq constantes, dont quatre servent à fixer la position de son axe dans l'espace. Dans le cas des équations (23′), cet axe se confondant avec l'un des axes coordonnés, il ne reste plus qu'une seule constante. La position de l'axe du complexe et la valeur de la cinquième constante peuvent être déterminées en fonction des cinq paramètres indépendants de l'équation générale (7).

Pour cela, on peut se servir de la transformation des coordonnées. Sans entrer ici dans tous les calculs, qu'on trouvera plus développés dans le Mémoire original, nous ferons simplement connaître les formules qui résultent de cette transformation et dont nous aurons à faire usage ci-après.

34.
$$x = rz + \rho,$$
$$y = sz + \sigma$$

étant les équations d'un rayon dans un système de coordonnées (x, y, z),

$$x' = r'z' + \rho'$$

et

$$y' = sz' + \rho'$$

étant ses équations dans un autre système (x', y', z'), on a entre les variables r, s, ρ, σ et r', s', ρ', σ', les relations suivantes :

1° Si les axes coordonnés demeurent parallèles, l'origine se transportant simplement au point (x^0, y^0, z^0), on a

$$(26)\qquad \begin{cases} r = r' \\ s = s', \\ \rho = \rho' + x^0 - rz^0, \\ \sigma = \sigma' + y^0 - sz^0, \end{cases}$$

$$(27)\qquad s\rho - r\sigma = (s'\rho' - r'\sigma') + x^0 s - y^0 r,$$

si $x^0 = 0$ et $y^0 = 0$; donc, si l'origine se déplace le long de OZ, l'expression $(s\rho - r\sigma)$ ne change pas (**29**).

2° Si OX et OY tournent autour de OZ, faisant dans leurs nouvelles positions des angles α, α' avec OX, on a, en posant $\alpha' - \alpha = \theta$,

$$(28)\qquad \begin{cases} r = r' \cos\alpha + s' \cos\alpha', \\ \rho = \rho' \cos\alpha + \sigma' \cos\alpha', \\ s = r' \sin\alpha + s' \sin\alpha', \\ \sigma = \rho' \sin\alpha + \sigma' \sin\alpha', \end{cases}$$

$$(29)\qquad (s\rho - r\sigma) = (s'\rho' - r'\sigma') \sin\theta,$$

d'où l'on voit que $(s\rho - r\sigma)$ ne change pas si $\theta = \frac{\pi}{2}$ (**29**).

3° Si OX et OZ tournent autour de OY, qu'on appelle α' et α les angles que ces axes, dans leur nouvelle position, font avec OZ, et qu'on pose, comme ci-dessus, $\alpha' - \alpha = \theta$, on trouve

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} r' &= -\frac{\sin\alpha - r\cos\alpha}{\cos\alpha + r\sin\alpha},\\ \rho' &= \frac{\rho}{\cos\alpha + r\sin\alpha},\\ s' &= -\frac{s}{\cos\alpha + r\sin\alpha},\\ \sigma' &= -\frac{(s\rho - r\sigma)\sin\alpha + \sigma\cos\alpha}{\cos\alpha + r\sin\alpha},\end{aligned}\right.$$

$$(31)\qquad (s'\rho' - r'\sigma') = \frac{(s\rho - r\sigma)\cos\alpha - \sigma\sin\alpha}{\cos\alpha + r\sin\alpha};$$

$$(32)\qquad \frac{\rho'}{s'} = \frac{\rho}{s},$$

et inversement

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} r &= \frac{\sin\alpha + r'\cos\alpha}{\cos\alpha - r'\sin\alpha},\\ \rho &= \frac{\rho'}{\cos\alpha - r'\sin\alpha},\\ s &= -\frac{s'}{\cos\alpha - r'\sin\alpha},\\ \sigma &= \frac{(s'\rho' - r'\sigma')\sin\alpha + \sigma'\cos\alpha}{\cos\alpha - r'\sin\alpha};\end{aligned}\right.$$

$$(34)\qquad s\rho - r\sigma = \frac{(s'\rho' - r'\sigma')\cos\alpha - \sigma\sin\alpha}{\cos\alpha - r'\sin\alpha}.$$

35. Cela posé, l'équation générale d'un complexe linéaire (7)

$$Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) = 0$$

devient, quand on transporte l'origine au point (x^0, y^0, z^0) (26),

$$(A - Fy^0 - Ez^0)r + (B + Fx^0 - Dz^0)s + (C + Ex^0 + Dz^0) \\ + D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) = 0.$$

Si

$$\frac{x^0}{D} = -\frac{y^0}{E} = \frac{z^0}{F},$$

l'équation primitive ne change pas. Donc le complexe reste le même s'il se meut parallèlement à lui-même, le long de la direction indiquée par ces dernières relations. Si l'on appelle ξ, η, ζ les angles que cette direction fait avec les axes OX, OY, OZ, on a

$$(35) \qquad \frac{\cos\xi}{D} = -\frac{\cos\eta}{E} = \frac{\cos\zeta}{F}.$$

36. Pour amener OZ à coïncider avec la droite OM, qui a la direction déterminée ci-dessus, il faut d'abord faire tourner le système des coordonnées autour de OZ, d'une quantité angulaire égale à α, de manière à amener le plan ZX à contenir la droite OM. On a donc

$$\cos\alpha = \frac{\cos\xi}{\sin\zeta},$$

d'où

$$\tang^2\alpha = \frac{1 - \cos^2\zeta - \cos^2\xi}{\cos^2\xi} = \frac{\cos^2\eta}{\cos^2\xi} = \frac{E^2}{D^2}.$$

En vertu des formules (28), l'équation du complexe (7) devient

$$(A\cos\alpha + B\sin\alpha)r' - (A\sin\alpha - B\cos\alpha)\sigma' + (E\cos\alpha + D\sin\alpha)\rho' \\ - (E\sin\alpha - D\cos\alpha)\sigma' + C + F(s'\rho' - r'\sigma') = 0,$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$(36) \qquad A'r + B's + C' + D'\sigma + F'(s\rho - r\sigma) = 0,$$

en ôtant les accents des coordonnées nouvelles et en posant

$$(37) \qquad \left\{\begin{array}{l} E\cos\alpha + D\sin\alpha = 0, \\ A' = (AD - BE)\dfrac{\cos\alpha}{D}, \quad B' = (AD + BE)\dfrac{\cos\alpha}{D}, \\ D' = (D^2 + E^2)\dfrac{\cos\alpha}{D}, \qquad C' = C, \quad F' = F. \end{array}\right.$$

37. Il s'agit maintenant de faire prendre à OZ, dans le plan ZX, la direction OM; il faut pour cela faire usage des formules (33), après y avoir remplacé α par ζ. L'équation (36) devient de la sorte

$$\begin{aligned}&A'(\sin\zeta + r'\cos\zeta) - B's' + C'(\cos\zeta - r'\sin\zeta)\\ &\quad + D'[(s'\rho' - r'\sigma')\sin\zeta + \sigma'\cos\zeta] + F'[(s'\rho' - r'\sigma')\cos\zeta - \sigma'\sin\zeta] = 0,\end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$(37') \qquad A''r + B''s + C'' + F''(s\rho - r\sigma) = 0,$$

en omettant les accents des coordonnées nouvelles et en posant

$$(38) \qquad \left\{\begin{aligned} &D'\cos\zeta = F'\sin\zeta,\\ &A'' = (A'F' - C'D')\frac{\cos\zeta}{F'},\\ &B'' = -B',\\ &C'' = (A'F' + A'D')\frac{\cos\zeta}{F'},\\ &F'' = (D'^2 + F'^2)\frac{\cos\zeta}{F'}.\end{aligned}\right.$$

38. Enfin il faut transporter l'origine dans le plan XY, au point dont les coordonnées sont x^0 et y^0. L'équation du complexe, en y remplaçant ρ et σ par $\rho + x^0$ et $\sigma + y^0$, devient donc

$$(A'' - F''y^0)r + (B'' + F''x^0)s + C'' + F''(s\rho - r\sigma) = 0,$$

qui se réduit à

$$(39) \qquad (s\rho - r\sigma) = -\frac{C''}{F''} = k,$$

en posant

$$y^0 = \frac{A''}{F''}, \quad x^0 = -\frac{B''}{F''}.$$

39. Par des substitutions successives, on trouve aisément

$$k = -\frac{C''}{F''} = -\frac{C'F' + A'D'}{D'^2 + F'^2} = -\frac{CF + (AD - BE)(D^2 + E^2)\frac{\cos^2\alpha}{D^2}}{(D^2 + E^2)^2\frac{\cos^2\alpha}{D^2} + F^2};$$

et enfin, en observant que

$$\cos^2\alpha = \frac{D^2}{D^2 + E^2},$$

on obtient l'expression symétrique

$$(40) \qquad k = -\frac{AD - BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2}.$$

Pour changer OZ et OX l'un dans l'autre, il faut employer les formules (30) et (31), en y faisant $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Au moyen de la dernière de ces deux formules, l'équation (39) du complexe linéaire se transforme immédiatement dans la suivante :

$$(41) \qquad \sigma = kr,$$

la constante k étant la même que ci-dessus.

Puis, en échangeant OY et OX, il vient

$$(42) \qquad \rho = ks.$$

40. Si k est nul, le complexe est d'espèce particulière : tous ses rayons rencontrent une droite fixe. Le complexe étant représenté par l'équation générale (7)

$$Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) = 0,$$

ce cas particulier a pour critérium la condition ci-après :

$$(43) \qquad AD - BE + CF = 0.$$

41. En éliminant successivement de l'équation générale (7) σ, ρ et $(s\rho - r\sigma)$, à l'aide des équations

$$x = rz + \rho,$$
$$y = sz + \sigma,$$
$$sx - ry = s\rho - r\sigma,$$

on obtient la suivante :

$$(A - Fy - Ez)r + (B + Fx - Dz)s + (C + Dy + Ex) = 0.$$

S'il existe un point (x, y, z) où concourent tous les rayons du complexe, ce point sera déterminé par le système des trois équations

$$(44) \qquad \left\{ \begin{aligned} &A - Fy - Ez = 0, \\ &B + Fx - Dz = 0, \\ &C + Ex + Dy = 0, \end{aligned} \right.$$

qui ne peuvent coexister qu'autant que la relation (43) est elle-même satisfaite.

