JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. TCHÉBYCHEF

Des maxima et minima des sommes composées de valeurs d'une fonction entière et de ses dérivées

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 13 (1868), p. 9-42.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1868_2_13__9_0>

Des maxima *et* minima *des sommes composées de valeurs d'une fonction entière et de ses dérivées ;*

Par M. P. TCHÉBYCHEF.

Traduction du russe, par M. N. de Khanikof.

Extrait des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XII.

---

1. Le calcul des variations nous donne le moyen de déterminer les valeurs *maxima* et *minima* des intégrales uniquement dans le cas, où la forme des fonctions inconnues, renfermées sous le signe de l'intégration, est supposée entièrement arbitraire. Mais si, d'après la nature de la question, la forme de ces fonctions inconnues est limitée par quelques conditions, leur détermination, en vue de rendre *maximum* ou *minimum* une intégrale, ou en général une somme quelconque de leurs valeurs, exige des procédés particuliers.

Nous nous bornerons ici à considérer le cas le plus simple de ce genre de questions; savoir, celui où la fonction inconnue est supposée entière et d'un degré déterminé, et où tous les termes de la somme proposée s'expriment au moyen de cette fonction, de ses dérivées et d'une variable indépendante, et forment une fonction également entière et de forme déterminée.

Ce cas mérite une attention particulière à cause de ses applications, qui comprennent, entre autres, la solution de la question de l'interpolation parabolique d'après la méthode *des moindres carrés*.

2. Soit

$$F(x, y, y', y'', \ldots)$$

une fonction donnée et entière de la variable indépendante x du polynôme inconnu

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_l x^l + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

et de ses dérivées

$$y', y'', \ldots.$$

Désignons par x_1, x_2, $x_3, \ldots$ une série de valeurs quelconques de la variable indépendante x, que pour plus de simplicité nous supposerons différentes entre elles, et par $\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)$ la somme des valeurs de la fonction $F(x, y, y', y'', \ldots)$ pour ces valeurs de la variable x. La valeur de cette somme dépendra de celle des coefficients A_0, $A_1, \ldots$, $A_l, \ldots$, A_{m-1} du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_l x^l + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

et les valeurs de ces coefficients qui rendront la somme

$$\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)$$

un *maximum* ou un *minimum*, d'après les principes du calcul différentiel, seront données par les équations :

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{d A_0} = 0,$$

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i, y''_i, \ldots)}{d A_1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{d A_l} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{d A_{m-1}} = 0.$$

Mais comme les quantités A_0, $A_1, \ldots, A_l, \ldots, A_{m-1}$ n'entrent pas dans la formule $\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)$ indépendamment des fonctions $y, y', y'', \ldots$, la dérivée de cette somme par rapport à A_l s'exprimera en général ainsi :

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_l} = \sum \frac{dF(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_l}$$
$$= \sum \frac{dF(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dy_i}\frac{dy_i}{dA_l} + \sum \frac{dF(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dy'_i}\frac{dy'_i}{dA_l}$$
$$+ \sum \frac{dF(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dy''_i}\frac{dy''_i}{dA_l} + \ldots.$$

Or la forme de la fonction

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_l x^l + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

et de ses dérivées

$$y' = 1.A_1 + \ldots + l A_l x^{l-1} + \ldots + (m-1) A_{m-1} x^{m-1},$$
$$y'' = 1.2.A_2 + \ldots + l(l-1) A_l x^{l-2} + \ldots + (m-1)(m-2) A_{m-1} x^{m-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

nous donne

$$\frac{dy_i}{dA_l} = x_i^l, \quad \frac{dy'_i}{dA_l} = l x_i^{l-1}, \quad \frac{dy''}{dA_l} = l(l-1) x_i^{l-2}, \ldots.$$

