JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CHARLES BRIOT

Mémoire sur la réflexion et la réfraction cristallines

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 12 (1867), p. 185-204.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1867_2_12__185_0>

MÉMOIRE

SUR

LA RÉFLEXION ET LA RÉFRACTION CRISTALLINES;

PAR M. CHARLES **BRIOT**.

I.

1. Dans un Mémoire précédent (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XI, p. 305), j'ai exposé une méthode qui permet de traiter le problème de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface de séparation de deux milieux quelconques, et je l'ai appliquée au cas de deux milieux isotropes. Je me propose maintenant de l'appliquer au cas où le premier milieu est isotrope, le second biréfringent.

La méthode repose sur une extension du principe de continuité. Ce principe consiste en ce que, non-seulement les trois composantes du mouvement vibratoire, dans l'un et l'autre milieu, sont respectivement égales en chaque point de la surface de séparation, mais encore leurs dérivées premières par rapport à une coordonnée perpendiculaire à cette surface.

2. Prenons pour origine des coordonnées un point O de la surface de séparation que nous supposons plane, pour axe des x une perpendiculaire à ce plan dans le second milieu, pour axes des y et des z deux droites rectangulaires dans ce plan, la première étant située dans le plan d'incidence. Nous avons vu que l'onde incidente donne naissance dans le premier milieu, qui est isotrope, à deux ondes réfléchies, l'une transversale, l'autre longitudinale, de sorte que l'état vibratoire de ce milieu est représenté par les formules

$$(1)\quad \begin{cases} \xi = \mathrm{A}e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{A}_1 e^{(-\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + ae^{(-\mathrm{u}_1 x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \\ \eta = \mathrm{B}e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{B}_1 e^{(-\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + be^{(-\mathrm{u}_1 x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \\ \zeta = \mathrm{C}e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{C}_1 e^{(-\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \end{cases}$$

réduites à leurs parties réelles et auxquelles il faut joindre les relations

$$\mathrm{Au} + \mathrm{Bv} = 0, \quad -\mathrm{A}_1\mathrm{u} + \mathrm{Bv} = 0, \quad \frac{a}{-\mathrm{u}_1} + \frac{b}{\mathrm{v}}.$$

3. Il est aisé de voir que l'onde incidente produit dans le second milieu, qui n'est plus isotrope, trois ondes refractées, deux transversales, une longitudinale. Reprenons en effet le raisonnement que nous avons fait pour établir le principe de continuité, ou de l'accord des vibrations à la surface de séparation. Le mouvement vibratoire dans l'un et l'autre milieu est représenté par une somme de mouvements simples, tels que

$$\xi = \mathrm{A}e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\eta = \mathrm{B}e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\zeta = \mathrm{C}e^{ux+vy+wz-st},$$

caractérisés chacun par une exponentielle de la forme

$$e^{ux+vy+wz-st}.$$

L'accord des vibrations en chaque point de la surface de séparation exige que les trois constantes v, w, s aient les mêmes valeurs, $v = \mathrm{v}i$, $w = 0$, $s = \mathrm{s}i$, celles qui se rapportent à l'onde incidente, dans toutes les exponentielles qui ne différeront ainsi que par la constante u. On peut donc représenter le mouvement vibratoire dans chaque milieu par les formules

$$\xi = \xi_1 e^{vy+wz-st}, \quad \eta = \eta_1 e^{vy+wz-st}, \quad \zeta = \zeta_1 e^{vy+wz-st},$$

dans lesquelles ξ_1, η_1, ζ_1 sont des fonctions de la seule variable x.

Quand on néglige la dispersion, les équations différentielles du mouvement vibratoire sont des équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du second ordre des trois fonctions ξ, η, ζ des quatre variables indépendantes x, y, z, t. Dans la question proposée, ces équations se réduisent à six équations homogènes du premier ordre de la forme

$$\frac{d\xi_1}{dx} = \xi'_1, \quad \frac{d\eta_1}{dx} = \eta'_1, \quad \frac{d\zeta_1}{dx} = \zeta'_1,$$

$$\frac{d\xi'_1}{dx} = \mathcal{L}\xi_1 + \mathcal{M}\eta_1 + \mathcal{N}\zeta_1 + \mathcal{P}\xi'_1 + \mathcal{Q}\eta'_1 + \mathcal{R}\zeta'_1,$$

$$\frac{d\eta'_1}{dx} = \mathcal{L}'\xi_1 + \mathcal{M}'\eta_1 + \mathcal{N}'\zeta_1 + \mathcal{P}'\xi'_1 + \mathcal{Q}'\eta'_1 + \mathcal{R}'\zeta'_1,$$

$$\frac{d\zeta'_1}{dx} = \mathcal{L}''\xi_1 + \mathcal{M}''\eta_1 + \mathcal{N}''\zeta_1 + \mathcal{P}''\xi'_1 + \mathcal{Q}''\eta'_1 + \mathcal{R}''\zeta'_1.$$

Les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$,... sont des constantes dans l'un et l'autre milieu ; mais ils changent rapidement, tout en conservant des valeurs finies, quand on passe d'un milieu à l'autre. Il en résulte d'abord, comme nous l'avons dit, que les quantités ξ'_1, η'_1, ζ'_1 n'éprouvent que des variations très-petites, quand x varie de $-x'$ à $+x'$, x' étant une quantité très-petite, et à plus forte raison les quantités ξ_1, η_1, ζ_1. C'est en cela que consiste l'accord des vibrations à la surface de séparation des deux milieux, avec l'extension que nous lui avons donnée.

Pour intégrer chacun de ces systèmes d'équations différentielles, on posera

$$\xi_1 = \mathrm{A}e^{ux}, \qquad \eta_1 = \mathrm{B}e^{ux}. \qquad \zeta_1 = \mathrm{C}e^{ux},$$
$$\xi'_1 = u\mathrm{A}e^{ux}, \quad \eta'_1 = u\mathrm{B}e^{ux}, \quad \zeta'_1 = u\mathrm{C}e^{ux};$$

la constante u sera assujettie à vérifier une équation du sixième degré ; les racines de cette équation fourniront six intégrales simples, dont la somme constituera l'intégrale générale.

