JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PH. GILBERT

Sur les fonctions de Sturm

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 12 (1867), p. 87-97.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1867_2_12__87_0>

SUR LES FONCTIONS DE STURM;

PAR M. PH. GILBERT,
Professeur à l'Université de Louvain.

§ I.

Soit

$$(1) \qquad V(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

une équation de degré n, dont les racines $a, b, c, \ldots, l$ sont supposées inégales, et posons généralement

$$R_i = V(x) \sum \frac{a^i}{x-a},$$

le signe $\sum$ s'appliquant à toutes les racines de l'équation. Les fonctions R_i, étant toutes de degré $n-1$, seront de la forme

$$R_i = \alpha_i x^{n-1} + \beta_i x^{n-2} + \ldots + \eta_i x^{n-r+1} + \theta_i x^{n-r} + \ldots + \lambda_i,$$

et l'identité

$$\sum \frac{a^i}{x-a} = x \sum \frac{a^{i-1}}{x-a} - \sum a^{i-1}$$

entraînant la relation suivante :

$$R_i = x R_{i-1} - V(x) \sum a^{i-1},$$

il faut que le terme en x^n se réduise à zéro, d'où

$$\alpha_{i-1} = \sum a^{i-1},$$

c'est-à-dire que les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots$ sont les sommes des puissances semblables de degré $0, 1, \ldots, i, \ldots$ des racines de l'équation (1).

Les fonctions R_0, $R_1, \ldots$, R_{n-1} se déduiront donc, par les relations

$$R_1 = xR_0 - \alpha_0 V, \quad R_2 = xR_1 - \alpha_1 V, \ldots, \quad R_{n-1} = xR_{n-2} - \alpha_{n-2} V,$$

de la première R_0, qui est connue, car on a

$$R_0 = \sum \frac{V}{x-a} = V_1 = \text{la dérivée de la fonction } V,$$

et le calcul se fera très-rapidement pour une équation numérique donnée, en usant de simplifications faciles à apercevoir.

§ II.

Cela posé, soient V_1, $V_2, \ldots$ V_{n-1}, V_n les fonctions de Sturm; on a les relations

$$V_2 = V_1 Q_1 - V, \quad V_3 = V_2 Q_2 - V_1, \ldots, \quad V_r = V_{r-1} Q_{r-1} - V_{r-2} \ldots,$$

où Q_1, $Q_2, \ldots$, Q_{r-1} sont les quotients du premier degré en x, et où V_r est de degré $n - r$. Concevons qu'on élimine de la seconde équation V_2 au moyen de la première, de la troisième V_2 et V_3 au moyen des deux précédentes, et ainsi de suite : on arrivera à exprimer chacune des fonctions V_r au moyen de V et V_1 seulement, sous la forme

$$V_r = S_r V_1 - T_r V, \tag{2}$$

et l'on voit sans peine que la fonction S_r renfermera le terme $Q_1 Q_2 \ldots Q_{r-1}$, qui sera de degré plus élevé par rapport à x que tous les autres termes : donc S_r sera de degré $r - 1$, donc nous pouvons poser

$$S_r = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots + q_{r-1} x^{r-1}.$$

D'autre part, si l'on décompose la fraction $\frac{V_r(x)}{V(x)}$ en fractions simples par la formule ordinaire, on obtient

$$\frac{V_r(x)}{V(x)} = \sum \frac{1}{x-a} \frac{V_r(a)}{V_1(a)},$$

et comme $V(a) = 0$, l'équation (2) donne

$$\frac{V_r(x)}{V(x)} = \sum \frac{S_r(a)}{x-a} = \sum \frac{q_0 + q_1 a + q_2 a^2 + \ldots + q_{r-1} a^{r-1}}{x-a},$$

d'où

$$V_r(x) = q_0 R_0 + q_1 R_1 + \ldots + q_{r-1} R_{r-1}.$$

Mais $R_0, R_1, \ldots R_{r-1}$ sont de degré $n-1$, tandis que V_r n'est que de degré $n-r$; il faut donc, en désignant par A_r le coefficient de la plus haute puissance de x dans la fonction V_r, que l'on ait les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} q_0 \alpha_0 + q_1 \alpha_1 + \ldots + q_{r-1} \alpha_{r-1} = 0, \\ q_0 \beta_0 + q_1 \beta_1 + \ldots + q_{r-1} \beta_{r-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_0 \eta_0 + q_1 \eta_1 + \ldots + q_{r-1} \eta_{r-1} = 0, \\ q_0 \theta_0 + q_1 \theta_1 + \ldots + q_{r-1} \theta_{r-1} = A_r. \end{array}\right.$$