Quand l'équation (43) a lieu, le lieu des points de concours de tous les rayons du complexe est une ligne droite, dont les projections sont représentées par les deux dernières des équations (44).

42. Tous les rayons qui appartiennent aux deux complexes linéaires

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Omega \equiv Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) = 0, \\ &\Omega' \equiv A'r + B's + C' + D'\sigma + E'\rho + F'(s\rho - r\sigma) = 0 \end{aligned} \right.$$

forment *une congruence linéaire représentée par le système de ces deux équations*.

Relativement à la détermination de la congruence, chacun des deux complexes

$$\Omega = 0, \quad \Omega' = 0$$

peut être remplacé par un autre quelconque de la forme

$$(46) \qquad \Omega + \mu\Omega' = 0,$$

μ étant un coefficient arbitraire.

Dans chacun des deux complexes qui déterminent la congruence, il y a un plan correspondant à chaque point de l'espace et contenant les rayons émergeant de ce point. Deux plans correspondant au même point se coupent suivant un seul rayon, qui appartient à la fois aux deux complexes, c'est-à-dire à la congruence. Donc :

Dans une congruence, chaque rayon correspond à un point de l'espace. Tous les plans qui correspondent à un même point, dans tous les complexes représentés par (46), se coupent suivant une seule et même droite; c'est le rayon correspondant de la congruence.

Réciproquement, il y a dans chacun des complexes (46) un point correspondant à un plan donné, où viennent concourir tous les rayons situés dans ce plan. Si l'on prend deux de ces complexes, on aura donc deux points; la droite qui les joint est le seul rayon qui soit situé dans le plan donné, relativement aux deux complexes, donc qui appartienne à la congruence. Nous dirons que c'est *le rayon de la congruence correspondant au plan donné.*

Ainsi, à chaque point comme à chaque plan, il ne correspond qu'un seul rayon. Jamais deux rayons de la congruence ne se rencontrent, c'est-à-dire ne sont situés dans un même plan.

43. Soient AB une droite donnée; A'B', A''B'' ses deux conjuguées par rapport aux complexes Ω, Ω'; C un point pris arbitrairement sur AB. Chaque rayon émanant du point C appartient à Ω, s'il est compris dans le plan A'B'C, et à Ω' s'il est compris dans le plan A''B''C. Donc l'intersection des deux plans A'B'C, A''B''C, c'est-à-dire la droite qui, partant du point C, s'appuie sur les deux conjuguées de AB, est le rayon de la congruence correspondant au point C. Faisons mouvoir le point C le long de AB, tous les rayons de la congruence obtenus ainsi sont les génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde, dont les droites AB, A'B', A''B'' sont des génératrices de deuxième mode de génération. Si l'on remplace Ω et Ω' par deux autres complexes pris arbitrairement parmi ceux en nombre infini que représente la formule (46), les deux droites conjuguées seront remplacées par d'autres, mais qui seront encore rencontrées par les rayons de la congruence émanant de AB. Donc :

Les lignes droites conjuguées à une droite donnée, par rapport à tous les complexes qui se coupent mutuellement suivant une congruence linéaire donnée, sont les génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde, tandis que les génératrices du second mode de génération sont les rayons de la congruence qui rencontrent la droite donnée.

44. Si un point se meut le long d'une droite dans l'espace, le rayon qui lui correspond décrit donc en général un hyperboloïde. Nous pouvons dire que cet hyperboloïde est le lieu du rayon correspondant à un plan mobile autour de la droite donnée comme axe. Si le rayon est le même dans les deux cas, le point où il rencontre la droite AB est un point de la surface, et le plan qui contient à la fois ce rayon et la droite AB est le plan tangent en ce point à la surface.

45. L'hyperboloïde engendré par un rayon d'une congruence linéaire, dont le point correspondant se meut le long de AB, varie quand cette droite tourne autour d'un de ses points C. Tous ces hyperboloïdes contiennent le rayon correspondant à C, mais il n'y a pas d'autre rayon que celui-là qui soit commun à deux hyperboloïdes. Si AB décrit un plan et tourne de 180 degrés autour du point, il passe par chaque point de l'espace un rayon d'un certain hyperboloïde. Donc une congruence linéaire peut être engendrée par un hyperboloïde variable qui tourne autour d'une de ses génératrices.

Et pareillement, un complexe linéaire peut être engendré par le mouvement de rotation d'une congruence variable.

46. Tandis que, dans chacun des deux complexes Ω, Ω', il existe une droite fixe, savoir l'axe du complexe, autour de laquelle ses rayons sont distribués symétriquement, il existe, dans toute congruence linéaire, un plan caractéristique parallèle aux deux axes des deux complexes et une direction caractéristique perpendiculaire à ce plan.

Le plan caractéristique, si on le conduit par l'origine, peut être représenté par l'équation

$$ax + by + cz = 0.$$

Les deux droites, menées du point O parallèlement aux axes des deux complexes, sont représentées par les équations

$$\frac{x}{D} = -\frac{y}{E} = \frac{z}{F},$$

$$\frac{x}{D'} = -\frac{y}{E'} = \frac{z}{F'}.$$

Ces droites étant comprises dans le plan caractéristique, nous avons, pour déterminer les constantes de l'équation du plan, les relations

$$aD + bE + cF = 0,$$
$$aD' + bE' + cF' = 0,$$

d'où

$$(D'E - E'D)b + (D'F - F'D)c = 0,$$
$$(D'E - E'D)a + (E'F - F'E)c = 0.$$

En conséquence, l'équation du plan dont il s'agit devient

$$(47)\qquad (E'F - F'E)x - (D'F - F'D)y + (D'E - E'D)z = 0,$$

et les deux équations de la droite qui lui est perpendiculaire sont

$$(48)\qquad \frac{x}{E'F - F'E} = \frac{-y}{D'F - F'D} = \frac{z}{D'E - E'D}.$$

47. Si l'on donne à **OZ** la direction caractéristique, les deux complexes (45) seront représentés par des équations linéaires de la forme

$$(49)\qquad \begin{cases} \Omega \equiv Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho = 0, \\ \Omega' \equiv A'r + B's + C' + D'\sigma + E'\rho = 0, \end{cases}$$

l'origine restant arbitraire, ainsi que les directions de OX et OY perpendiculaires à OZ.

On peut ensuite faire mouvoir **OZ** parallèlement à elle-même, ce qui revient à remplacer ρ et σ par $(\rho + x^0)$ et $(\sigma + y^0)$, x^0 et y^0 étant les coordonnées de la nouvelle origine. Si en particulier on prend

$$C + Dy^0 + Ex^0 = 0,$$
$$C' + D'y^0 + E'x^0 = 0,$$

d'où

$$x^0 = -\frac{C'D - D'C}{D'E - E'D},$$
$$y^0 = \frac{C'E - E'C}{D'E - E'D},$$

C et C' disparaissent et les équations des complexes deviennent

$$(50)\quad \begin{cases} \Omega \equiv A r + B s + D\sigma + E\rho = 0, \\ \Omega' \equiv A' r + B' s + D'\sigma + E'\rho = 0. \end{cases}$$

Dans cette nouvelle position, OZ est une droite entièrement déterminée qu'on peut appeler l'*axe de la congruence*. Il est aisé de voir qu'elle coupe à angle droit les deux axes de rotation des complexes Ω, Ω', et par conséquent aussi les axes de tous les complexes représentés par l'équation (46).

48. Les plans qui, dans les deux complexes, correspondent à un point donné (x', y', z'), sont représentés par les équations

$$(51)\quad \begin{cases} (A - Ez')x + (B - Dz')y + (Ex' + Dy')z = Ax' + By', \\ (A' - E'z')x + (B' - D'z')y + (E'x' + D'y')z = A'x' + B'y'. \end{cases}$$

Pour que ces deux plans correspondants se confondent, il faut qu'on ait les relations

$$(52)\quad \begin{cases} (A - Ez') : (B - Dz') : (Ex' + Dy') : (Ax' + By') \\ = (A' - E'z') : (B' - D'z') : (E'x' + D'y') : (A'x' + B'y'). \end{cases}$$

Puisque les deux plans passent par le point donné, il suffit de deux équations, tirées des relations précédentes, pour déterminer le lieu des points qui ont le même plan correspondant dans les deux complexes. On trouve ainsi, en supprimant les accents, les six équations suivantes, qui sont telles que quatre quelconques d'entre elles sont une conséquence des deux autres :

$$(53)\quad \begin{cases} (D'E - E'D)z^2 - [(B'E - E'B) - (A'D - D'A)]z \\ \qquad - (A'B - B'A) = 0, \end{cases}$$

$$(54)\quad \begin{cases} (B'D - D'B)y^2 + [(B'E - E'B) + (A'D - DA')]xy \\ \qquad + (A'E - EA')x^2 = 0, \end{cases}$$

$$(55)\quad (A'D - D'A)y + (A'E - E'A)x + (D'E - E'D)zy = 0,$$

$$(56)\quad (B'D - D'B)y + (B'E - E'B)x - (D'E - E'D)xz = 0,$$

$$(57)\quad (A'B - B'A)y + (A'E - E'A)xz + (B'E - E'B)yz = 0,$$

$$(58)\quad (A'B - B'A)x - (A'D - D'A)xz - (B'D - D'B)xz = 0.$$

Remarquons, en passant, qu'une équation qui est, comme les précédentes, homogène par rapport aux quantités $(A'B - B'A)$, $(A'C - C'A)$,..., n'est pas altérée quand les complexes Ω, Ω' sont remplacés par deux quelconques des complexes $(\Omega + \mu\Omega')$.

49. Les deux premières de ces six équations montrent que le lieu cherché est le système de deux droites qui rencontrent l'axe OZ, et qui sont situées dans les deux plans parallèles à XY que détermine l'équation (53); la direction qu'elles prennent dans ces plans est déterminée par l'équation (54). Nous appellerons ces droites les *directrices*, et le plan caractéristique qui leur est parallèle et en est équidistant, prendra le nom de *plan central de la congruence linéaire*. Les deux directrices coupent à angle droit l'axe de la congruence, comme le font les axes de tous les complexes.

50. On peut partager les congruences linéaires en deux classes, selon que leurs directrices sont réelles ou imaginaires. Dans un cas particulier, les deux directrices se confondent. Enfin, il peut arriver que l'une d'elles soit à l'infini.