4. Lorsque le milieu est isotrope, l'équation du sixième degré en u se réduit à une équation du troisième degré en u^2 ayant une racine double et une racine simple ; pour préciser le raisonnement, nous supposerons ces deux racines négatives ; à la racine double correspond une vibration transversale, à la racine simple une vibration longitudinale (I^{er} Mémoire, 7). Un milieu homoédrique quelconque différant peu d'un certain milieu isotrope, qui représente en quelque sorte sa constitution moyenne, l'équation du sixième degré en u admettra deux racines peu différentes, de la forme $\mathrm{u}'i$, $\mathrm{u}''i$, u' et u'' étant des quantités

positives, deux autres aussi peu différentes de la forme $-\mathrm{u}'''i$, $-\mathrm{u}^{\mathrm{IV}}i$, les deux quantités positives u''' et u^{IV} différant peu de u' et u'', et enfin deux racines telles que $\mathrm{u}'_1 i$ et $-\mathrm{u}''_1 i$, les deux quantités positives u'_1 et u''_1 différant peu l'une de l'autre. Aux quatre premières racines correspondent des vibrations transversales ou quasi-transversales rectilignes, aux deux autres des vibrations quasi-longitudinales. La coordonnée x étant positive dans le second milieu, on ne prendra que les trois racines $\mathrm{u}'i$, $\mathrm{u}''i$, $\mathrm{u}'_1 i$ qui fournissent des ondes planes s'éloignant du plan de séparation. Ainsi l'onde incidente peut donner naissance dans le second milieu à trois ondes réfractées, deux transversales ou quasi-transversales, et une quasi-logitudinale, de sorte que l'état vibratoire de ce milieu sera représenté par les formules

$$(2)\quad \begin{cases} \xi = \mathrm{A}'e^{(\mathrm{u}'x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{A}''e^{(\mathrm{u}''x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + a'e^{(\mathrm{u}'_1x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \\ \eta = \mathrm{B}'e^{(\mathrm{u}'x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{B}''e^{(\mathrm{u}''x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + b'e^{(\mathrm{u}'_1x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \\ \zeta = \mathrm{C}'e^{(\mathrm{u}'x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{C}''e^{(\mathrm{u}''x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + c'e^{(\mathrm{u}'_1x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \end{cases}$$

réduites aussi à leurs parties réelles.

5. En écrivant que les valeurs de ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dx}$, dans l'un et l'autre milieu, sont respectivement égales pour $x = 0$, on a les six équations linéaires

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{A}_1 + a = \mathrm{A}' + \mathrm{A}'' + a', \\ \mathrm{B} + \mathrm{B}_1 + b = \mathrm{B}' + \mathrm{B}'' + b', \\ \mathrm{C} + \mathrm{C}_1 \qquad = \mathrm{C}' + \mathrm{C}'' + c'. \\ \mathrm{A}\mathrm{u} - \mathrm{A}_1\mathrm{u} - a\mathrm{u}_1 = \mathrm{A}'\mathrm{u}' + \mathrm{A}''\mathrm{u}'' + a'\mathrm{u}'_1, \\ \mathrm{B}\mathrm{u} - \mathrm{B}_1\mathrm{u} - b\mathrm{u}_1 = \mathrm{B}'\mathrm{u}' + \mathrm{B}''\mathrm{u}'' + b'\mathrm{u}'_1, \\ \mathrm{C}\mathrm{u} - \mathrm{C}_1\mathrm{u} \qquad = \mathrm{C}'\mathrm{u}' + \mathrm{C}''\mathrm{u}'' + c'\mathrm{u}'_1. \end{cases}$$

Si l'on appelle α l'angle d'incidence, α' et α'' les angles de réfractions, et de même α_1 et α'_1 les angles aigus que font avec $\mathrm{O}x$ les normales aux deux ondes longitudinales, l'une réfléchie, l'autre réfractée, on a

$$\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} = \cot\alpha, \quad \frac{\mathrm{u}'}{\mathrm{v}} = \cot\alpha', \quad \frac{\mathrm{u}''}{\mathrm{v}} = \cot\alpha'', \quad \frac{\mathrm{u}_1}{\mathrm{v}} = \cot\alpha_1, \quad \frac{\mathrm{u}'_1}{\mathrm{v}} = \cot\alpha'_1.$$

Soient $O\varphi$, $O\varphi_1$, $O\varphi'$, $O\varphi''$, $O\varphi'_1$ les traces sur le plan d'incidence de l'onde incidente, de l'onde transversale réfléchie et des trois ondes réfractées, ces droites faisant toutes avec Oy des angles aigus. On pourra représenter la vibration incidente par ses projections sur les deux axes rectangulaires Oz, $O\varphi$ situés dans son plan

$$\zeta = Ce^{(ux+vy-st)i}, \quad \varphi = De^{(ux+vy-st)i},$$

d'où

$$A = -D\sin\alpha, \quad B = D\cos\alpha;$$

de même, la vibration transversale réfléchie par ses projections sur les deux axes rectangulaires Oz, $O\varphi_1$ situés dans son plan

$$\zeta = C_1 e^{(-ux+vy-st)i}, \quad \varphi_1 = D_1 e^{(-ux+vy-st)i},$$

d'où

$$A_1 = D_1\sin\alpha, \quad B_1 = D_1\cos\alpha.$$

Quant à la vibration longitudinale réfléchie, si on appelle e son amplitude, on a

$$a = -e\cos\alpha_1, \quad b = e\sin\alpha_1.$$

Les équations (3) deviennent ainsi, disposées dans un autre ordre,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&C + C_1 = C' + C'' + c',\\
&(C - C_1)\cot\alpha = C'\cot\alpha' + C''\cot\alpha'' + c'\cot\alpha'_1,\\
&(D + D_1)\cos\alpha + e\sin\alpha_1 = B' + B'' + b',\\
&-(D + D_1)\cos\alpha + e\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin\alpha_1} = A'\cot\alpha' + A''\cot\alpha'' + a'_1\cot\alpha'_1,\\
&-(D - D_1)\sin\alpha - e\cos\alpha_1 = A' + A'' + a',\\
&(D - D_1)\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - e\cos\alpha_1 = B'\cot\alpha' + B''\cot\alpha'' + b'\cot\alpha'_1.
\end{aligned}\right.$$