Tirons de ces équations les valeurs des coefficients q_i, et posons

$$N_r = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \ldots & \eta_0 & \theta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \ldots & \eta_1 & \theta_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \ldots & \eta_{r-1} & \theta_{r-1} \end{vmatrix},$$

nous aurons immédiatement

$$q_i = \frac{A_r}{N_r} \frac{dN_r}{d\theta_i},$$

d'où

$$V_r = \frac{A_r}{N_r}\left(R_0 \frac{dN_r}{d\theta_0} + R_1 \frac{dN_r}{d\theta_1} + \ldots + R_{r-1} \frac{dN_r}{d\theta_{r-1}}\right)$$

$$= \frac{A_r}{N_r} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \ldots & \eta_0 & R_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \ldots & \eta_1 & R_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \ldots & \eta_{r-1} & R_{r-1} \end{vmatrix}.$$

Observons ici 1° que $\frac{dN_r}{d\theta_{r-1}}$ n'est autre chose que N_{r-1}, et 2° que q_{r-1}, coefficient de la plus haute puissance de x dans S_{r-1}, ne peut être que le produit des coefficients de x dans Q_1, $Q_2, \ldots, Q_{r-1}$, d'où l'on a

$$q_{r-1} = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_3} \cdots \frac{A_{r-2}}{A_{r-1}} = \frac{1}{A_{r-1}},$$

par où l'équation

$$q_{r-1} = \frac{A_r}{N_r} \frac{dN_r}{d\theta_{r-1}} \quad \text{se réduit à celle-ci :} \quad \frac{A_r}{N_r} = \frac{1}{A_{r-1} N_{r-1}}.$$

Il suit de là que $\frac{A_r}{N_r}, \frac{A_{r-1}}{N_{r-1}}, \ldots, \frac{A_1}{N_1} = \frac{n}{n} = 1$ sont de même signe, c'est-à-dire positifs; on peut donc, dans la recherche du nombre de racines réelles de l'équation (1), faire abstraction de ces coefficients $\frac{A_r}{N_r}$ par lesquels les fonctions V_r sont multipliées, et qui ne changent pas leurs signes; on peut donc substituer aux fonctions de Sturm les fonctions

$$(3) \qquad X_r = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \ldots & \eta_0 & R_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \ldots & \eta_1 & R_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \ldots & \eta_{r-1} & R_{r-1} \end{vmatrix}.$$

Mais il est clair que dans le développement de cette expression, les coefficients de $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x^{n-r+1}$ se réduisent à zéro, comme déterminants qui ont deux colonnes égales; on peut donc supprimer ces termes dans les fonctions R_i, et la série des fonctions X_r, propres à déterminer le nombre des racines réelles de l'équation $V = 0$, prendra la forme

$$V(x), \quad X_1 = R_0 = \alpha_0 x^{n-1} + \beta_0 x^{n-2} + \ldots + \lambda_0,$$

$$X_2 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 x^{n-2} + \ldots + \lambda_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 x^{n-2} + \ldots + \lambda_1 \end{vmatrix}, \quad X_3 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 x^{n-3} + \ldots + \lambda_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 x^{n-3} + \ldots + \lambda_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 x^{n-3} + \ldots + \lambda_2 \end{vmatrix},$$

. . . .

$$X_n = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \ldots & \lambda_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \ldots & \lambda_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \ldots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix}.$$

On voit que ces fonctions se composent fort simplement au moyen des seuls coefficients des fonctions R_i, et que, celles-ci une fois formées, on peut écrire immédiatement le coefficient d'une puissance quelconque des fonctions X_r, sans passer par aucun intermédiaire.