51. Si les directrices sont réelles, et si le plan XY passe par l'une d'elles, on a, d'après (53), la condition

$$(59)\qquad A'B - B'A = 0.$$

Pour déterminer la direction que cette directrice occupe dans le plan XY, l'équation (55) donne, en y faisant $Z = 0$,

$$(60)\qquad (A'D - D'A)y + (A'E - E'A)x = 0.$$

Parmi les complexes, en nombre infini, que contient la congruence, et qui sont tous représentés par l'équation

$$\Omega + \mu\Omega' = 0,$$

il y en a un qui mérite une attention particulière : c'est celui qu'on obtient en faisant

$$\mu = -\frac{A}{A'} = -\frac{B}{B'}$$

dans les équations (50). On trouve ainsi

$$(61) \qquad (A'D - D'A)\sigma + (A'E - E'A)\rho = 0.$$

Tous les rayons de ce complexe, et par conséquent tous les rayons de la congruence, rencontrent une droite fixe, située dans le plan XY et représentée par l'équation (60), en y remplaçant ρ et σ par x et y. Cette droite est donc l'axe du complexe et l'une des deux directrices de la congruence. On prouve de la même manière que tous les rayons de la congruence rencontrent l'autre directrice. Donc :

Tous les rayons d'une congruence rencontrent ses deux directrices. Quand les deux directrices sont réelles et données, on peut mener immédiatement, par un point quelconque, le seul rayon de la congruence qui y passe.

52. Dans la classe particulière de congruences, pour lesquelles on a

$$(62) \qquad D'E - E'D = 0,$$

l'une des deux directrices est située à l'infini. Si l'on fait en même temps

$$A'B - B'A = 0,$$

l'autre directrice, actuellement située dans le plan XY, se détermine comme ci-dessus par l'équation (60); mais, parmi les complexes

$$\Omega + \mu\Omega' = 0,$$

outre celui (61) qui a la directrice pour axe, il y en a un autre représenté par

$$D\Omega' - D'\Omega \equiv (A'D - D'A)r + (B'D - D'B)s = 0,$$

dont les rayons sont parallèles à un même plan. Son équation peut être transformée en celle-ci :

$$(63) \qquad \mathrm{A}r + \mathrm{B}s = 0,$$

et, par suite, l'équation du plan devient

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y = 0.$$

Donc, dans ce cas particulier, tous les rayons de la congruence rencontrent son unique directrice et sont parallèles à un même plan.

53. Des considérations qui précèdent, on conclut que, parmi tous les complexes qui se coupent suivant une congruence linéaire, et qui ont pour équation générale

$$(64) \qquad \Omega + \mu\Omega' = 0,$$

il y en a généralement deux, d'une espèce particulière, dont les rayons rencontrent leurs axes. Ces axes, directrices de la congruence, sont deux droites conjuguées par rapport à tous les complexes (64).

En général, il n'y a qu'un seul rayon de la congruence qui passe par un point donné, et il n'y en a qu'un qui soit situé dans un plan donné. Mais chacune des deux directrices peut être regardée comme étant le lieu des points, de chacun desquels émane une infinité de rayons situés dans un même plan passant par l'autre directrice. On peut également la regarder comme l'enveloppe de plans, dont chacun contient une infinité de rayons dirigés tous vers un même point de l'autre directrice.

54. Deux complexes quelconques Ω, Ω' peuvent toujours être représentés par des équations dépendant uniquement de la position de leurs axes et de la valeur de leurs constantes. Soient Δ la plus courte distance des deux axes et θ l'angle formé par leurs directions.

Supposons que OZ coupe à angle droit les axes des deux complexes, et soient OX l'axe du premier complexe et k sa constante. L'équation du complexe sera

$$\sigma = kr.$$

Si l'on fait tourner l'axe OY autour du point O jusqu'à ce que, dans la nouvelle position, l'angle Y'OX devienne égal à θ, le plan ZOY' passera par l'axe du second complexe, et l'équation précédente devient

$$\sigma' \sin\theta = kr' + ks' \cos\theta,$$

en y faisant

$$\sigma = \sigma' \sin\theta \quad \text{et} \quad r = r' + s' \cos\theta.$$

L'axe du second complexe Ω' rencontre OZ en un point O', OO' étant Δ. O' peut être pris pour l'origine des nouvelles coordonnées, OY et OZ étant remplacés par O'Y'', qui se confond avec l'axe de Ω', et par O'X'' perpendiculaire à ZY''; alors l'équation du second complexe devient

$$\rho'' = k' s'',$$

ρ'' et σ' étant les nouvelles coordonnées radiales et k' la constante du complexe. Actuellement, pour rendre O'X'' parallèle à OX', il faut faire tourner cet axe autour de O' et l'amener à une position O'X''' telle, que l'angle Y'''O'X'' soit égal à θ. Donc, en posant

$$\rho'' = \rho''' \sin\theta,$$
$$s'' = r''' \cos\theta + s''',$$

l'équation du complexe se trouve transformée dans la suivante :

$$\rho''' \sin\theta = k' r''' \cos\theta + k' s'''.$$

Enfin, si l'on porte l'origine de O' en O, ρ''' devient $\rho^{\text{IV}} + \Delta r'''$, d'où

$$\rho''' \sin\theta = (k' \cos\theta + \Delta \sin\theta) r''' + k' s'.$$

Supprimant les accents, les deux complexes Ω, Ω' rapportés aux mêmes axes coordonnés OX, OY, OZ, dont les deux derniers font entre eux un angle θ, sont représentés par les équations

$$(65) \qquad \begin{cases} \sigma \sin\theta = kr + k \cos\theta \,.\, s, \\ \rho \sin\theta = (k' \cos\theta + \Delta \sin\theta) r + ks. \end{cases}$$

55. Pour déterminer les directrices de la congruence représentée

par le système des deux équations (65), posons

$$A = k,\qquad B = k\cos\theta,\quad D = -\sin\theta,\quad E = 0,$$
$$A' = k'\cos\theta + \Delta\sin\theta,\quad B' = k',\qquad D' = 0,\qquad E' = -\sin\theta;$$

les équations (53) et (54) se transforment dans les suivantes :

$$(66)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= (z\sin\theta)^2 - [(k+k')\cos\theta + \Delta\sin\theta]\,z\sin\theta \\ &\quad + (kk'\sin^2\theta - \Delta k\sin\theta\cos\theta), \end{aligned}\right.$$

$$(67)\qquad 0 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{(k-k')\cos\theta - \Delta\sin\theta}{k'}\cdot\frac{y}{x} - \frac{k}{k'}.$$

Désignons les racines de ces équations par $z'\sin\theta$, $z''\sin\theta$ et $\left(\frac{y}{x}\right)'$, $\left(\frac{y}{x}\right)''$, nous aurons

$$z' + z'' = \frac{(k+k')\cos\theta + \Delta\sin\theta}{\sin\theta}.$$

$$(z'-z'')^2 = \frac{-4kk' + [(2k+k')\cos\theta - \Delta\sin\theta]^2}{\sin^2\theta},$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)' + \left(\frac{y}{x}\right)'' = \frac{(k-k')\cos\theta - \Delta\sin\theta}{k'},$$

$$\left[\left(\frac{y}{x}\right)' - \left(\frac{y}{x}\right)''\right]^2 = \frac{4kk' + [(k-k')\cos\theta - \Delta\sin\theta]^2}{k'^2}.$$

Les racines de ces équations sont à la fois réelles, ou imaginaires, ou égales. Dans ce dernier cas, on a

$$(k-k')\cos\theta - \Delta\sin\theta = 2\sqrt{-kk'},$$

d'où

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \left(\frac{y}{x}\right)'' = \sqrt{-\frac{k}{k'}}.$$

Le plan central de la congruence a pour équation

$$(68)\qquad z = \frac{(k+k')\cos\theta - \Delta\sin\theta}{2\sin\theta}.$$

Cette équation donne, dans deux cas particuliers,

$$z = \frac{1}{2}\Delta,$$

savoir, quand $\theta = \frac{1}{2}\pi$ et quand $k + k' = 0$.

Donc les axes de deux complexes, choisis parmi ceux qui se coupent suivant une congruence donnée, sont à égale distance de son plan central, si leurs directions sont rectangulaires ou si les constantes des deux complexes sont égales et de signes contraires.

56. Sans entrer dans de plus longs détails au sujet des résultats obtenus ci-dessus, nous allons nous occuper en dernier lieu du problème inverse, savoir : une congruence étant donnée par ses deux directrices, déterminer les complexes dont elle est l'intersection commune. Si les coordonnées sont rectangulaires, les deux directrices peuvent être représentées par les systèmes d'équations suivants

$$y - ax = 0, \quad z = \beta,$$
$$y + ax = 0, \quad z = -\beta.$$

Ces directrices sont les axes de deux complexes, qui jouent un rôle à part parmi tous les autres. Si on les fait mouvoir parallèlement à eux-mêmes, de manière à amener leurs axes dans le plan XY, ces deux complexes auront pour équations respectives

$$\sigma - a\rho = 0,$$
$$\sigma + a\rho = 0,$$

et par conséquent, si on les ramène à leur position primitive, ils ont pour équations

$$\sigma - a\rho + \beta s - \beta a r = 0,$$
$$\sigma + a\rho - \beta s - \beta a r = 0.$$

Ajoutant ces équations, après avoir multiplié la seconde par un coefficient indéterminé μ, il vient

$$(1+\mu)\sigma - (1-\mu)a\rho + (1-\mu)\beta s - (1+\mu)\beta a r = 0,$$

et si l'on pose

$$\frac{1-\mu}{1+\mu}=\lambda,$$

$$\sigma-\lambda a\rho+\lambda\beta s-\beta a r=0. \tag{69}$$

Cette équation, si l'on y fait varier λ, peut représenter tous les complexes qui se coupent suivant la congruence donnée. Leurs axes sont parallèles à XY et rencontrent OZ. Les équations (19) et (40) permettent de déterminer immédiatement la direction de leurs axes et leurs constantes. Mais on peut atteindre le même résultat en suivant la marche suivante, qui fait connaître en outre la position de ces axes dans l'espace.