6. Ce sont six équations du premier degré à six inconnues. On donne la vibration incidente, c'est-à-dire C et D; la vibration transversale réfléchie contient deux inconnues C_1 et D_1, la vibration longitudinale réfléchie une seule inconnue e; les trois vibrations réfractées étant rectilignes et s'effectuant suivant les directions déterminées, chacune d'elles ne renferme qu'une seule inconnue, son amplitude; en tout six inconnues. Nous avons supposé à la vérité que toutes les valeurs de u relatives au second milieu sont de la forme $\mathrm{u}i$, ce qui donne trois ondes planes qui se propagent sans s'affaiblir en s'éloignant de la surface de séparation. Si, dans le milieu isotrope fictif dont le second milieu diffère très-peu, une racine de l'équation en u^2, par exemple la racine simple, est positive, l'équation du sixième degré en u aura une racine réelle positive et une racine réelle négative, peu différente de la première en valeur absolue; à la racine négative correspond une vibration dont l'amplitude diminue rapidement, à mesure qu'on s'éloigne du plan de séparation, et qui par conséquent reste concentrée dans le voisinage de ce plan (I[er] Mémoire, **8**); il suffira de remplacer dans les équations précédentes, et par suite dans les formules que nous en déduirons, u'_1 par $\mathrm{U}'_1 i$, ou $\cot\alpha'_1$ par $i\frac{\mathrm{U}'_1}{\mathrm{V}}$.

II.

7. Il semble résulter de la théorie mathématique de la propagation de la lumière dans les milieux homoédriques quelconques, et c'est une remarque qui a été faite par Cauchy il y a longtemps, que la vibration ne peut être située rigoureusement dans le plan de l'onde, que si la vitesse de propagation est la même dans toutes les directions, ce qui n'a lieu que dans les milieux isotropes, et dans les cristaux à un axe optique pour la vibration ordinaire. Dans tous les autres cas, les deux vibrations transversales font des angles petits avec le plan de l'onde, et la vibration longitudinale un petit angle avec la normale au plan de l'onde. Nous effectuerons d'abord le calcul, en négligeant cette déviation des vibrations dans le second milieu, c'est à-dire en supposant que chacune des deux vibrations transversales est située rigoureusement dans le plan de l'onde, et la vibration longitudinale rigoureusement perpendiculaire au plan de l'onde.

Appelons θ' et θ'' les angles que font avec Oz les droites suivant lesquelles s'effectuent les deux vibrations transversales refractées, angles comptés de Oz vers $O\varphi'$, ou de Oz vers $O\varphi''$, E' et E'' les amplitudes de ces vibrations. Ces vibrations seront représentées par les formules

$$\zeta = \mathrm{E}'\cos\theta' e^{(u'x+vy-st)i}, \quad \varphi' = \mathrm{E}'\sin\theta' e^{(u'x+vy-st)i},$$
$$\zeta = \mathrm{E}''\cos\theta'' e^{(u''x+vy-st)i}, \quad \varphi'' = \mathrm{E}''\sin\theta'' e^{(u''x+vy-st)i},$$

et l'on aura

$$\mathrm{C}' = \mathrm{E}'\cos\theta', \quad \mathrm{A}' = -\mathrm{E}'\sin\theta'\sin\alpha', \quad \mathrm{B}' = \mathrm{E}'\sin\theta'\cos\alpha',$$
$$\mathrm{C}'' = \mathrm{E}''\cos\theta'', \quad \mathrm{A}'' = -\mathrm{E}''\sin\theta''\sin\alpha'', \quad \mathrm{B}'' = \mathrm{E}''\sin\theta''\cos\alpha''.$$

Quant à la vibration longitudinale, si l'on appelle e' son amplitude, on aura

$$a' = \mathrm{e}'\cos\alpha'_1, \quad b' = \mathrm{e}'\sin\alpha'_1, \quad c' = 0.$$

Les équations (4) deviennent

$$(5) \quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{C} + \mathrm{C}_1 = \mathrm{E}'\cos\theta' + \mathrm{E}''\cos\theta'',\\
&(\mathrm{C} - \mathrm{C}_1)\cot\alpha = \mathrm{E}'\cos\theta'\cot\alpha' + \mathrm{E}''\cos\theta''\cot\alpha'',\\
&(\mathrm{D} + \mathrm{D}_1)\cos\alpha + \mathrm{e}\sin\alpha_1\\
&\qquad = \mathrm{E}'\sin\theta'\cos\alpha' + \mathrm{E}''\sin\theta''\cos\alpha'' + \mathrm{e}'\sin\alpha'_1,\\
&-(\mathrm{D} + \mathrm{D}_1)\cos\alpha + \mathrm{e}\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin\alpha_1}\\
&\qquad = -\mathrm{E}'\sin\theta'\cos\alpha' - \mathrm{E}''\sin\theta''\cos\alpha'' + \mathrm{e}'\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1},\\
&-(\mathrm{D} - \mathrm{D}_1)\sin\alpha - \mathrm{e}\cos\alpha_1\\
&\qquad = -\mathrm{E}'\sin\theta'\sin\alpha' - \mathrm{E}''\sin\theta''\sin\alpha'' + \mathrm{e}'\cos\alpha'_1,\\
&(\mathrm{D} - \mathrm{D}_1)\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \mathrm{e}\cos\alpha_1\\
&\qquad = \mathrm{E}'\sin\theta'\frac{\cos^2\alpha'}{\sin\alpha'} + \mathrm{E}''\sin\theta''\frac{\cos^2\alpha''}{\sin\alpha''} + \mathrm{e}'\cos\alpha'_1.
\end{aligned}\right.$$

On a ainsi six équations linéaires entre les huit quantités C, D, C_1, D_1, e, E', E'', e'. Deux de ces quantités peuvent être prises arbitrairement, les six autres sont des fonctions de ces deux-là.