Nous venons de dire que l'on peut faire abstraction des coefficients positifs $\frac{A_r}{N_r}$ qui multiplient les fonctions sturmiennes; mais on peut aussi les calculer au moyen des coefficients α_i, β_i,..., car la relation

$$\frac{A_r}{N_r} = \frac{1}{A_{r-1}\,N_{r-1}} = \frac{1}{A_{r-1}^2}\,\frac{A_{r-1}}{N_{r-1}}$$

donne celle-ci :

$$A_r = \frac{N_r}{A_{r-1}^2}\cdot\frac{1}{A_{r-2}^2}\cdots\frac{1}{A_1^2} = \frac{N_r}{(A_1\,A_2\ldots A_{r-1})^2},$$

et comme $A_1 = n$ est connu, on aura successivement A_2, A_3,....

§ III.

Montrons brièvement comment, en faisant usage des propriétés élémentaires des déterminants, on tire des formules ci-dessus les expressions des fonctions de Sturm données par plusieurs analystes. Pour cela, nous observerons que la relation

$$R_i = x\,R_{i-1} - \alpha_{i-1}\,V$$

entraîne les suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \beta_{i-1} - p_1\,\alpha_{i-1},\\
\beta_i &= \gamma_{i-1} - p_2\,\alpha_{i-1},\\
\gamma_i &= \delta_{i-1} - p_3\,\alpha_{i-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\eta_i &= \theta_{i-1} - p_{r-1}\,\alpha_{i-1},
\end{aligned}$$

d'où il suit que si dans le déterminant

$$X_r = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0\ldots & \eta_0 & R_0 \\ \alpha_1 & \beta_1\ldots & \eta_1 & R_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1}\ldots & \eta_{r-1} & R_{r-1} \end{vmatrix}$$

on ajoute aux termes de la seconde colonne ceux de la première multipliés par $-p_1$, aux termes de la troisième ceux de la première multipliés par $-p_2$, et ceux de la seconde transformée multipliés par $-p_1$, et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernière colonne, on arrivera facilement à l'expression

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_{r-2} & \mathrm{R}_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \ldots & \alpha_{r-1} & \mathrm{R}_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r-1} & \alpha_r & \alpha_{r+1} \ldots & \alpha_{2r-3} & \mathrm{R}_{r-1} \end{vmatrix}.$$

Mais d'autre part, si l'on pose

$$s_i = \sum a^i = \alpha_i, \quad u_i = \sum \frac{a^i}{x-a} = \frac{\mathrm{R}_i}{\mathrm{V}},$$

la formule précédente se réduit à

$$(4) \qquad \mathrm{X}_r = \mathrm{V} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots & s_{r-2} & u_0 \\ s_1 & s_2 \ldots & s_{r-1} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{r-1} & s_r \ldots & s_{2r-3} & u_{r-1} \end{vmatrix},$$

ce qui est précisément la formule donnée par M. Cayley [*]. Réciproquement, on pourrait en déduire celle que nous avons établie d'abord.

Lorsque l'on veut exprimer les fonctions X_r au moyen des coefficients p_i de l'équation proposée, on doit observer que l'on a

$$\alpha_0 = n, \quad \beta_0 = (n-1)p_1 \quad \gamma_0 = (n-2)p_2, \ldots,$$
$$\alpha_1 = -p_1, \quad \beta_1 = -2p_2, \quad \gamma_1 = -3p_3, \ldots,$$

et on élimine tous les autres coefficients à l'aide de la loi de déduction.

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XI, p. 297.

Prenons par exemple X_3 :

$$X_3 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ R_0 & R_1 & R_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 - \alpha_0 p_1 & \beta_1 - \alpha_1 p_1 \\ \beta_0 & \gamma_0 - \alpha_0 p_2 & \gamma_1 - \alpha_1 p_2 \\ R_0 & x R_0 - \alpha_0 V & x R_1 - \alpha_1 V \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ p_1 & \alpha_0 & \beta_0 & \beta_1 \\ p_2 & \beta_0 & \gamma_0 & \gamma_1 \\ V & R_0 & x R_0 & x R_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha_0 & \beta_0 - \alpha_0 p_1 \\ p_1 & \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 - \alpha_0 p_2 \\ p_2 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 - \alpha_0 p_3 \\ V & R_0 & x R_0 & x^2 R_0 - \alpha_0 x V \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \\ p_1 & 1 & 0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ p_2 & p_1 & \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ p_3 & p_2 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ xV & V & R_0 & x R_0 & x^2 R_0 \end{vmatrix},$$

d'où

$$X_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & n \\ p_1 & 1 & 0 & n & (n-1) p_1 \\ p_2 & p_1 & n & (n-1) p_1 & (n-2) p_2 \\ p_3 & p_2 & (n-1) p_1 & (n-2) p_2 & (n-3) p_3 \\ xV & V & V_1 & x V_1 & x^2 V_1 \end{vmatrix}.$$