En mettant ces valeurs des dérivées $\frac{dy_i}{dA_l}, \frac{dy'_i}{dA_l}, \frac{dy''_i}{dA_l}, \ldots$ dans l'expression trouvée pour la dérivée $\frac{d\sum F(x_i, y_i, y'_i, \ldots)}{dA_l}$, et en désignant, pour abréger, les valeurs des dérivées $\frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dy'}, \frac{dF}{dy''}$ pour x quelconque par M, N, P,..., et pour $x = x_i$ par M_i, N_i, P_i, nous aurons

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i \ldots)}{dA_l} = \sum M_i x_i^l + \sum l N_i x_i^{l-1} + \sum l(l-1) P_i x_i^{l-2} + \ldots.$$

En déterminant, à l'aide de cette formule, les valeurs et la dérivée $\frac{d\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_l}$ pour $l = 0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$, nous verrons que les équations qui déterminent les valeurs du coefficient du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

qui rendent la somme $\sum F(x_i, y_i, y'_i, \ldots)$ un *maximum* ou un *minimum*, se réduisent donc à :

$$\sum M_i x_i^0 = 0,$$

$$\sum M_i x_i + \sum 1.N_i x_i^0 = 0,$$

$$\sum M_i x_i^2 + \sum 2N_i x_i + \sum 1.2.P_i x_i^0 = 0,$$

. . . .

$$\sum M_i x_i^{m-1} + \sum (m-1) N_i x_i^{m-2} + \sum (m-1)(m-2) P_i x_i^{m-3} + \ldots = 0.$$

3. Faisant, pour abréger,

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{m-1}) = \varphi(x),$$

et désignant par U, V, W,... les fonctions entières qu'on obtient en divisant les produits $M\varphi'(x)$, $N\varphi'(x)$, $P\varphi'(x)$,... par $\varphi(x)$, nous remarquons que les fractions

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \ldots,$$

transformées en fractions simples, s'expriment ainsi :

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} = U + \sum \frac{M_i}{x - x_i};$$

$$\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)} = V + \sum \frac{N_i}{x - x_i};$$

$$\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)} = W + \sum \frac{P_i}{x - x_i};$$

. . . .

où, d'après notre notation (n° **2**) M_i, N_i, P_i,... désignent les valeurs de M, N, P,... quand on y fait $x = x_i$, et les sommations doivent être étendues à toutes les valeurs de x, depuis $x = x_1$ jusqu'à $x = x_m$.

Si, à l'aide de ces formules, nous déterminons la valeur de l'expression

$$(1)\qquad \frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d\,\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\,\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots,$$

nous trouverons qu'elle se réduit à

$$U - \frac{dV}{dx} + \frac{d^2W}{dx^2} - \ldots + \sum\left(\frac{M_i}{x - x_i} + \frac{N_i}{(x - x_i)^2} + \frac{P_i}{(x - x_i)^3} + \ldots\right),$$

où les termes $U - \frac{dV}{dx} + \frac{d^2W}{dx^2} - \ldots$, expriment une fonction entière. Quant à la somme

$$\sum\left[\frac{M_i}{x - x_i} + \frac{N_i}{(x - x_i)^2} + \frac{P_i}{(x - x_i)^3} + \ldots\right],$$

après y avoir transformé les fractions $\frac{M_i}{x - x_i}$, $\frac{N_i}{(x - x_i)^2}$, $\frac{P_i}{(x - x_i)^3}$, .., en séries

$$\frac{M_i x_i^0}{x} + \frac{M_i x_i}{x^2} + \frac{M_i x_i^2}{x^3} + \ldots,$$

$$\frac{N_i x_i^0}{x^2} + \frac{2N_i x_i}{x^3} + \frac{3N_i x_i^2}{x^4} + \ldots,$$

$$\frac{1.2P_i x_i^0}{x^3} + \frac{2.3P_i x_i}{x^4} + \frac{3.4P_i x_i^2}{x^5} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et après y avoir réuni les termes de dénominateurs communs, elle nous donne la série suivante :

$$\sum\frac{M_i x_i^0}{x} + \frac{\sum M_i x_i + \sum 1.N_i x_i^0}{x^2} + \frac{\sum M_i x_i^2 + \sum 2N_i x_i + \sum 1.2\,P_i x_i^0}{x^3} + \ldots.$$