Faisons tourner OX et OY d'un angle ω autour de OZ. A l'aide de la formule (34), dans laquelle il suffit de mettre ω au lieu de α, l'équation (69) devient

$$\begin{aligned}0 = (\cos\omega+\lambda a\sin\omega)\sigma'+(\sin\omega-\lambda a\cos\omega)\rho'\\+(\lambda\cos\omega+a\sin\omega)\beta s'+(\lambda\sin\omega-a\cos\omega)\beta r',\end{aligned}$$

et, si l'on fait

$$\operatorname{tang}\omega=\lambda a, \tag{70}$$

il vient

$$(1+\operatorname{tang}^2\omega)\sigma'+(\lambda\operatorname{tang}\omega-a)\beta r'+(\lambda+a\operatorname{tang}\omega)\beta s'=0.$$

Enfin, si l'on déplace le système des coordonnées parallèlement à lui-même, de manière que l'origine, glissant le long de OZ, vienne se placer au point z^0, on trouve

$$\begin{aligned}(1+\operatorname{tang}^2\omega)\sigma'+(\lambda\operatorname{tang}\omega-a)\beta r'\\+(\lambda+a\operatorname{tang}\omega)\beta s'-(1+\operatorname{tang}^2\omega)z^0 r'=0,\end{aligned}$$

qui, en posant

$$z^0=\frac{\lambda+a\operatorname{tang}\omega}{1+\operatorname{tang}^2\omega}\cdot\beta, \tag{71}$$

devient

$$\sigma' = -\frac{\lambda \operatorname{tang}\omega - a}{1 + \operatorname{tang}^2\omega} \cdot \beta r' = kr'. \tag{72}$$

Les valeurs de $\operatorname{tang}\omega$, z^0 et k demeurent réelles quand les deux directrices deviennent imaginaires. Dans ce cas, XY étant toujours le plan central de la congruence et OZ son axe, a, β et μ doivent être remplacés par $a\sqrt{-1}$, $\beta\sqrt{-1}$, $\mu\sqrt{-1}$. Si a est réel, on peut poser

$$a = \operatorname{tang}\alpha,$$

2α étant l'angle formé par les directions des deux directrices et bissecté par XZ. On a donc les relations ci-après :

$$\lambda = \frac{\operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\alpha}, \tag{73}$$

$$z^0 = \beta\frac{1 + \operatorname{tang}^2\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} \cdot \frac{\operatorname{tang}\omega}{1 + \operatorname{tang}^2\omega} = \beta\frac{\sin\omega\cos\omega}{\sin\alpha\cos\alpha} = \beta\frac{\sin 2\omega}{\sin 2\alpha}, \tag{74}$$

$$\left\{\begin{aligned} k &= \beta\frac{\operatorname{tang}^2\alpha - \operatorname{tang}^2\omega}{\operatorname{tang}\alpha(1 + \operatorname{tang}^2\omega)} = \beta\frac{\sin^2\alpha\cos^2\omega - \sin^2\omega\cos^2\omega}{\sin\alpha\cos\alpha} \\ &= \beta\frac{\sin(\alpha + \omega)\sin(\alpha - \omega)}{\sin\alpha\cos\alpha}. \end{aligned}\right. \tag{75}$$

L'expression de z^0 montre que l'axe situé dans le plan central est parallèle à l'une des deux droites qui, dans ce plan, divisent en deux parties égales l'angle formé par des parallèles aux deux directrices. Ces deux droites, qui ont une relation particulière avec la congruence, peuvent être appelées son *second* et son *troisième axe*. Ces trois axes rectangulaires se coupent *au centre* de la congruence.

On peut exprimer l'angle ω en fonction de z^0. Pour cela, on a

$$\sin 2\omega = \frac{z^0}{\beta}\sin 2\alpha,$$

équation qui donne, pour chaque valeur de z^0, deux directions perpendiculaires l'une à l'autre.

57. Si, dans l'expression

$$z^0 = \frac{B}{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \frac{\tang\omega}{1 + \tang^2\omega},$$

on remplace $\tang\omega$ par $\frac{y}{x}$, on trouve, en supprimant l'affixe de z^0,

$$(76) \qquad z(y^2 + x^2) = \frac{\beta}{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot xy.$$

Les axes de tous les complexes qui composent la congruence sont donc situés sur la surface représentée par cette équation. Or, cette équation ne change pas, si l'on fait permuter ensemble les axes OX, OY. Donc la surface contient les axes de deux séries différentes de complexes; l'une de ces deux séries forme la congruence donnée, tandis que l'autre se rapporte à une congruence étrangère, qu'on obtient en faisant tourner la première autour de son axe d'un angle de 90 degrés.

58. Soient

$$(77) \qquad \begin{cases} \Omega \equiv Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) = 0, \\ \Omega' \equiv A'r + B's + C' + D'\sigma + E'\rho + F'(s\rho - r\sigma) = 0, \\ \Omega'' \equiv A''r + B''s + C'' + D''\sigma + E''\rho + F''(s\rho - r\sigma) = 0, \end{cases}$$

les équations de trois complexes linéaires. L'ensemble de ces équations représente une *surface réglée*. Les complexes peuvent être remplacés par trois quelconques de ceux, en nombre infini, que représente la formule

$$\Omega + \mu\Omega' + \nu\Omega'' = 0,$$

où μ et ν peuvent prendre toutes les valeurs possibles. En associant les trois complexes deux à deux, on obtient trois congruences et par conséquent trois couples de directrices. Chaque rayon de la surface réglée, appartenant simultanément aux trois congruences, rencontre les deux directrices de chaque groupe. Donc la surface réglée est généralement *un hyperboloïde; les rayons forment les génératrices de l'un des modes de génération de la surface, et les directrices de toutes les con-*

gruences qui se coupent suivant cette surface forment les génératrices de l'autre mode de génération. Trois directrices quelconques suffisent pour déterminer l'hyperboloïde.

59. Soient P, P'; Q, Q'; R, R', les trois couples de directrices dont chacun détermine un plan central. Les trois plans centraux Π, k, P se coupent en un point C, *centre de la surface réglée*. Le segment d'un rayon de la congruence, terminé à deux directrices, étant bissecté par le plan central, les trois droites menées par le centre C de la surface, et qui s'appuient sur les deux directrices de chaque couple, sont divisées par le centre en deux parties égales; ce sont donc des *diamètres*.

Par exemple, soient π, π' les extrémités du diamètre $\pi C \pi'$ qui rencontre les deux bissectrices P, P'. Le rayon de la congruence (Ω, Ω') qui passe par π est parallèle à P', et le rayon qui passe par π' est parallèle à P. Les deux plans p, p', menés par les droites P et P' parallèlement au plan central Π, contenant chacun deux droites (savoir : une directrice et le rayon parallèle à l'autre) qui appartiennent aux deux modes de génération de l'hyperboloïde, touchent la surface en un point qui n'est autre que le point de concours des deux droites dans chacun de ces plans.

Par les six directrices P, P'; Q, Q'; R, R', faisons passer six plans p, p'; q, q'; r, r' parallèles deux à deux aux plans centraux Π, k, P. Ces six plans forment un parallélipipède circonscrit à la surface, dont trois diamètres joignent deux à deux les points de contact situés dans les plans opposés. Les axes des trois congruences correspondantes (Ω, Ω'), (Ω, Ω''), (Ω', Ω'') sont situés à égale distance des plans opposés de chacun des trois couples, et leurs centres sont faciles à déterminer.

60. L'hyperboloïde ainsi obtenu ne change pas si, au lieu des trois complexes Ω, Ω', Ω'', on en choisit arbitrairement trois autres parmi ceux que représente l'équation

$$\Omega + \mu\Omega' + \nu\Omega'' = 0;$$

mais les congruences varient, ainsi que leurs directrices et les trois diamètres de l'hyperboloïde. Les directrices peuvent être réelles ou imaginaires; par conséquent les trois diamètres coupent l'hyperboloïde ou aucun d'eux ne le rencontre. Dans le cas intermédiaire, où les deux congruences coïncident, le diamètre correspondant se trouve situé sur le cône asymptote de la surface.

61. Réciproquement, étant donnés l'hyperboloïde et trois de ses diamètres, on peut remonter aux congruences d'où il dérive et même aux complexes primitifs. Les génératrices d'un même mode de génération peuvent être considérées comme étant les rayons, tandis que celles de l'autre mode de génération sont les directrices des congruences qui passent par la surface.

62. Il ne sera pas superflu de montrer comment on peut tirer de l'analyse les résultats présentés dans les précédents paragraphes. Pour cela, choisissons, comme devant déterminer la surface réglée, trois complexes de telle nature, que leurs rayons rencontrent leurs axes. Dans ce cas, les axes des trois complexes Ω, Ω', Ω'' sont trois des six directrices, P, Q, R, par exemple, situées dans les plans p, q, r. Prenons ces plans pour plans coordonnés XY, XZ, YZ, les trois complexes qui constituent la surface réglée seront représentés par des équations de la forme

$$(78)\qquad \left\{\begin{aligned} \Omega &\equiv C + D\sigma + E\rho = 0,\\ \Omega' &\equiv B's + D'\sigma + F'(s\rho - r\sigma) = 0,\\ \Omega'' &\equiv A''r + E''\rho + F''(s\rho - r\sigma) = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour arriver à représenter par une seule équation en x, y, z une surface réglée déterminée au moyen de trois équations exprimées en coordonnées radiales, ces coordonnées doivent être éliminées à l'aide des deux équations suivantes :

$$x = rz + \rho,$$
$$y = rz + \sigma,$$

auxquelles il faut joindre l'équation suivante, qui en est la conséquence,

$$sx - ry = s\rho - r\sigma.$$

Dans le cas actuel, commençons par éliminer $s\rho - r\sigma$; il vient

$$(B' + F'x)s - F'yr + D'\sigma = 0,$$
$$(A'' - F''y)r + F''xs + E''\rho = 0;$$

éliminant ensuite ρ et σ, on trouve

$$Ezr + Dzs = C + Dy + Ex,$$
$$(B' + F'x - D'z)s - F'yr + D'y = 0,$$
$$(A'' - F''y - E''z)r + F''xs + E''x = 0.$$

Enfin, portant dans la première de ces équations les valeurs de r et de s tirées des deux dernières, il vient

$$\begin{aligned} &[(B' + F'x - D'z)E'' - F''D'y]Exz \\ &+ [(A'' - F''y - E''z)D' - E''F'x]Dyz \\ &+ [(A'' - F''y - E''z)(B' + F'x - D'z) + F'F''xy](C + Dy + Ex) = 0, \end{aligned}$$

qui donne, par la disparition des termes du troisième ordre,

$$(79)\quad \left\{ \begin{aligned} &A''B'C + A''(B'E + CF')x + B'(A''D - CF'')y \\ &\quad - C(A''D' + E''B')z + A''F'Ex^2 \\ &\quad - B'F''Dy^2 + CE''D'z^2 + (A''F'D - B'F''E)xy \\ &\quad - (A''D'E + CE''F)xy + (CF''D' - B'E''D)yz = 0. \end{aligned} \right.$$