8. Pour résoudre facilement ces équations, nous ferons usage d'un procédé ingénieux qui a été employé par Mac-Cullagh dans son remarquable travail sur la réflexion et la réfraction cristallines (*Journal de*

Mathématiques, 1842). Nous chercherons d'abord quelle doit être la vibration incidente pour qu'il ne se produise dans le second milieu qu'une seule vibration réfractée; il faut faire $E'' = 0$, la quantité E' restant arbitraire. Les équations (5) se réduisent à

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&C + C_1 = E'\cos\theta',\\
&(C - C_1)\cot\alpha = E'\cos\theta'\cot\alpha',\\
&(D + D_1)\cos\alpha + e\sin\alpha_1 = E'\sin\theta'\cos\alpha' + e'\sin\alpha'_1,\\
-&(D + D_1)\cos\alpha + e\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin\alpha_1} = -E'\sin\theta'\cos\alpha' + e'\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1},\\
-&(D - D_1)\sin\alpha - e\cos\alpha_1 = -E'\sin\theta'\sin\alpha' + e'\cos\alpha'_1,\\
&(D - D_1)\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - e\cos\alpha_1 = E'\sin\theta'\frac{\cos^2\alpha'}{\sin\alpha'} + e'\cos\alpha'_1.
\end{aligned}\right.$$

Mais ces équations sont précisément celles qui se rapportent au cas de deux milieux isotropes et que nous avons résolues dans notre premier Mémoire. En appliquant immédiatement les formules que nous avons trouvées (**12**), et posant $\varpi = \alpha_1 - \alpha'_1$, on a

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
C\ &= E'\cos\theta'\frac{\sin(\alpha'+\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha},\\
D\ &= E'\sin\theta'\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\cos(\alpha'-\alpha+\varpi)}{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\varpi},\\
C_1 &= E'\cos\theta'\frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha},\\
D_1 &= E'\sin\theta'\frac{\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha'+\alpha+\varpi)}{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\varpi},\\
e\ &= E'\sin\theta'\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin\alpha_1}{\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi},\\
e'\ &= E'\sin\theta'\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin\alpha'_1}{\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha_1)\cos\varpi}.
\end{aligned}\right.$$

9. En faisant $E' = 0$ et laissant E'' arbitraire, on obtient des formules analogues; il suffit de remplacer dans les seconds membres E' par E'', et α' par α''. On a ainsi deux solutions particulières des équations (5), renfermant chacune une constante arbitraire; ces équations étant linéaires, la somme sera aussi une solution, et comme elle renferme deux constantes arbitraires E′ et E″, ce sera la solution générale :

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
C &= E'\cos\theta'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha} + E''\cos\theta''\,\frac{\sin(\alpha''+\alpha)}{2\sin\alpha''\cos\alpha},\\
D &= E'\sin\theta'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\cos(\alpha'-\alpha+\varpi)}{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\varpi}\\
&\quad + E''\sin\theta''\,\frac{\sin(\alpha''+\alpha)\cos(\alpha''-\alpha+\varpi)}{2\sin\alpha''\cos\alpha\cos\varpi},\\
C_1 &= E'\cos\theta'\,\frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha} + E'\cos\theta''\,\frac{\sin(\alpha''-\alpha)}{2\sin\alpha''\cos\alpha},\\
D_1 &= E'\sin\theta'\,\frac{\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha'+\alpha+\varpi)}{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\varpi}\\
&\quad + E''\sin\theta''\,\frac{\sin(\alpha''-\alpha)\cos(\alpha''+\alpha+\varpi)}{2\sin\alpha''\cos\alpha\cos\varpi},\\
e &= E'\sin\theta'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin\alpha_1}{\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi}\\
&\quad + E''\sin\theta''\,\frac{\sin(\alpha''+\alpha)\sin(\alpha''-\alpha)\sin\alpha_1}{\sin\alpha''\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi},\\
e' &= E'\sin\theta'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin\alpha'_1}{\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi}\\
&\quad + E''\sin\theta''\,\frac{\sin(\alpha''+\alpha)\sin(\alpha''-\alpha)\sin\alpha'_1}{\sin\alpha''\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi}.
\end{aligned}\right.$$

Dans la pratique, les données sont, non pas E′ et E″, mais les deux composantes C et D de la vibration incidente. Si l'on pose

$$\Delta = \sin\theta''\cos\theta'\cos(\alpha''-\alpha+\varpi) - \sin\theta'\cos\theta''\cos(\alpha'-\alpha+\varpi);$$

des deuxpremières équations on tire les amplitudes des deux vibrations transversales réfractées,

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
E' &= \frac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\Delta\sin(\alpha'+\alpha)}\left[C\sin\theta''\cos(\alpha''-\alpha+\varpi) - D\cos\theta''\cos\varpi\right],\\
E'' &= -\frac{2\sin\alpha''\cos\alpha}{\Delta\sin(\alpha''+\alpha)}\left[C\sin\theta'\cos(\alpha'-\alpha+\varpi) - D\cos\theta'\cos\varpi\right].
\end{aligned}\right.$$

Portant ces valeurs dans les équations suivantes, on a les deux composantes C_1 et D_1 de la vibration transversale réfléchie, et les amplitudes e et e′ des vibrations longitudinales.

10. Quand les deux milieux sont isotropes, l'angle ϖ paraît avoir une valeur imaginaire très-petite, au moins lorsque l'angle d'incidence α est supérieur à une certaine limite; c'est là ce qui produit la polarisation elliptique du rayon réfléchi, telle qu'elle a été observée par M. Jamin. Il est probable qu'il en est de même lorsque le second milieu est cristallisé.

Il en résulte plusieurs conséquences remarquables. Supposons la vibration incidente rectiligne, $C = E\cos\theta$, $D = E\sin\theta$; les valeurs de E' et de E'' renfermant l'angle imaginaire ϖ, les deux vibrations transversales réfractées, quoique rectilignes, auront entre elles une petite différence de phase, à l'entrée même du cristal. Il en sera de même des deux composantes C_1 et D_1 de la vibration transversale réfléchie, qui sera elliptique.

Considérons maintenant les formules (7), qui se rapportent à la réfraction uniradiale, c'est-à-dire au cas où une seule vibration transversale réfractée se produit dans le second milieu. Si l'angle ϖ est imaginaire, pour que ce phénomène ait lieu, les composantes C et D ayant entre elles une petite différence de phase, il est nécessaire que la vibration incidente soit elliptique. Posons $\tang\varpi = -\varepsilon i$ (Ier Mémoire, **15**); les formules (7) deviennent

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned} C &= E'\cos\theta'\frac{\sin(\alpha'+\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha},\\ D &= E'\sin\theta'\frac{\sin(\alpha'+\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha}\left[\cos(\alpha'-\alpha)+i\varepsilon\sin(\alpha'-\alpha)\right].\end{aligned}\right.\\ &\left\{\begin{aligned} C_1 &= E'\cos\theta'\frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha},\\ D_1 &= E'\sin\theta'\frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha}\left[\cos(\alpha'+\alpha)+i\varepsilon\sin(\alpha'+\alpha)\right].\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

Dans l'expression de D, la partie imaginaire étant toujours très-petite par rapport à la partie réelle, la vibration incidente sera presque rectiligne; l'ellipticité sera peu accusée. Mais, dans la vibration réfléchie, lorsque l'angle $\alpha' + \alpha$ est égal à $\frac{\pi}{2}$, la différence de phase des deux composantes C_1 et D_1 devient égale à $\frac{\pi}{2}$; si en outre l'azimut θ' de la vibration réfractée est voisine de $\frac{\pi}{2}$, le rapport des axes peut acquérir une valeur sensible. C'est dans ces conditions que s'est placé M. Jamin pour observer la polarisation elliptique à la surface des milieux transparents isotropes; il est probable qu'on l'observera de la même manière à la surface des cristaux.