Donc il résulte que les sommes

$$\sum M_i x_i^0,$$

$$\sum M_i x_i + \sum N_i x_i^0,$$

$$\sum M_i x_i^2 + \sum 2 N_i x_i + \sum 1.2 P_i x_i^0,$$

. . . .

$$\sum M_i x_i^{m-1} + \sum (m-1) N_i x^{m-2} + \sum (m-1)(m-2) P_i x_i^{m-3} + \ldots$$

sont les coefficients de $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^m}$, dans le développement de l'expression

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots,$$

selon les puissances décroissantes de la variable x. Mais nous savons, d'après le n° **2**, que ces sommes forment les premiers membres des équations qui déterminent les valeurs des coefficients du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

pour lesquels la somme $\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)$ devient un maximum ou un minimum, et nous concluons que ces équations s'obtiennent en réduisant à zéro les coefficients de $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^m}$, dans le développement de l'expression

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots,$$

suivant les puissances décroissantes de la variable x. Partant sous cette condition :

L'expression $\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots$, *avec une approximation poussée jusqu'aux puissances* x^{-m} *inclusivement, est égale à une* *fonction entière*, où M, N, P,... sont, comme nous l'avons vu dans le n° **2**, les dérivées partielles de la fonction $F(x, y, y', y'', \ldots)$, prises par rapport à $y, y', y'', \ldots$.

4. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que les coefficients du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

étaient entièrement arbitraires : examinons maintenant le cas où le choix de ces coefficients est limité par plusieurs équations de la forme

$$\begin{array}{l} \sum f_1(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) = \alpha_1, \\ \sum f_2(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) = \alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

où $f_1(x, y, y', y'', \ldots)$, $f_2(x, y, y', y'', \ldots)$ sont des fonctions quelconques entières de x, du polynôme y et de ses dérivées $y', y'', \ldots$. Nous supposerons, pour commencer, que les sommes que nous venons d'écrire s'étendent à toutes les valeurs de la variable x

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m-1},$$

ainsi que la somme $\sum f_0(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots$, dont on cherche la valeur maximum ou minimum.

Par les propriétés connues des *maxima* et *minima relatifs*, les valeurs des coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$, qui rendent la somme $\sum f_0(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)$ un maximum ou un minimum sous les conditions exprimées par les équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum f_1(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) = \alpha_1, \\ \sum f_2(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) = \alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

sont déterminées en égalant à zéro les dérivées partielles prises par rapport à $A_0, A_1, \ldots, A_m$ de la somme

$$\sum f_0(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) + \lambda_1 \sum f_1(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) \\ + \lambda_2 \sum f_2(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) + \ldots,$$

où les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont des facteurs constants. Cette somme se ramène à la suivante :

$$\sum [f_0(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) + \lambda_1 f_1(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) \\ + \lambda_2 f_2(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) + \ldots],$$

qui peut être remplacée par

$$\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots),$$

en supposant que

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = f_0(x, y, y', y'', \ldots) + \lambda_1 f_1(x, y, y', y'', \ldots) \\ + \lambda_2 f_2(x, y, y', y'', \ldots) + \ldots.$$

Ainsi, d'après ce qui vient d'être exposé dans les nos **2** et **3**, concernant les équations

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_0} = 0,$$

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_{m-1}} = 0,$$

nous concluons que, dans le cas actuel, les équations propres à déterminer les coefficients du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

se réduiront à la condition trouvée à la fin du n° 3, en ne perdant pas toutefois de vue que la fonction $F(x, y, y', y'', \ldots)$ doit être remplacée par la somme

$$f_0(x, y, y', y'', \ldots) + \lambda_1 f_1(x, y, y', y'', \ldots) + \lambda_2 f_2(x, y, y', y'', \ldots) + \ldots,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont des facteurs inconnus constants. Cette condition nous donnera les moyens de déterminer les coefficients du polynôme $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$ en fonction des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. En mettant enfin ces coefficients du polynôme y dans les équations (2), nous aurons autant d'équations qu'il y a de facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, d'où nous obtiendrons leur valeur.