La loi de formation des fonctions X_r se montre déjà suffisamment. On pourrait également exprimer les déterminants N_r directement au moyen des coefficients de l'équation proposée, par une marche semblable : ces formules sont tout à fait analogues à celles données par M. Cayley [*] et par M. Brioschi [**] pour remplir le même objet; elles ne sont d'ailleurs d'aucune utilité pour la formation des fonctions X_r sur une équation numérique donnée. On y voit aussi comment on pourrait former les fonctions S_r et T_r.

Reprenons maintenant l'expression (4) de X_r, en l'écrivant sous la

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIII, p. 269.

[**] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIII, p. 71 ; 1854.

forme

$$\frac{X_r}{V} = \begin{vmatrix} u_0 & -s_0 & -s_1 \ldots & -s_{r-2} \\ u_1 & -s_1 & -s_2 \ldots & -s_{r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{r-1} & -s_{r-1} & -s_r \ldots & -s_{2r-3} \end{vmatrix},$$

et en nous rappelant que l'on a la relation

$$u_i = x u_{i-1} - s_{i-1}.$$

Ajoutons aux termes de la seconde colonne ceux de la première multipliés par x, aux termes de la troisième ceux de la seconde transformée multipliés par x, et ainsi de suite, il viendra

$$\frac{X_r}{V} = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \ldots & u_{r-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 \ldots & u_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{r-1} & u_r & u_{r+1} \ldots & u_{2r-2} \end{vmatrix}.$$

C'est sous cette forme que M. Hermite a obtenu, par une voie tout à fait nouvelle [*], les fonctions de Sturm. De là on déduit sans peine la transformation célèbre due à M. Sylvester. En effet, on a posé

$$u_i = \sum \frac{a^i}{x-a},$$

et en ayant égard à une propriété connue des déterminants, on donne à l'équation ci-dessus la forme

$$\frac{X_r}{V} = \mathrm{S} \begin{vmatrix} \frac{1}{x-a} & \frac{b}{x-b} \cdots & \frac{g^{r-1}}{x-g} \\ \frac{a}{x-a} & \frac{b^2}{x-b} \cdots & \frac{g^r}{x-g} \\ \frac{a^2}{x-a} & \frac{b^3}{x-b} \cdots & \frac{g^{r+1}}{x-g} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a^{r-1}}{x-a} & \frac{b^r}{x-b} \cdots & \frac{g^{2r-2}}{x-g} \end{vmatrix},$$

[*] *Programme détaillé d'un cours d'Arithmétique*, par Roguet, note VI.

$\mathbf{S}$ désignant une somme de déterminants semblables obtenus en remplaçant successivement a, b, g,... par toutes les racines de l'équation (1), et négligeant, comme nuls, ceux où une même racine figure dans deux colonnes. On tire de là

$$\frac{X^r}{V} = \mathbf{S} \begin{vmatrix} 1 & 1\ldots & 1 \\ a & b\ldots & g \\ a^2 & b^2\ldots & g^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{r-1} & b^{r-1}\ldots & g^{r-1} \end{vmatrix} \times \frac{a^0 b^1 c^2 \ldots g^{r-1}}{(x-a)(x-b)\ldots(x-g)},$$

mais dans cette somme désignée par $\mathbf{S}$ on peut grouper ensemble tous les termes où entrent les mêmes racines $a, b,\ldots, g$, ces termes ayant le même dénominateur $(x-a)(x-b)\ldots(x-g)$, et le même déterminant facteur, au signe près; on voit alors sans peine que la somme des termes

$$\pm a^0 b^1 c^2 \ldots g^{r-1}$$

se réduira à ce même déterminant, d'où résulte l'équation

$$\frac{X_r}{V} = \mathbf{S} \begin{vmatrix} 1 & 1\ldots & 1 \\ a & b\ldots & g \\ a^2 & b^2\ldots & g^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{r-1} & b^{r-1}\ldots & g^{r-1} \end{vmatrix}^2 \times \frac{1}{(x-a)(x-b)\ldots(x-g)},$$

qui n'est autre qu'une équation de M. Cayley [*]. Le signe $\mathbf{S}$ se rapporte maintenant à toutes les combinaisons différentes des n racines, prises r à r.