11. En général, dans le cas de la réfraction uniradiale, la vibration incidente et la vibration réfléchie sont sensiblement rectilignes, et les angles θ et θ_1 qu'elles font avec l'axe Oz sont donnés par les formules approchées

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \tang\theta &= \tang\theta'\cos(\alpha'-\alpha),\\ \tang\theta_1 &= \tang\theta'\cos(\alpha'+\alpha),\end{aligned}\right.$$

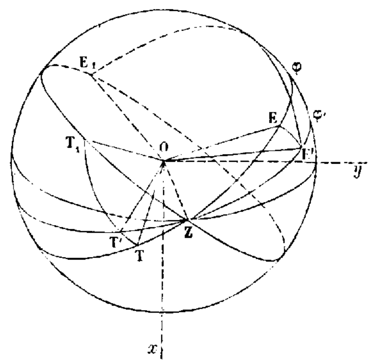
que l'on déduit des équations (7), en y faisant $\varpi = 0$. A ce degré d'approximation, si la vibration incidente est rectiligne et dans la direction θ, elle donnera naissance à une seule vibration réfractée et à une vibration réfléchie aussi rectiligne et dans la direction θ_1. On déterminera les amplitudes de ces deux vibrations par les formules

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} E'\cos\theta' &= E\cos\theta\,\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin(\alpha'+\alpha)},\\ E_1\cos\theta_1 &= E\cos\theta\,\frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{\sin(\alpha'+\alpha)},\end{aligned}\right.$$

que l'on déduit aussi des équations (7).

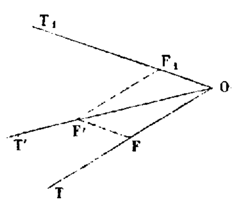
La considération des transversales a permis à Mac-Cullagh de comprendre dans une même loi géométrique l'ensemble des formules (11) et (12), relatives à la direction et à l'amplitude des vibrations. Mac-Cullagh appelle transversale d'une vibration rectiligne, une droite située dans le plan de l'onde, et perpendiculaire à la direction de la vibration; pour préciser cette définition, on se supposera placé sur la normale à l'onde, les pieds sur le plan, la tête du côté vers lequel se propage l'onde, et on portera un angle droit à partir de la vibration dans un sens convenu, par exemple de droite à gauche. Dans la figure ci-contre qui se rapporte au cas où $\omega > \omega'$, et par suite $\alpha > \alpha'$, les vibrations incidente, réfléchie ou réfractée sont OE, OE_1, OE'; leurs transversales sont OT, OT_1, OT'. Les formules (11) signifient que les deux triangles sphériques ZT'T, $ZT'T_1$ sont rectangles en T', et par conséquent que les trois transversales OT, OT', OT_1 sont situées dans un même plan perpendiculaire à l'onde réfractée. On peut énoncer autrement cette première partie du théorème, en disant que les droites OE, OE_1 suivant lesquelles s'effectuent les vibrations incidente et réfléchie sont les

FIG. 1.



projections de la vibration réfractée OE' sur l'onde incidente et sur l'onde réfléchie. Portons maintenant sur les transversales OT et OT_1 des longueurs OF et OF_1 égales à E et E_1, la diagonale du parallélogramme construit sur ces longueurs OF et OF_1, coïncidera avec la transversale OT' de la vibration réfractée, et l'amplitude E' de cette vibration sera égale à la longueur OF' de cette diagonale multipliée par $\frac{\omega'}{\omega}$. Cette construction remarquable équivaut aux formules (11) et (12) qui ne sont autres que les formules de Fresnel, relatives aux milieux isotropes.

FIG. 2.



Pour la seconde réfraction uniradiale, celle qui correspond à l'hypothèse $E' = 0$, on a des formules analogues; il suffit de remplacer θ' par θ'', α' par α'' et E' par E''.

Maintenant, si l'on donne une vibration incidente quelconque, rectiligne ou elliptique, au lieu d'appliquer les formules (9) et (8), on pourra la décomposer en deux vibrations rectilignes suivant les deux directions θ; chacune d'elles produira une vibration transversale réfractée et une vibration transversale réfléchie que l'on calculera d'après les formules (11) et (12), ou que l'on déterminera d'après la construction géométrique de Mac-Cullagh. La résultante des deux vibrations réfléchies sera la vibration réfléchie cherchée.

Si l'angle d'incidence α est tel, que les deux valeurs de θ_1 soient égales, c'est-à-dire que l'on ait

$$(13) \qquad \tang\theta' \cos(\alpha' + \alpha) = \tang\theta'' \cos(\alpha'' + \alpha),$$

les deux vibrations réfléchies s'effectuant suivant la même droite, la vibration résultante sera aussi rectiligne, et dans la même direction θ_1, quelle que soit la vibration incidente, rectiligne ou elliptique. Cette valeur de α est ce qu'on appelle l'angle de polarisation, et c'est par cette considération que Mac-Cullagh l'a déterminé. Mais il est probable qu'il n'existe pas rigoureusement d'angle de polarisation, et que la vibration réfléchie est elliptique; car les valeurs de $\alpha + \alpha'$ et de $\alpha + \alpha''$ qui vérifient l'équation (13) sont voisines de $\frac{\pi}{2}$, et l'on se trouve alors dans les conditions de la polarisation elliptique. C'est pourquoi nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet.

III.