5. Passons maintenant au cas où il s'agirait de rendre maximum ou minimum une somme

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$$

étendue aux valeurs $x_1 = a_1, a_2, a_3, \ldots$, mais de façon que le choix des coefficients du polynôme $y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$ soit limité par les équations de condition

$$\begin{aligned} &\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_1, \\ &\sum \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où les sommes s'étendent respectivement à toutes les valeurs de x :

$$\begin{aligned} &x = b_1, b_2, b_3, \ldots, \\ &x = c_1, c_2, c_3, \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

différentes entre elles et différentes aussi des valeurs $x = a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Pour réduire ce cas à celui que nous venons d'examiner dans le numéro précédent, nous remplacerons toutes ces sommes, étendues à différentes valeurs de la variable x, par des sommes étendues aux mêmes valeurs de la variable indépendante. Pour y parvenir, nous poserons

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots=\varphi_0(x),$$
$$(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\ldots=\varphi_1(x),$$
$$(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots=\varphi_2(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_0(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots\\ \times(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\ldots\\ \times(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots\\ \times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \varphi(x).\end{aligned}$$

Puis nous déterminerons des fonctions entières S_0, S_1, S_2,..., et T_0, T_1, T_2,..., de manière à ce qu'elles satisfassent aux équations

$$(3)\qquad\left\{\begin{aligned}&\varphi'(x)S_0=\varphi(x)T_0+\varphi'_0(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots,\\ &\varphi'(x)S_1=\varphi(x)T_1+\varphi'_1(x)\varphi_0(x)\varphi_2(x)\ldots,\\ &\varphi'(x)S_2=\varphi(x)T_2+\varphi'_2(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)\ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Ces équations auront toujours une solution, car, par hypothèse, les racines de l'équation $\varphi(x)=0$, égales à $a_1, a_2,\ldots; b_1, b_2,\ldots; c_1, c_2\ldots; \ldots;$ diffèrent toutes entre elles; donc la fonction $\varphi(x)$ n'aura pas de facteur commun avec sa dérivée $\varphi'(x)$. Il sera aisé de montrer, à l'aide de ces équations (3), que les sommes $\sum S_0\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)$, $\sum S_1\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots)$, $\sum S_2\Phi_2(x, y, y', y'',\ldots)$,..., étendues à toutes les valeurs de $x=a_1, a_2, a_3,\ldots; b_1, b_2, b_3,\ldots; c_1, c_2, c_3,\ldots; \ldots;$ se réduiront : à la somme $\sum\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)$, étendue uniquement aux valeurs de $x=a_1, a_2, a_3,\ldots$; à la somme $\sum\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots)$, étendue uniquement aux valeurs de $x=b_1, b_2, b_3,\ldots$; à la somme $\sum\Phi_2(x, y, y', y'',\ldots)$, étendue uniquement aux valeurs de $x=c_1$, $c_2, c_3,\ldots$, et ainsi de suite.

Pour le faire voir à l'égard de la somme $\sum S_0\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)$, nous remarquons que, d'après l'équation

$$\varphi'(x)\,S_0 = \varphi(x)\,T_0 + \varphi'_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots,$$

et d'après la manière dont les fonctions $\varphi(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x),\ldots$ sont formées, la fonction S_0 deviendra zéro pour $x = b_1, b_2, b_3,\ldots$; $c_1, c_2, c_3,\ldots$; ..., c'est-à-dire pour les racines communes aux équations $\varphi(x) = 0$ et $\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots = 0$, car, pour ces valeurs de la variable x, la dérivée $\varphi'(x)$ ne pourra pas devenir zéro, n'ayant pas, comme nous venons de le dire, de facteur commun avec $\varphi(x)$.