Divisons par $A''B'C$, puis remplaçons respectivement les quantités

$$-\frac{E}{C},\quad -\frac{D}{C},\quad \frac{D'}{B'},\quad -\frac{F'}{B'},\quad \frac{E''}{A''},\quad \frac{F''}{A''}$$

par ξ, η, ζ', ξ', ζ'', η'', la dernière équation prend la forme symétrique

$$(80)\quad \left\{ \begin{aligned} &1 - (\xi + \xi')x - (\eta + \eta')y - (\zeta + \zeta')z \\ &\quad + \xi\xi'x^2 + \eta\eta''y^2 + \zeta'\zeta''z^2 + (\xi'\eta + \xi\eta'')xy \\ &\qquad + (\xi'\zeta'' + \xi\zeta')xz + (\eta\zeta' + \eta''\zeta)yz = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation représente la surface réglée et remplace les trois équations (78) qu'on peut écrire ainsi :

$$(81)\qquad \begin{cases} \eta\sigma + \xi\rho - 1 = 0, \\ \zeta'\sigma - \xi'(s\rho - r\sigma) + 1 = 0, \\ \zeta''\rho - \eta''(s\rho - r\sigma) + 1 = 0. \end{cases}$$

Elle montre que la surface est un hyperboloïde qui touche les trois plans XY, XZ, YZ. Les rayons contenus dans ces plans ont pour équations respectivement

$$(82)\qquad \begin{cases} z = 0, & \xi' x + \eta'' y = 1, \\ y = 0, & \xi x + \zeta'' z = 1, \\ x = 0, & \eta y + \zeta'' z = 1, \end{cases}$$

et les trois directrices qui s'y trouvent également comprises ont pour équations respectives

$$(83)\qquad \begin{cases} z = 0, & \xi x + \eta y = 1, \\ y = 0, & \xi' x + \zeta' z = 1, \\ x = 0, & \eta'' y + \zeta'' z = 1. \end{cases}$$

On obtient aisément les points de contact, qui, dans chaque plan, ne sont autre chose que les points d'intersection du rayon et de la directrice qu'il contient.

63. Telles sont les propriétés principales des complexes du premier ordre. Pour en montrer l'utilité, nous en ferons l'application à la théorie du passage des rayons lumineux dans les cristaux à deux axes; ce sera le sujet de la seconde Partie du présent Mémoire. Mais avant d'aborder cette question, il nous semble utile de reprendre, à un point de vue plus général, l'étude du mode de représentation d'une droite dans l'espace, et celle des complexes, des congruences et des surfaces réglées, qui en est la conséquence. Nous y consacrerons l'Appendice suivant, qui servira à éclaircir quelques points principaux de la théorie générale que nous venons d'exposer.

APPENDICE [*].

I. — *Coordonnées d'une ligne droite.*

1. Une ligne droite, quand on la considère comme un axe autour duquel pivote un plan mobile, est déterminée par deux positions de ce plan; analytiquement, par deux groupes de *coordonnées planaires*. Cette même droite, quand on la regarde comme le lieu géométrique d'un point mobile, est déterminée par deux positions de ce point; analytiquement, par deux groupes de *coordonnées ponctuelles*.

Supposons que les coordonnées planaires et pontuelles

$$\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w} \quad \text{et} \quad \frac{x}{\varpi}, \frac{y}{\varpi}, \frac{z}{\varpi}$$

soient telles, que la relation

$$(1) \qquad tx + uy + vz + w\varpi = 0$$

soit satisfaite, ce qui, géométriquement interprété, signifie que chaque point $\left(\frac{x}{\varpi}, \frac{y}{\varpi}, \frac{z}{\varpi}\right)$ est situé dans chaque plan $\left(\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$, ou, ce qui revient au même, que chaque plan $\left(\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$ passe par chaque point $\left(\frac{x}{\varpi}, \frac{y}{\varpi}, \frac{z}{\varpi}\right)$. J'ai donné ailleurs à ces coordonnées le nom de *coordonnées ponctuelles et planaires associées*, dont je ferai usage dans ce qui va suivre.

Une droite est déterminée par deux couples de coordonnées associées

$$\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w} \quad \text{et} \quad \frac{t'}{w'}, \frac{u'}{w'}, \frac{v'}{w'},$$

ou

$$\frac{x}{\varpi}, \frac{y}{\varpi}, \frac{z}{\varpi} \quad \text{et} \quad \frac{x'}{\varpi'}, \frac{y'}{\varpi'}, \frac{z'}{\varpi'}.$$

Au lieu d'équations ordinaires, on peut employer des équations

---

[*] Communiqué à la Société Royale de Londres le 11 décembre 1865.

homogènes. Chaque groupe de trois coordonnées est alors remplacé par un groupe de quatre coordonnées, savoir :

$$t,\ u,\ v,\ w \quad \text{et} \quad t',\ u',\ v',\ w',$$

ou

$$x,\ y,\ z,\ \varpi \quad \text{et} \quad x',\ y',\ z',\ \varpi'.$$

2. Les deux plans (t, u, v, w) et (t', u', v', w'), représentés en coordonnées ponctuelles par les équations

$$\begin{aligned} tx + uy + vz + w\varpi &= 0,\\ t'x + u'y + v'z + w'\varpi &= 0, \end{aligned}$$

sont pris arbitrairement parmi tous ceux qui passent par une même droite, et peuvent être remplacés par deux autres quelconques, dont les équations auront la forme

$$(t + \mu t')x + (u + \mu u')y + (v + \mu v')z + (w + \mu w')\varpi = 0,$$

μ étant un coefficient arbitraire. Mais la position de la droite, par rapport aux axes coordonnés OX, OY, OZ, n'est liée d'une façon caractéristique avec un tel plan, que si le plan a lui-même une relation particulière avec les axes. Ceci arrive dans quatre cas distincts, savoir : quand le plan passe par l'origine, ou quand il est le plan de projection de la droite sur l'un des trois plans coordonnés. Donc, si l'on pose

$$w + \mu w' = 0, \quad v + \mu v' = 0, \quad u + \mu u' = 0, \quad t + \mu t' = 0,$$

la dernière équation devient successivement

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} (tw' - t'w)\,x + (uw' - u'w)\,y + (vw' - v'w)\,z &= 0,\\ (tv' - t'v)\,x + (uv' - u'v)\,y - (vw' - v'w)\,\varpi &= 0,\\ (tu' - t'u)\,x - (uv' - u'v)\,y - (uw' - u'w)\,\varpi &= 0,\\ -(tu' - t'u)\,x - (tv' - t'v)\,z - (tw' - t'w)\,\varpi &= 0. \end{aligned} \right.$$

Deux quelconques des quatre plans représentés par ces équations suffisent pour fixer la position de la ligne droite. Ces deux équations renferment cinq constantes, qui, par la division, se réduisent à quatre, c'est-à-dire au nombre nécessaire pour déterminer une ligne droite. Outre les cinq constantes contenues dans ces deux équations, il s'en présente une sixième dans les deux équations restantes. Mais comme la ligne droite est entièrement déterminée par les cinq premières, cette sixième constante doit en être une fonction déterminée. L'équation de condition, qui les lie toutes les six ensemble, peut s'obtenir, par exemple, en ajoutant les trois dernières équations, après avoir multiplié la première d'entre elles par $-(tu'-t'u)$, la seconde par $(tv'-t'v)$ et la troisième par $-(uv'-u'v)$, ce qui donne

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&(tu'-t'u)(vw'-v'w)-(tv'-t'v)(uw'-u'w)\\&\qquad\qquad+(uv'-u'v)(tw'-t'w)=0.\end{aligned}\right.$$

Les six constantes suivantes, prises avec le signe qu'on voudra, savoir :

$$\begin{gathered}\pm(uv'-u'v),\quad \pm(tv'-t'v),\quad \pm(tu'-t'u),\\ \pm(tw'-t'w),\quad \pm(uw'-u'w),\quad \pm(vw'-v'w),\end{gathered}$$

peuvent être regardées *comme étant les six coordonnées d'une ligne droite.*

3. Pareillement, si pour fixer la position d'une ligne droite on remplace les deux plans ci-dessus par les deux points (x, y, z, ϖ), (x', y', z', ϖ'), on obtient les équations suivantes en coordonnées planaires :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&(x\varpi'-x'\varpi)t+(y\varpi'-y'\varpi)u+(z\varpi'-z'\varpi)v=0,\\&(xz'-x'z)t+(yz'-y'z)u+(z\varpi'-z'\varpi)w=0,\\&(xy'-x'y)t-(yz'-y'z)v-(y\varpi'-y'\varpi)w=0,\\-&(xy'-x'y)u-(xz'-xz')v-(x\varpi'-x'\varpi)w=0,\end{aligned}\right.$$

lesquelles représentent quatre points, dont l'un est situé à l'infini sur la droite dont il s'agit de déterminer la position, tandis que les trois autres sont ceux où la droite vient rencontrer les plans coordonnés.