12. Nous avons négligé jusqu'à présent la déviation des vibrations dans le second milieu, c'est-à-dire que nous avons admis que les deux vibrations transversales sont rigoureusement situées dans les plans d'onde et la vibration longitudinale rigoureusement perpendiculaire. Mais il est probable que ceci n'est qu'une première approximation; nous allons supposer maintenant que les vibrations sont quasi transversales ou quasi longitudinales, comme l'indique la théorie. Nous appellerons τ' et τ'' les angles très-petits que font les directions des deux premières vibrations avec les plans d'onde, et τ'_1 l'angle très-petit que fait la troisième avec la perpendiculaire au plan de l'onde. Nous désignerons d'ailleurs par θ', θ'', θ'_1 les azimuts de ces vibrations, c'est-à-dire les angles que font avec Oz leurs projections sur les plans d'onde.

On a, pour une vibration quasi transversale,

$$\begin{aligned}
A' &= E'(-\cos\tau'\sin\theta'\sin\alpha' + \sin\tau'\cos\alpha'),\\
B' &= E'(\cos\tau'\sin\theta'\cos\alpha' + \sin\tau'\sin\alpha'),\\
C' &= E'\cos\tau'\cos\theta',
\end{aligned}$$

et, en négligeant le carré de la déviation τ',

$$\begin{aligned}
A' &= E'(-\sin\theta'\sin\alpha' + \sin\tau'\cos\alpha'),\\
B' &= E'(\sin\theta'\cos\alpha' + \sin\tau'\sin\alpha'),\\
C' &= E'\cos\theta'.
\end{aligned}$$

On aura de même, pour une vibration quasi longitudinale,

$$\begin{aligned}
a' &= e'(-\sin\tau'_1\sin\theta'_1\sin\alpha'_1 + \cos\tau'_1\cos\alpha'_1),\\
b' &= e'(\sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1 + \cos\tau'_1\sin\alpha'_1),\\
c' &= e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1,
\end{aligned}$$

et, en négligeant le carré de τ'_1,

$$\begin{aligned}
a' &= e'(\cos\alpha'_1 - \sin\tau'_1\sin\theta'_1\sin\alpha'_1),\\
b' &= e'(\sin\alpha'_1 + \sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1),\\
c' &= e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1.
\end{aligned}$$

Les équations de condition relatives à la surface de séparation des deux milieux deviennent ainsi

$$(14)\left\{\begin{aligned}
&C + C_1 - E'\cos\theta' - E''\cos\theta'' = e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1,\\
&(C - C_1)\cot\alpha - E'\cos\theta'\cot\alpha' - E''\cos\theta''\cot\alpha'' = e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1\cot\alpha'_1,\\
&(D + D_1)\cos\alpha + e\sin\alpha_1 - E'\sin\theta'\cos\alpha' - E''\sin\theta''\cos\alpha'' - e'\sin\alpha'_1\\
&\qquad = E'\sin\tau'\sin\alpha' + E''\sin\tau''\sin\alpha'' + e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1,\\
&-(D + D_1)\cos\alpha + e\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin\alpha_1} + E'\sin\theta'\cos\alpha' + E''\sin\theta''\cos\alpha'' - e'\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1}\\
&\qquad = E'\sin\tau'\frac{\cos^2\alpha'}{\sin\alpha'} + E''\sin\tau''\frac{\cos^2\alpha''}{\sin\alpha''} - e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1,\\
&-(D - D_1)\sin\alpha - e\cos\alpha_1 + E'\sin\theta'\sin\alpha' + E''\sin\theta''\sin\alpha''' - e'\cos\alpha'_1\\
&\qquad = E'\sin\tau'\cos\alpha' + E''\sin\tau''\cos\alpha'' - e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\sin\alpha'_1,\\
&(D - D_1)\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - e\cos\alpha_1 - E'\sin\theta'\frac{\cos^2\alpha'}{\sin\alpha'} - E''\sin\theta''\frac{\cos^2\alpha''}{\sin\alpha''} - e'\cos\alpha'_1\\
&\qquad = E'\sin\tau'\cos\alpha' + E''\sin\tau''\cos\alpha'' + e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1}.
\end{aligned}\right.$$

Les seconds membres ont des valeurs très-petites ; les équations que l'on obtient en égalant les premiers membres à zéro sont précisément les équations (5) que nous avons trouvées en négligeant la déviation.

13. Dans le cas de la réfraction uniradiale, si l'on fait $E'' = 0$, les équations précédentes se réduisent à

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
& C + C_1 - E'\cos\theta' = e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1,\\
& (C - C_1)\cot\alpha - E'\cos\theta'\cot\alpha' = e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1\cot\alpha'_1,\\
& (D + D_1)\cos\alpha + e\sin\alpha_1 - E'\sin\theta'\cos\alpha' - e'\sin\alpha'_1\\
& \quad = E'\sin\tau'\sin\alpha' + e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1,\\
& -(D + D_1)\cos\alpha + e\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin\alpha_1} + E'\sin\theta'\cos\alpha' - e\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1}\\
& \quad = E'\sin\tau'\frac{\cos^2\alpha'}{\sin\alpha'} - e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1,\\
& -(D - D_1)\sin\alpha - e\cos\alpha_1 + E'\sin\theta'\sin\alpha' - e'\cos\alpha'_1\\
& \quad = E'\sin\tau'\cos\alpha' - e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\sin\alpha'_1,\\
& (D - D_1)\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - e\cos\alpha_1 - E'\sin\theta'\frac{\cos^2\alpha'}{\sin\alpha'} - e'\cos\alpha'_1\\
& \quad = E'\sin\tau'\cos\alpha' + e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces équations E' est regardée comme une quantité donnée, les inconnues sont C, C_1, D, D_1, e, e'. Au degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, c'est-à-dire en négligeant le carré de la déviation, on peut dans les seconds membres remplacer e' par sa valeur approchée (7) tirée des équations (6). Appelons C, C_1, D, D_1, e, e' les valeurs des inconnues qui vérifient les équations (6), $C + \delta C$, $C_1 + \delta C_1$, $D + \delta D$, $D_1 + \delta D_1$, $e + \delta e$, $e' + \delta e'$ celles qui vérifient les équations (15); nous aurons à résoudre les équations