D'un autre côté, pour $x = a_1, a_2, a_3,\ldots$, racines communes aux équations $\varphi(x) = 0$ et $\varphi_0(x) = 0$, nous voyons que la dérivée

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = \frac{d\,\varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots}{dx} = {}& \varphi'_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots\\ &+ \varphi'_1(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_2(x)\ldots\\ &+ \varphi'_2(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\ldots\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

se réduit au produit

$$\varphi'_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots,$$

et par conséquent, en vertu de l'équation

$$\varphi'(x)\,S_0 = \varphi(x)\,T_0 + \varphi'_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots,$$

pour ces valeurs de x, ou bien pour $x = a_1, a_2, a_3,\ldots$, S_0 sera égale à 1.

D'où il est évident que la somme $\sum S_0\,\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)$, étendue à toutes les valeurs de la variable x, $x = a_1, a_2, a_3,\ldots$; $b_1, b_2, b_3,\ldots$; $c_1, c_2, c_3,\ldots$, se réduit à la somme $\sum \Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)$, étendue uniquement aux valeurs de x, $x = a_1, a_2, a_3,\ldots$.

Nous trouverons de même que les sommes

$$\sum S_1\,\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots),\quad \sum S_2\,\Phi_2(x, y, y', y'',\ldots),\ldots,$$

étendues aux valeurs de la variable x, $x = a_1, a_2, a_3,\ldots$; $b_1, b_2,$

$b_3,\ldots; \ldots, c_1, c_2, c_3,\ldots$, se réduisent à la somme $\sum \Phi_1(x, y, y', y'',\ldots)$, étendue seulement aux valeurs de $x = b_1, b_2, b_3,\ldots$; à la somme $\sum \Phi_2(x, y, y', y'',\ldots)$, étendue seulement aux valeurs de $x = c_1$, $c_2, c_3,\ldots$, et ainsi de suite.

En remplaçant, d'après ce qui vient d'être dit, les sommes $\sum \Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)$, $\sum \Phi_1(x, y, y', y'',\ldots),\ldots$, étendues chacune à des valeurs différentes de la variable x, par les sommes $\sum S_0\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots), \sum S_1\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots), \sum S_2\Phi_2(x, y, y', y'',\ldots),\ldots$, étendues aux mêmes valeurs de la variable x données par l'équation $\varphi(x) = 0$, nous concluons que dans ce cas les coefficients du polynôme $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$ se détermineront par la méthode indiquée dans le numéro précédent, quand on remplacera dans les formules de ce numéro les fonctions $f_0(x, y, y', y'',\ldots)$, $f_1(x, y, y', y'',\ldots)$, $f_2(x, y, y', y'',\ldots),\ldots$, par les produits $S_0\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)$, $S_1\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots)$, $S_2\Phi_2(x, y, y', y'',\ldots),\ldots$, et par conséquent ils se détermineront par la condition établie à la fin du n° **3** si l'on y pose

$$\begin{aligned} F(x, y, y', y'',\ldots) = S_0\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots) + \lambda_1 S_1\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots) \\ + \lambda_2 S_2\Phi_2(x, y, y', y'',\ldots) + \ldots, \end{aligned}$$

où $\lambda_1, \lambda_2,\ldots$, sont des facteurs constants, mais inconnus.

En déterminant, pour cette forme de la fonction $F(x, y, y', y'',\ldots)$, la valeur des dérivées

$$\begin{aligned} M &= \frac{dF(x, y, y', y'',\ldots)}{dy}, \\ N &= \frac{dF(x, y, y', y'',\ldots)}{dy'}, \\ P &= \frac{dF(x, y, y', y'',\ldots)}{dy''}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et en désignant les dérivées partielles des fonctions $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2,\ldots,$