En conséquence, par des considérations analogues à celles qui ont été développées plus haut, on peut regarder les six constantes de ces quatre équations, prises avec tel signe qu'on voudra, savoir :

$$\begin{array}{lll} \pm(x\varpi' - x'\varpi), & \pm(y\varpi' - y'\varpi), & \pm(z\varpi' - z'\varpi), \\ \pm(yz' - y'z), & \pm(xz' - x'z), & \pm(xy' - x'y), \end{array}$$

comme *étant les six coordonnées de la ligne droite*. Ces six coordonnées sont liées entre elles par l'équation de condition

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} (xy' - x'y)(z\varpi' - z'\varpi) - (xz' - x'z)(y\varpi' - y'\varpi) \\ \qquad + (yz' - y'z)(x\varpi' - x'\varpi) = 0. \end{array} \right.$$

4. Soient : δ la distance de la droite à l'origine des coordonnées, α, β, γ les angles qu'elle fait avec les trois axes OX, OY, OZ, et λ, μ, ν les angles que fait avec les mêmes axes la normale au plan mené par la droite et par l'origine ; on trouve aisément les relations

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \left\{ \begin{array}{l} (uv' - u'v) : -(tv' - t'v) : (tu' - t'u) \\ : (tw' - t'w) : \quad (uw' - u'w) : (vw' - v'w) \end{array} \right. \\ \text{II.} & \left\{ \begin{array}{l} = (x\varpi' - x'\varpi) : \quad (y\varpi' - y'\varpi) : (z\varpi' - z'\varpi) \\ : (yz' - y'z) : -(xz' - x'z) : (xy' - x'y) \end{array} \right. \\ \text{III.} & \quad = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : \delta\cos\lambda : \delta\cos\mu : \delta\cos\nu. \end{array}$$

5. De là on conclut que

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma, \quad \delta\cos\lambda, \quad \delta\cos\mu, \quad \delta\cos\nu$$

peuvent aussi être regardées comme les *coordonnées d'une droite* liées entre elles par l'équation de condition

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$

qui, jointe aux deux suivantes,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

réduit à quatre le nombre des constantes desquelles dépend la position de la ligne droite.

6. Les deux suites de rapports I et II conservent la même généralité, si l'on y pose

$$w = w' = \pm 1, \quad \varpi = \varpi' = \pm 1.$$

Supposons, en outre, que les deux plans et les deux points par lesquels la droite est déterminée coïncident ou soient infiniment voisins, on obtient, en choisissant les signes inférieurs, les deux suites de rapports égaux :

$$\text{IV.} \qquad = (udv - vdu) : -(tdv - vdt) : (tdu - udt) : dt : du : dv$$

$$\text{V.} \qquad = dx : dy : dz : (ydz - zdy) : (xdz - zdx) : (xdy - ydx).$$

Ce sont deux systèmes de coordonnées différentielles, dx, dy, dz indiquant la direction de la droite, dt, du, dv la direction de la normale au plan qui passe par cette droite et par l'origine des coordonnées. Les variables x, y, z, t, u, v peuvent être regardées comme étant des fonctions du temps.

7. On peut représenter la direction d'une *force* par une droite, et son intensité par la distance de deux points servant à fixer la position de cette droite. Appelant X, Y, Z les projections de la force sur les axes OX, OY, OZ, et désignant par L, M, N les projections de son moment relatif à l'origine sur les plans YZ, XZ, XY, on obtient cette nouvelle suite de rapports égaux :

$$\text{VI.} \qquad = \mathrm{X} : \mathrm{Y} : \mathrm{Z} : \mathrm{L} : \mathrm{M} : \mathrm{N}.$$

On peut donc regarder X, Y, Z, L, M, N comme étant les coordonnées d'une droite liées entre elles par l'équation de condition

$$(6) \qquad \mathrm{XL} + \mathrm{YM} + \mathrm{ZN} = 0.$$

8. Les six coordonnées de chacun des systèmes précités se partagent en deux groupes de trois, de telle sorte qu'à chaque coordonnée de l'un des groupes il correspond une coordonnée de l'autre groupe. Si l'on change les axes, les deux groupes restent les mêmes; mais les trois couples de coordonnées correspondantes varient.

Quand on connaît les six coordonnées d'une ligne droite, on obtient les cinq coordonnées absolues, en divisant cinq d'entre elles par la sixième. Il se présente donc deux cas distincts, selon que la coordonnée par laquelle on divise les autres appartient au premier ou au second groupe.

9. Divisons les deux premiers et les trois derniers termes des rapports I par le troisième $(tu' - t'u)$, et posons

$$\frac{uv' - u'v}{tu' - t'u} = r, \quad -\frac{tv' - t'v}{tu' - t'u} = s, \quad \frac{tw' - t'w}{tu' - t'u} = -\sigma,$$
$$\frac{uw' - u'w}{tu' - t'u} = \rho, \quad \frac{vw' - v'w}{tu' - t'u} = \eta,$$

il vient, en vertu de l'équation de condition (3),

$$\eta = r\sigma - s\rho;$$

r, s, $(-\sigma)$, ρ et η sont les *cinq* coordonnées absolues de la ligne droite. Les deux dernières des quatres équations (2), qui représentent les plans par lesquels la droite est projetée sur les plans XZ et YZ, aussi bien que ses projections mêmes, peuvent donc s'écrire comme il suit :

$$x = rz + \rho,$$
$$y = sz + \sigma,$$

r et s étant les tangentes trigonométriques des angles formés par les deux projections avec l'axe OZ, ρ et σ et les segments interceptés par elles sur les axes OX et OY.

De même, si l'on divise les cinq premiers rapports de la suite II par le sixième $(xy' - x'y)$ et qu'on pose

$$\frac{x\varpi' - x'\varpi}{xy' - x'y} = -\varkappa, \quad \frac{y\varpi' - y'\varpi}{xy' - x'y} = \pi, \quad \frac{z\varpi' - z'\varpi}{xy' - x'y} = \zeta,$$
$$\frac{yz' - y'z}{xy' - x'y} = p, \quad -\frac{x'z - x'z}{xy' - x'y} = q,$$

on a, à cause de l'équation (5),

$$\zeta = p\varkappa - q\pi,$$

et p, q, $(-\varkappa)$, π et ζ sont les *cinq* nouvelles coordonnées. Quatre d'entre elles se rencontrent dans les deux dernières des quatre équations (4), et représentent les deux points d'intersection de la ligne droite par les plans XZ et YZ. Ces équations prennent la forme suivante :

$$t = pv + \pi w,$$
$$u = qv + \varkappa w,$$

et peuvent, en désignant les coordonnées des deux points, dans les deux plans respectivement, par x_y, z_y et y_x, z_x, s'écrire ainsi :

$$x_y t + z_y v + w = 0,$$
$$y_x u + z_x v + w = 0,$$

à cause de

$$p = -\frac{z_y}{x_y}, \quad \pi = -\frac{1}{x_y}, \quad q = -\frac{z_x}{y_x}, \quad \varkappa = -\frac{1}{y_x}.$$

Ajoutons encore aux séries précédentes de rapports égaux les deux suivantes :

VII. $\qquad = r : s : 1 : (-\sigma) : \rho : \eta\, (\equiv r\sigma - s\rho).$

VIII. $\qquad = -\varkappa : \pi : \zeta\, (\equiv p\varkappa - q\pi) : p : q : 1.$

10. On obtient ainsi huit systèmes différents de coordonnées de la ligne droite, les coordonnées étant les six termes de chacune des huit suites de rapports égaux I à VIII. Ces coordonnées changent avec la position de l'origine et la direction des axes. Il est inutile de transcrire ici les formules relatives à cette transformation, et il suffit de dire qu'elles se transportent sans difficulté d'un système à l'autre.

II. — *Complexes. Congruences. Surfaces engendrées par une droite mobile. Surfaces développables et courbes à double courbure.*

11. Nous dirons qu'une équation homogène entre six coordonnées d'une droite représente un *complexe* formé par toutes les droites dont les coordonnées satisfont à l'équation proposée. A cause de l'identité des rapports I à VIII, les équations ci-après :

$$F[(uv' - u'v),\ -(tv' - t'v),\ (tu' - t'u),$$
$$(tw' - t'w),\ (uw' - u'w),\ (vw' - v'w)] = 0,$$
$$F[(x\varpi' - x'\varpi),\ (y\varpi' - y'\varpi),\ (z\varpi' - z'\varpi),$$
$$(yz' - y'z),\ -(xz' - x'z),\ (xy' - x'y)] = 0,$$
$$F[\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma,\ \delta\cos\lambda,\ \delta\cos\mu,\ \delta\cos\nu] = 0,$$
$$F[(udv - vdu),\ -(tdv - vdt),\ (tdu - udt),\ dt,\ du,\ dv] = 0,$$
$$F[dx, dy, dz,\ (ydz - zdy),\ -(xdz - zdx),\ (xdy - ydx)] = 0,$$
$$F[X, Y, Z, L, M, N] = 0,$$
$$F[r, s, 1, (-\sigma), \rho, \eta] = 0,$$
$$F[(-\varkappa), \pi, \zeta, p, q, 1] = 0,$$

représentent le même complexe, F étant supposé indiquer, dans chacune d'elles, la même fonction homogène des différents groupes de coordonnées de la droite. Si l'équation est du degré n, nous dirons que le complexe est du degré n, et nous le représenterons par la lettre Ω_n.

12. Prenons d'abord la première équation

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \Omega_n \equiv F[&(uv' - u'v),\ -(tv' - t'v),\ (tu' - t'u),\\ &(tw' - t'w),\ (uw' - u'w),\ (vw' - v'w)] = 0.\end{aligned}\right.$$

t, u, v, w et t', u', v', w' doivent se rapporter à deux plans passant par une droite quelconque du complexe. Supposons que l'un de ces deux plans (t', u', v', w') soit donné. Alors l'équation précédente, dans laquelle on regardera t', u', v', w' comme constants et t, u, v, w comme variables, représente, dans le plan donné, une *courbe* enveloppée par les plans tangents (t, u, v, w). Les droites du complexe, contenues dans ce plan, enveloppent aussi la même courbe, dont la *classe* est la même que le degré du complexe. Donc :

Un complexe Ω_n du degré n étant donné, il existe dans un plan *quelconque une courbe de la classe n qui est enveloppée par les droites du complexe situées dans ce plan.*

Les équations de ces courbes concordent exactement avec celle du complexe lui-même. Il suffit de regarder dans celle-ci t', u', v', w' comme des constantes relatives au plan donné, tandis que t, u, v, w y sont regardées comme les coordonnées d'un plan variable.

Si $n=1$, la courbe contenue dans chaque plan devient un point, et toute droite menée par le point dans ce plan fait partie du complexe linéaire.

Si $n=2$, les courbes enveloppées sont des coniques qui peuvent dégénérer en deux points réels ou imaginaires.

13. Prenons actuellement la seconde équation du complexe, savoir :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda\Omega_n = [&(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),\\ &-(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)] = 0, \end{aligned}\right.$$

où nous supposons $\varpi'=\varpi=1$, et où λ désigne une constante. Si l'on rapporte x', y', z' à un point fixe de l'espace, et par conséquent si l'on regarde ces quantités comme des constantes, tandis que x, y, z sont les coordonnées variables des points d'une droite quelconque du complexe, cette équation représentera un cône du n^{ieme} ordre, lieu géométrique des droites du complexe qui passent par le point donné. Donc :

Un complexe du degré n étant donné, chaque point de l'espace est le sommet d'un cône du $n^{ième}$ ordre, où convergent les droites du complexe.