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \delta C + \delta C_1 = e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1,\\
& (\delta C - \delta C_1)\cot\alpha = e'\sin\tau'_1\cos\theta'_1\cot\alpha'_1,\\
& (\delta D + \delta D_1)\cos\alpha + \delta e\sin\alpha_1 - \delta e'\sin\alpha'_1 = E'\sin\tau'\sin\alpha' + e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1,\\
& -(\delta D + \delta D_1)\cos\alpha + \delta e\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin\alpha_1} - \delta e'\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1} = E'\sin\tau'\frac{\cos^2\alpha'}{\sin\alpha'} - e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\cos\alpha'_1,\\
& -(\delta D - \delta D_1)\sin\alpha - \delta e\cos\alpha_1 - \delta e'\cos\alpha'_1 = E'\sin\tau'\cos\alpha' - e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\sin\alpha'_1,\\
& (\delta D - \delta D_1)\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \delta e\cos\alpha_1 - \delta e'\cos\alpha'_1 = E'\sin\tau'\cos\alpha' + e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\frac{\cos^2\alpha'_1}{\sin\alpha'_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Des deux premières, on déduit

$$(17)\quad \begin{cases} \delta C = e' \sin\tau'_1 \cos\theta'_1 \dfrac{\sin(\alpha'_1 + \alpha)}{2\sin\alpha'_1 \cos\alpha}, \\ \delta C' = e' \sin\tau'_1 \cos\theta'_1 \dfrac{\sin(\alpha'_1 - \alpha)}{2\sin\alpha'_1 \cos\alpha}. \end{cases}$$

De la troisième et de la quatrième, ajoutées membre à membre, on tire

$$\frac{\delta e}{\sin\alpha_1} - \frac{\delta e'}{\sin\alpha'_1} = \frac{E'\sin\tau'}{\sin\alpha'},$$

d'où

$$\delta e = \delta e' \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha'_1} + E'\sin\tau' \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha'}.$$

Portant cette valeur de δe dans la troisième et la cinquième équation, on a les deux équations

$$(\delta D + \delta D_1)\cos\alpha + \delta e' \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha'_1)\sin\varpi}{\sin\alpha'_1}$$
$$= E'\sin\tau' \frac{\sin(\alpha' - \alpha_1)\sin(\alpha' + \alpha_1)}{\sin\alpha'} + e'\sin\tau'_1 \sin\theta'_1 \cos\alpha'_1,$$

$$-(\delta D - \delta D_1)\sin\alpha - \delta e' \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha'_1)\cos\varpi}{\sin\alpha'_1}$$
$$= E'\sin\tau' \frac{\sin(\alpha' + \alpha_1)\cos(\alpha' - \alpha_1)}{\sin\alpha'} - e'\sin\tau'_1 \sin\theta'_1 \sin\alpha'_1.$$

L'élimination de $\delta e'$ donne l'équation

$$\delta D \cos(\alpha + \varpi) + \delta D_1 \cos(\alpha - \varpi)$$
$$= E'\sin\tau' \frac{\sin(\alpha' + \alpha_1)\sin(\alpha' - \alpha'_1)}{\sin\alpha'} + e'\sin\tau'_1 \sin\theta'_1 \cos\alpha_1.$$

D'autre part, de la cinquième et de la sixième des équations (16), retranchées membre à membre, on déduit

$$\delta D - \delta D_1 = e'\sin\tau'_1 \sin\theta'_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'_1}.$$

De ces deux dernières éqnations, on tire

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}
\delta D &= E'\sin\tau'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha'_1)}{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\varpi}\\
&\quad+e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\,\frac{\cos(\alpha_1-\alpha)\sin(\alpha'_1+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'_1\cos\varpi},\\
\delta D_1 &= E'\sin\tau'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha'_1)}{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\varpi}\\
&\quad+e'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\,\frac{\cos(\alpha_1+\alpha)\sin(\alpha'_1-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'_1\cos\varpi}.
\end{aligned}\right.$$

En remplaçant dans les équations (17) et (18) e′ par sa valeur approchée donnée par la dernière des équations (7), on a enfin

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}
\delta C &= E'\sin\theta'\sin\tau'_1\cos\theta'_1\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin(\alpha'_1+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi},\\
\delta C_1 &= E'\sin\theta'\sin\tau'_1\cos\theta'_1\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin(\alpha'_1-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi},\\
\delta D &= E'\sin\tau'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha'_1)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\cos\varpi}\\
&\quad+E'\sin\theta'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha_1-\alpha)\sin(\alpha'_1+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos^2\varpi},\\
\delta D_1 &= E'\sin\tau'\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha'_1)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\cos\varpi}\\
&\quad+E'\sin\theta'\sin\tau'_1\sin\theta'_1\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha_1+\alpha)\sin(\alpha'_1-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos^2\varpi}.
\end{aligned}\right.$$

On ajoutera ces quantités petites aux valeurs approchées données par les formules (7).

Comme les angles α_1 et α'_1, réels ou imaginaires, paraissent être peu différents l'un de l'autre, on pourra sans inconvénient faire $\alpha'_1=\alpha_1$ dans les formules précédentes, ce qui les réduit à

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}
\delta C &= E'\sin\theta'\sin\tau'_1\cos\theta'_1\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin(\alpha_1+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin2\alpha_1},\\
\delta C_1 &= E'\sin\theta'\sin\tau'_1\cos\theta'_1\,\frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin(\alpha_1-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin2\alpha_1},
\end{aligned}\right.$$

$$
(21)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta D &= E'\sin\tau' \frac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha_1)}{2\cos\alpha\sin\alpha'} \\
&\qquad + E'\sin\theta'\sin\tau'_1\sin\theta'_1 \frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha_1-\alpha)\sin(\alpha_1+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin 2\alpha_1}, \\
\delta D_1 &= E'\sin\tau' \frac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha_1)}{2\cos\alpha\sin\alpha'} \\
&\qquad + E'\sin\theta'\sin\tau'_1\sin\theta'_1 \frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha_1+\alpha)\sin(\alpha_1-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin 2\alpha_1},
\end{aligned}
\right.
$$

14. Nous avons ici en quelque sorte trois causes de perturbations : 1° celle qui provient de l'angle ϖ, ou de la différence des vitesses de propagation des vibrations longitudinales dans les deux milieux; 2° la déviation τ' de la vibration transversale dans le second milieu; 3° la déviation τ'_1 de la vibration longitudinale dans ce même milieu. Nous avons déjà étudié l'influence de la première cause (n° **10**); elle produit la polarisation elliptique.