Enfin rappelons-nous que le déterminant dont le carré figure dans cette formule est égal, en vertu d'un théorème connu, à

$$\pm(a-b)(a-c)\ldots(a-g)(b-c)\ldots(b-g)\ldots(f-g),$$

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XI.

c'est-à-dire au produit des différences des racines $a, b,\ldots, g$, prises deux à deux ; et en faisant cette substitution, il vient

$$X_r = V\, \mathbf{S}\, \frac{(a-b)^2(a-c)^2\ldots(f-g)^2}{(x-a)(x-b)\ldots(x-g)}.$$

On reconnaît là les formules de M. Sylvester [*]. Ainsi nos fonctions X_r ne sont autre chose que les fonctions de ce géomètre.

§ IV.

Il résulte évidemment de la formule de M. Sylvester, comme Sturm l'a fait voir, que la dernière fonction X_n se réduit au produit des carrés des différences des n racines $a, b,\ldots, l$ de l'équation (1), ou au *dernier terme* H *de l'équation aux carrés des différences*. On a donc, d'après nos formules,

$$(5) \qquad H = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0\ldots & \lambda_0 \\ \alpha_1 & \beta_1\ldots & \lambda_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1}\ldots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix}$$

expression remarquable de ce dernier terme au moyen des coefficients des fonctions $R_0, R_1,\ldots, R_{n-i}$.

Appliquons ce procédé de formation à l'équation du troisième degré

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

On trouve immédiatement

$$R_0 = 3x^2 + 2px + q, \quad R_1 = -px^2 - 2qx - 3r,$$
$$R_2 = (p^2 - 2q)x^2 + (pq - 3r)x + pr,$$

d'où

$$H = \begin{vmatrix} 3 & -p & p^2 - 2q \\ 2p & -2q & pq - 3r \\ q & -3r & pr \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & p & 2q \\ 2p & 2q & pq + 3r \\ q & 3r & 2pr \end{vmatrix},$$

---

[*] *Philosophical Transactions*, 1853, III. — *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, p. 368.

d'où

$$H = 18pqr - 27r^2 + p^2q^2 - 4p^3r - 4q^3.$$

De même, pour l'équation du quatrième degré

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

on aura

$$\begin{aligned}
R_0 &= 4x^3 + 3px^2 + 2qx + r,\\
R_1 &= -px^3 - 2qx^2 - 3rx - 4s,\\
R_2 &= (p^2 - 2q)x^3 + (pq - 3r)x^2 + (pr - 4s)x + ps,\\
R_3 &= [(pq - 3r) - p(p^2 - 2q)]x^3 + [(pr - 4s) - q(p^2 - 2q)]x^2,\\
&\quad + [ps - r(p^2 - 2q)]x - s(p^2 - 2q),
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en appliquant la forme (5) et en faisant quelques simplifications évidentes,

$$H = -\begin{vmatrix} 4 & p & 2q & 3r \\ 3p & 2q & pq + 3r & 2pr + 4s \\ 2q & 3r & 2pr + 4s & 3ps + qr \\ r & 4s & 3ps & 2qs \end{vmatrix},$$

de sorte qu'il ne reste plus qu'à développer ce déterminant.

Si l'on compare cette méthode pour calculer le dernier terme de l'équation aux différences avec les procédés antérieurement donnés (Serret, *Algèbre supérieure*, 2e édition, p. 30 et 452), on trouvera sans doute qu'elle est plus facile à retenir, plus rapide, qu'elle s'applique immédiatement à une équation numérique donnée, et qu'enfin elle a l'avantage de conduire directement à l'expression du terme H pour une équation de degré n, sans qu'il soit nécessaire de passer par toutes les équations de degré inférieur à n.