Dans les complexes linéaires, les droites concourantes en un même point forment un plan. Si $n=2$, les cônes sont du second ordre, et peuvent dégénérer en deux plans réels ou imaginaires.

14. Les droites qui composent un complexe Ω_n peuvent être distribuées de deux manières distinctes, soit en considérant les plans qui les contiennent, soit en considérant les points où elles convergent. Jusqu'ici nous avons regardé Ω_n comme étant un *complexe de lignes droites*, dont le nombre est ∞^3. Mais on peut tout aussi bien le regarder comme étant un complexe de courbes, ou comme étant un complexe de cônes, le nombre des courbes et celui des cônes étant ∞^2. Nous dirons donc que

$$\Omega_n$$

représente à la fois une courbe de la classe n dans chaque plan de l'espace, et un cône du degré n ayant son sommet en chaque point de l'espace.

Quand un plan tourne autour d'une droite donnée, ou se meut parallèlement à lui-même, la courbe de la $n^{ième}$ classe située dans ce plan engendre une surface. De même, si le sommet du cône décrit une droite, ce cône enveloppe une surface. Le nombre des surfaces, ainsi engendrées par les courbes et enveloppées par les cônes, est ∞. A toute droite donnée, il correspond une même surface engendrée de ces deux manières; donc, pour obtenir toutes les surfaces, il suffit de faire tourner une droite dans tous les sens possibles autour d'un de ses points. Et par conséquent, on peut regarder Ω_n comme étant un complexe de surfaces à la fois décrites par une courbe mobile de la classe n, dont le plan passe par une droite donnée arbitrairement, et enveloppées par un cône du degré n, dont le sommet variable est situé sur cette même droite.

15. Soit μ un coefficient variable, l'équation

$$\Omega_n + \mu\Omega_m = 0 \tag{3}$$

représente un nombre infini de complexes. Les droites communes à deux d'entre eux sont communes à tous. Toutes ces droites forment une *congruence* (Ω_n, Ω_m) représentée par le système des équations des deux complexes.

Chaque plan de l'espace contient une courbe de chacun des deux complexes; les mn tangentes communes à ces deux courbes appartiennent à la congruence. Toutes les courbes appartenant aux différents complexes (3) et situées dans le même plan touchent ces mêmes mn droites. De même, chaque point de l'espace est le sommet d'un cône appartenant à l'un des complexes (3). Tous ces cônes se coupent suivant les mêmes mn arêtes, qui sont des droites faisant partie de la congruence. Donc :

Une congruence (Ω_n, Ω_m) *a toujours mn droites situées dans un plan quelconque et mn droites passant par un point quelconque.*

Le nombre des droites qui forment une congruence est ∞^2. Si $m = 1$, il existe dans chaque plan n droites de la congruence (Ω_n, Ω_1) passant par un même point, et de même, parmi les droites qui concourent en un même point, il y en a n qui sont situées dans un même plan; ce point et ce plan se correspondent l'un à l'autre.

16. Soient μ et ν deux coefficients arbitraires.

$$\Omega \equiv \Omega' + \mu\Omega'' + \nu\Omega''' = 0 \tag{4}$$

représente un nombre infini (∞^2) de complexes qui se coupent tous suivant les droites appartenant simultanément à trois d'entre eux, par exemple à ceux-ci

$$\Omega' = 0, \quad \Omega'' = 0, \quad \Omega''' = 0. \tag{5}$$

La position d'une de ces droites est déterminée par les équations (5), pourvu qu'on prenne arbitrairement la valeur d'une des quatre constantes desquelles dépend en général la position d'une droite; en d'autres termes, trois de ces quatre constantes sont des fonctions de la quatrième qui varient infiniment peu, si les variations de celle-ci sont elles-mêmes infiniment petites. On conclut de là que toute droite, dont les coordonnées satisfont aux équations (5), engendre une surface en passant successivement par toutes les positions qu'elle peut prendre. Nous dirons que cette surface $(\Omega', \Omega'', \Omega''')$ représente le système des trois équations (5).

17. Un point de l'espace étant donné, il y a trois cônes formés par les droites qui passent par ce point et qui appartiennent respectivement aux trois complexes (5). En général, ces trois cônes ne se coupent pas suivant une même arête; mais il y a certaines positions du point, qui est leur sommet commun, pour lesquelles cette circonstance se présente. Dans ce cas, l'arête commune aux trois cônes appartient à la surface $(\Omega', \Omega'', \Omega''')$, et par conséquent le point donné en fait aussi partie. Posons

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\lambda'\Omega' \equiv \mathrm{F}'[(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),&\\
-(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)] &= 0,\\
\lambda''\Omega'' \equiv \mathrm{F}''[(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),&\\
-(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)] &= 0,\\
\lambda'''\Omega''' \equiv \mathrm{F}'''[(x-x'),\ (y-y'),\ (z-z'),\ (yz'-y'z),&\\
-(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)] &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Supposons que x', y', z' soient les coordonnées d'un point fixe arbitraire, x, y, z celles d'un point variable. Les équations (6) sont celles de trois cônes, dont les génératrices appartiennent aux trois complexes (5), et qui ont le point x', y', z' pour sommet commun. Si l'on transporte en ce point l'origine des coordonnées, leurs équations deviennent

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{F}'[x, y, z,\ (yz'-y'z), -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)] &= 0,\\
\mathrm{F}''[x, y, z,\ (yz'-y'z), -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)] &= 0,\\
\mathrm{F}'''[x, y, z,\ (yz'-y'z), -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y)] &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations étant homogènes par rapport à x, y, z ne sont pas satisfaites, en général, par les trois variables. Pour exprimer qu'elles subsistent simultanément, éliminons x, y, z : il vient

$$
(8)\qquad \varphi(x', y', z') = 0,
$$

φ désignant une fonction dans laquelle se trouvent impliquées les constantes primitives des trois complexes (5). Cette équation peut être rendue homogène en y introduisant la variable ϖ'. Si l'on y regarde les coordonnées comme variables, elle représente, en coordonnées ponctuelles, la surface qui, dans le même système de coordonnées, est exprimée par les trois équations (5).

18. Semblablement, dans chaque plan de l'espace se trouvent trois courbes enveloppées par les droites des complexes Ω', Ω'', Ω'''. En général, ces trois courbes n'ont pas de tangente commune ; mais ce cas se présente pour certaines positions du plan, et la tangente commune appartient alors à la surface $(\Omega', \Omega'', \Omega''')$. Réciproquement, si si l'on fait passer un plan par l'une des génératrices de cette surface, les courbes enveloppées par les droites d'un des complexes touchent cette génératrice, et continuent à lui être tangentes quand le plan tourne autour de la génératrice. Ce plan est tangent à la surface dans chacune de ses positions. Posons

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega' &\equiv F'[(uv'-u'v),\ -(tv'-t'v),\ (tu'-t'u),\\ &\qquad (t-t'),\ (u-u'),\ (v-v')] = 0,\\ \Omega'' &\equiv F''[(uv'-u'v),\ -(tv'-t'v),\ (tu'-t'u),\\ &\qquad (t-t'),\ (u-u'),\ (v-v')] = 0,\\ \Omega''' &\equiv F'''[(uv'-u'v),\ -(tv'-t'v),\ (tu'-t'u),\\ &\qquad (t-t'),\ (u-u'),\ (v-v')] = 0. \end{aligned}\right.$$

Si t, u, v sont les coordonnées planaires variables, et t', u', v' celles d'un plan fixe, ces équations sont celles des trois courbes enveloppées dans ce plan par les trois complexes Ω', Ω'', Ω'''. A cause de cela, elles peuvent être réduites à ne contenir que deux variables, et par conséquent elles ne sont généralement pas satisfaites par les mêmes valeurs des trois variables ainsi réduites à deux. L'élimination des variables entre les équations (9) conduit à une équation telle que

$$(10)\qquad \psi(t', u', v') = 0,$$

qui, en regardant t', u', v' comme variables, représente en coordonnées planaires la surface $(\Omega', \Omega'', \Omega''')$.

19. Les équations (9) représentent la même surface que les équations (6); montrons comment on peut, en effet, passer des unes aux autres. On passe d'abord des équations (6) aux trois suivantes :

$$\begin{aligned} &F'[(yz'-y'z),\ -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y),\\ &\qquad (x-x'),\ (y-y'),\ (z-z')] = 0,\\ &F''[(yz'-y'z),\ -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y),\\ &\qquad (x-x'),\ (y-y'),\ (z-z')] = 0,\\ &F'''[(yz'-y'z),\ -(xz'-x'z),\ (xy'-x'y),\\ &\qquad (x-x'),\ (y-y'),\ (z-z')] = 0. \end{aligned}$$

On remplace ensuite x, y, z, x', y', z' par t, u, v, t', u', v'; ce qui aboutit au même résultat que si l'on eût simplement échangé l'un dans l'autre les coefficients constants dans chacune des trois équations (6). D'après cela, si l'on remarque que l'équation (10) est dérivée de (9) par des opérations algébriques identiques à celles qui ont servi à tirer l'équation (8) de (7), on peut en conclure que l'équation (10) peut être dérivée de (8) par une simple permutation des constantes et par la substitution des coordonnées planaires aux coordonnées ponctuelles.

20. Dans une congruence (Ω_n, Ω_m), il y a mn droites concourantes en un point donné. Deux, trois, quatre de ces lignes peuvent coïncider. Dans ce cas, les cônes des deux complexes Ω_n, Ω_m qui ont leur sommet commun au point donné sont tangents ou osculateurs l'un à l'autre, le long de la droite double ou multiple dont il s'agit. Pour obtenir l'expression analytique de ces nouvelles conditions, transportons, comme nous l'avons fait plus haut, l'origine au sommet de deux cônes, et posons

$$\frac{x}{z} = p, \quad \frac{y}{z} = q,$$

les équations des deux cônes peuvent s'écrire ainsi (**17**) :

$$(11) \qquad \begin{cases} f\,(p, q, x', y', z') = 0, \\ f'(p, q, x', y', z') = 0, \end{cases}$$

f et f' représentant deux fonctions des variables p et q, par lesquelles les arêtes des deux cônes sont déterminées, x', y', z' étant les coordonnées du point donné. Si deux des arêtes communes aux deux cônes coïncident suivant une droite (p, q), on a, pour déterminer cette droite, non-seulement les deux équations (11), mais encore la suivante :

$$\frac{df}{dq} : \frac{df}{dp} = \frac{df'}{dq} : \frac{df'}{dp},$$

qui, développée, prend la forme

$$(12) \qquad f''(p, q, x', y', z') = 0,$$

f'' désignant une nouvelle fonction. Éliminant p et q entre les trois équations (11) et (12), on parvient à une équation de la forme

$$(13)\qquad \psi(x', y', z') = 0,$$

qui représente, x', y' et z' étant des variables, une *surface développable*, lieu des points par où passent les lignes doubles de la congruence, ou, en d'autres termes, lieu de ces droites elles-mêmes.