Pour reconnaître l'influence de la seconde cause, nous négligerons les deux autres, c'est-à-dire que nous ferons $\varpi = 0$, $\tau'_1 = 0$; on a ainsi

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\delta C = \delta C_1 = 0, \\
&\delta D = \delta D_1 = E'\sin\tau' \frac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha_1)}{2\sin\alpha'\cos\alpha}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on désigne par ω et ω_1 les vitesses de propagation des vibrations transversales et des vibrations longitudinales dans le premier milieu, par ω' et ω'' les vitesses de propagation des deux vibrations transversales dans le second milieu, on a

$$
\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha_1) = \sin^2\alpha' - \sin^2\alpha_1 = \frac{\omega'^2-\omega_1^2}{\omega'^2}\sin^2\alpha';
$$

cette quantité est réelle. Les formules relatives à la réfraction uniradiale se réduisent ainsi à

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
C &= E'\cos\theta' \frac{\sin(\alpha'+\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha}, \\
D &= E'\sin\theta' \frac{\sin(\alpha'+\alpha)\cos(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha} + E'\sin\tau' \frac{\omega'^2-\omega_1^2}{\omega'^2}\,\frac{\sin\alpha'}{2\cos\alpha}, \\
C_1 &= E'\cos\theta' \frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha}, \\
D_1 &= E'\sin\theta' \frac{\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha'+\alpha)}{2\sin\alpha'\cos\alpha} + E'\sin\tau' \frac{\omega'^2-\omega_1^2}{\omega'^2}\,\frac{\sin\alpha'}{2\cos\alpha}.
\end{aligned}
\right.
$$

La vibration incidente et la vibration réfléchie sont rectilignes; leurs azimuts sont donnés par les formules

$$(24)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\theta' \cos(\alpha' - \alpha) + \dfrac{\omega'^2 - \omega_1^2}{\omega'^2} \dfrac{\sin^2\alpha' \sin\tau'}{\cos\theta' \sin(\alpha' + \alpha)}, \\ \operatorname{tang}\theta_1 = \operatorname{tang}\theta' \cos(\alpha' + \alpha) + \dfrac{\omega'^2 - \omega_1^2}{\omega'^2} \dfrac{\sin^2\alpha' \sin\tau'}{\cos\theta' \sin(\alpha' - \alpha)}. \end{cases}$$

Le rayon lumineux réfracté fait avec la normale au plan de l'onde un angle très-petit γ', et les deux angles τ' et γ' qui s'évanouissent ensemble sont sensiblement proportionnels. Posons

$$\frac{\omega'^2 - \omega_1^2}{\omega'^2} \sin\tau' = m \operatorname{tang}\gamma';$$

les formules (24) deviennent

$$(25)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\theta' \cos(\alpha' - \alpha) + \dfrac{m \sin^2\alpha' \operatorname{tang}\gamma'}{\cos\theta' \sin(\alpha' + \alpha)}, \\ \operatorname{tang}\theta_1 = \operatorname{tang}\theta' \cos(\alpha' + \alpha) + \dfrac{m \sin^2\alpha' \operatorname{tang}\gamma'}{\cos\theta' \sin(\alpha' - \alpha)}. \end{cases}$$

Si $m = 1$, ces formules sont précisément celles qui ont été trouvées par Mac-Cullagh, en partant d'idées tout à fait différentes de celles de Fresnel, et qui ont été vérifiées par les expériences de M. Seebeck, relatives à l'angle de polarisation. Mais ces expériences, comme nous l'avons déjà remarqué au n° **11**, ne paraissent pas avoir l'importance qu'on leur attribuait; il est très-probable que, dans le voisinage de cet angle, la vibration transversale réfléchie est non pas rectiligne, mais elliptique, comme cela a lieu dans les milieux isotropes, et que M. Seebeck observait, non une extinction complète, mais le minimum du petit axe de l'ellipse.

Quant à la troisième cause de perturbation, celle qui provient de la vibration longitudinale réfractée, elle introduit probablement dans les formules de nouveaux termes imaginaires; de sorte que le coefficient d'ellipticité de la vibration transversale réfléchie résulte de la combinaison de deux termes qui s'ajoutent ou se retranchent; on conçoit que ce coefficient puisse même changer de signe suivant la position du cristal. C'est une observation qui a été faite par M. Jamin sur le spath.

15. Jusqu'à présent nous n'avons traité que le cas de la réfraction uniradiale. Les formules (19) donnent une solution particulière des équations linéaires (14), avec une constante arbitraire E'. L'hypothèse $E' = 0$ fournira une seconde solution particulière, avec une autre constante arbitraire E''. La somme de ces deux solutions particulières sera la solution générale :

$$
(26)\left\{\begin{aligned}
C &= \sum E'\cos\theta' \frac{\sin(\alpha'+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'} \\
&\quad+\sum E'\sin\theta'\sin\tau'_1\cos\theta'_1 \frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin(\alpha'_1+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi}, \\
D &= \sum E'\sin\theta' \frac{\sin(\alpha'+\alpha)\cos(\alpha'-\alpha+\varpi)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\cos\varpi} \\
&\quad+\sum E'\sin\tau' \frac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha'_1)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\cos\varpi} \\
&\quad+\sum E'\sin\theta'\sin\tau'_1\sin\theta'_1 \frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha_1-\alpha)\sin(\alpha'_1+\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos^2\varpi}, \\
C_1 &= \sum E'\cos\theta' \frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'} \\
&\quad+\sum E'\sin\theta'\sin\tau'_1\cos\theta'_1 \frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\sin(\alpha'_1-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos\varpi}, \\
D_1 &= \sum E'\sin\theta' \frac{\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha'+\alpha+\varpi)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\cos\varpi} \\
&\quad+\sum E'\sin\tau' \frac{\sin(\alpha'+\alpha_1)\sin(\alpha'-\alpha'_1)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\cos\varpi} \\
&\quad+\sum E'\sin\theta'\sin\tau'_1\sin\theta'_1 \frac{\sin(\alpha'+\alpha)\sin(\alpha'-\alpha)\cos(\alpha_1+\alpha)\sin(\alpha'_1-\alpha)}{2\cos\alpha\sin\alpha'\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos^2\varpi}.
\end{aligned}\right.
$$

Le signe $\sum$ indique la somme de deux termes; pour avoir le second terme, il suffit de remplacer dans le premier E', α', θ', τ' par E'', α'', θ'', τ''.

Dans la pratique, on donne le rayon incident, c'est-à-dire C et D; des deux premières équations on déduira E' et E'', et ensuite des deux dernières C_1 et D_1. Mais on peut simplifier la résolution en négligeant les quantités petites du second ordre.