Si trois arêtes des deux cônes (11) coïncident selon une même droite (p, q), on a une nouvelle équation de condition, savoir :

$$\frac{\frac{d^2f}{dp^2}\left(\frac{df}{dq}\right)^2 - 2\frac{d^2f}{dp\,dq}\cdot\frac{df}{dq}\cdot\frac{df}{dp} + \frac{d^2f}{dq^2}\left(\frac{df}{dp}\right)^2}{\frac{d^2f'}{dp^2}\left(\frac{df'}{dq}\right)^2 - 2\frac{d^2f'}{dp\,dq}\cdot\frac{df'}{dq}\cdot\frac{df'}{dp} + \frac{d^2f'}{dq^2}\left(\frac{df'}{dp}\right)^2} = \frac{\left(\frac{df}{dp}\right)^3}{\left(\frac{df'}{dp}\right)^3} = \frac{\left(\frac{df}{dq}\right)^3}{\left(\frac{df'}{dq}\right)^3},$$

qu'on peut aussi développer en une équation de la forme

$$(14)\qquad f'''(p, q, x', y', z') = 0.$$

Cette équation, combinée avec les trois premières (11) et (12), fournit une nouvelle équation de condition

$$(15)\qquad \psi'(x', y', z') = 0.$$

Le système des deux équations (13) et (15) donne, pour le lieu des points par où passent les *lignes triples* de la congruence, une *courbe à double courbure*.

En continuant de la même manière, on obtient une nouvelle équation de la même forme que (13) et (15) qui, combinée avec ces deux-ci, fait connaître les points, en nombre limité, par lesquels passent les lignes quadruples de la congruence.

Quant aux droites quintuples, elles ne se rencontrent que dans les congruences d'une espèce particulière.

21. On peut déterminer d'une manière analogue la position des plans dans lesquels deux, trois, quatre des mn lignes de la congruence (Ω_n, Ω_m) qui s'y trouvent, coïncident. Dans ce cas, les deux courbes contenues dans ce plan, et qui y sont enveloppées par les droites des complexes Ω_n et Ω_m, se touchent ou s'osculent suivant une de ces mn droites.

En opérant sur les deux premières des équations (9) comme nous l'avons fait sur les deux premières équations (6), nous aurons, pour représenter en coordonnées planaires le lieu enveloppé par les plans qui contiennent une ligne double de la congruence, l'équation suivante :

$$\psi(t, u, v) = 0, \tag{16}$$

qui, selon les remarques du n° **19** également applicables ici, dérive de (10) par un simple changement des constantes. Tout plan passant par une ligne droite double étant un plan tangent de la surface enveloppe, cette surface dégénère en *une courbe à double courbure*.

On peut ensuite, de la même manière, déduire une autre équation de l'équation (15), que nous désignerons par

$$\psi'(t, u, v) = 0. \tag{17}$$

Le système des deux équations (16) et (17) représente une *surface développable*, dont les plans tangents contiennent les droites triples de la congruence. Enfin, il existe certains plans, en nombre limité, qui contiennent des droites quadruples. Ces plans, aussi bien que les points de la courbe à double courbure par lesquels passent les droites quadruples, sont déterminés par des coordonnées planaires et ponctuelles associées, qui sont des fonctions des constantes de la congruence, et qui dérivent l'une de l'autre par une simple permutation de ces constantes, ainsi qu'on l'a déjà dit plus haut.

22. Les lignes doubles d'une congruence forment une surface, dégénérée en une surface développable, de même qu'elles enveloppent une surface dégénérée en une courbe à double courbure. La surface développable est représentée, en coordonnées ponctuelles, par une seule équation (13); en coordonnées planaires, par le système des deux équations (16) et (17). La courbe à double courbure est représentée, en coordonnées planaires, par une seule équation (16), et, en coordonnées ponctuelles, par le système des deux équations (13) et (15). Les plans tangents de la surface qui contiennent les droites triples de la congruence sont osculateurs de la courbe; les points de la courbe par où passent ces droites triples sont des *points osculateurs* de la surface, par où passent trois de ses tangents consécutifs. Aux points d'inflexion de la courbe, le plan osculateur a quatre points consécutifs communs avec elle. Par chacun de ces points passent quatre plans tangents consécutifs de la surface, et l'intersection commune de ces plans est une ligne d'inflexion de la surface développable. Les droites quadruples de la congruence passent par ces points et sont contenues dans ces plans

III. — *Sur un nouveau système de coordonnées.*

23. Jusqu'ici nous avons déterminé la position d'une droite dans l'espace en faisant usage du système ordinaire des trois axes coordonnés OX, OY, OZ qui se coupent mutuellement. Mais on peut se demander s'il ne serait pas possible de fixer immédiatement la position d'une droite dans l'espace, sans recourir à l'intermédiaire des points et des plans.

Dans le système ordinaire des coordonnées : 1° la position d'un point est déterminée au moyen de trois plans parallèles aux plans coordonnés et qui se coupent en ce point; 2° la position d'un plan est donnée par une équation linéaire entre les trois coordonnées d'un point regardé comme variable; le point et le plan dépendent l'un et l'autre de trois constantes.

D'une manière analogue, une droite est déterminée par l'intersection de quatre complexes linéaires. Un complexe linéaire dépend de la position de son axe, et, en outre, d'une constante. Une droite, considérée comme étant une *force*, appartient au complexe, si le moment de rotation de la force par rapport à l'axe, divisé par sa projection sur l'axe, est égal à une constante. Donc, étant donnés quatre axes dans l'espace, la position d'une droite est fixée par quatre constantes qu'on obtient en divisant ses quatre moments de rotation relatifs aux quatre axes par ses quatre projections sur ces axes respectivement.

Les quatre axes des complexes constituent un nouveau système de coordonnées, et les quatre constantes dont il vient d'être question sont les quatre coordonnées d'une ligne droite. La droite qui coupe les quatre axes est l'origine des coordonnées, puisque ses quatre coordonnées sont nulles.

Dans ce nouveau système, une ligne droite est déterminée de la manière la plus générale par ses quatre coordonnées; mais une équation entre les quatre coordonnées n'est généralement pas suffisante pour représenter un complexe linéaire, puisqu'il dépend de cinq constantes.

On peut augmenter *ad libitum* le nombre des coordonnées d'une ligne droite.

24. Soient P, Q, R, S, T, U,... les axes de plusieurs complexes, et p, q, r, s, t, u,... les coordonnées correspondantes d'une ligne droite (23). Soient aussi

$$\Omega_p \equiv U_p - p = 0, \quad \Omega_q \equiv U_q - q = 0, \quad \Omega_r \equiv U_r - r = 0,$$
$$\Omega_s \equiv U_s - s = 0, \quad \Omega_t \equiv U_t - t = 0, \quad \Omega_u \equiv U_u - u = 0, \ldots,$$

les équations des complexes. Pour exprimer que ces complexes se coupent suivant une même ligne droite, nous aurons les équations de condition suivantes :

$$(18) \qquad \begin{cases} \Omega_t \equiv \varkappa\Omega_p + \lambda\Omega_q + \mu\Omega_r + \nu\Omega_s, \\ \Omega_u \equiv \varkappa'\Omega_p + \lambda'\Omega_q + \mu'\Omega_r + \nu'\Omega_s, \end{cases}$$

où nous pouvons supposer que P, Q, R, S sont les quatre premiers axes coordonnés ; $\varkappa, \varkappa', \lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ étant des coefficients constants.

Si l'on fait les coordonnées $p, q, r, s, t, u, \ldots$ égales à zéro, les équations générales des complexes deviennent

$$U_p = 0, \quad U_q = 0, \quad U_r = 0, \quad U_s = 0, \quad U_t = 0, \quad U_u = 0.$$

Ces nouvelles équations représentent des complexes d'une espèce particulière telle, que leurs axes sont rencontrés par les droites qui les composent; on peut dire qu'ils représentent ces axes eux-mêmes.

Pour satisfaire aux équations (18), posons

$$(19) \qquad \begin{cases} U_t \equiv \varkappa U_p + \lambda U_q + \mu U_r + \nu U_s, \\ U_u \equiv \varkappa' U_p + \lambda' U_q + \mu' U_r + \nu' U_s, \end{cases}$$

d'où l'on conclut

$$(20) \qquad \begin{cases} t = \varkappa p + \lambda q + \mu r + \nu s. \\ u = \varkappa' p + \lambda' q + \mu' r + \nu' s. \end{cases}$$

Les équations (19) exigent que l'*origine*, rencontrée par les axes P, Q, R, S, le soit aussi par les nouveaux axes T, U,....

Donc $p, q, r, s, t, u, \ldots$ peuvent être regardées comme étant les coordonnées d'une droite suivant laquelle tous les complexes se rencontrent, les axes de ces complexes qui coupent une même droite étant les axes coordonnés. Une droite est complétement déterminée par les quatre premières de ces coordonnées; les autres ont avec ces quatre-là des dépendances exprimées par les équations linéaires (20).

Le système de quatre axes coordonnés dépend de 16 constantes, celui de cinq axes dépend de 19 constantes, celui de six axes dépend de 22 constantes.

Avec un tel système de coordonnées, qui permet de fixer la position d'une droite dans l'espace indépendamment des points et des plans, on peut, en regardant les lignes droites comme les éléments constitutifs de l'espace, refaire toute la Géométrie sans avoir besoin de recourir au système ordinaire. L'analogie nous porte à croire que cette tâche serait féconde; mais on ne peut se dissimuler qu'elle serait aussi très-laborieuse.