prises par rapport à $y, y', y'', \ldots$, par $M_0, M_1, M_2, \ldots$, $N_0, N_1, N_2, \ldots$, $P_0, P_1, P_2, \ldots$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
M &= S_0 M_0 + \lambda_1 S_1 M_1 + \lambda_2 S_2 M_2 + \ldots, \\
N &= S_0 N_0 + \lambda_1 S_1 N_1 + \lambda_2 S_2 N_2 + \ldots, \\
P &= S_0 P_0 + \lambda_1 S_1 P_1 + \lambda_2 S_2 P_2 + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc l'expression (1), qui d'après le n° **3**, doit être égale, pour la valeur cherchée du polynôme $y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$, à une fonction entière, avec une approximation poussée jusqu'à la puissance x^{-m} inclusivement, s'exprimera ainsi :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{S_0 M_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \frac{S_1 M_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \frac{S_2 M_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \ldots \\
&- \frac{d\left[\frac{S_0 N_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \frac{S_1 N_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \frac{S_2 N_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \ldots\right]}{dx} \\
&+ \frac{d^2\left[\frac{S_0 P_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \frac{S_1 P_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \frac{S_2 P_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \ldots\right]}{dx^2} \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Mais les équations (3), qui servent à déterminer les fonctions S_0, S_1, $S_2, \ldots$, nous donnent

$$\begin{aligned}
\frac{S_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} &= T_0 + \frac{\varphi'(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots}{\varphi(x)}, \\
\frac{S_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} &= T_1 + \frac{\varphi_1'(x)\varphi_0(x)\varphi_2(x)\ldots}{\varphi(x)}, \\
\frac{S_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} &= T_2 + \frac{\varphi_2'(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)\ldots}{\varphi(x)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En remplaçant, dans les seconds membres de ces équations, $\varphi(x)$ par le produit $\varphi_0(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)$, nous aurons

$$\frac{S_0\varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_0 + \frac{\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)},$$
$$\frac{S_1\varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_1 + \frac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)},$$
$$\frac{S_2\varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_2 + \frac{\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

D'où l'on voit que les fonctions $\frac{S_0\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \frac{S_1\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \frac{S_2\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \ldots$ et $\frac{\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}, \frac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)}, \frac{\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)}, \ldots$ ne diffèrent entre elles que par des parties entières. Donc, si dans l'expression (4), nous mettons ces dernières à la place des premières, nous ne changerons que la partie entière de cette expression; quant au degré d'exactitude avec lequel cette formule représente une fonction, il restera le même, et par conséquent elle pourra toujours servir à déterminer le polynôme $y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1}x^{m-1}$. En exécutant cette substitution nous obtenons l'expression suivante :

$$(4\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{M_0\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1\frac{M_1\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2\frac{M_2\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots \\ &\quad - \frac{d\left[\frac{N_0\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1\frac{N_1\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2\frac{N_2\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots\right]}{dx} \\ &\quad + \frac{d^2\left[\frac{P_0\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1\frac{P_1\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2\frac{P_2\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots\right]}{dx^2} \\ &\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Cette expression, d'après ce qui vient d'être exposé, doit se réduire à une fonction entière, qui la représentera exactement jusqu'à la puissance $-m$ de la variable x inclusivement, toutes les fois que le polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1}x^{m-1}$$

aura des coefficients voulus pour que la somme $\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$

devienne un maximum ou un minimum, sous les conditions

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_1, \quad \sum \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_2, \ldots$$

Nous sommes parvenus à cette conclusion en supposant que les séries $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots, c_1, c_2, c_3, \ldots$ ne contenaient pas des termes égaux entre eux; mais, par la méthode des limites, il nous serait aisé de l'appliquer aussi au cas où ces séries auraient des membres communs.

6. Nous avons établi dans ce qui précède, la condition qui sert à déterminer la valeur du polynôme, d'un degré donné y, qui rend la somme $\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$ un maximum ou un minimum, et nous n'avons fait que deux hypothèses concernant les coefficients de ce polynôme. D'après l'une, leurs valeurs étaient supposées arbitraires, et d'après l'autre, elles devaient satisfaire aux équations

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_1, \quad \sum \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_2, \ldots.$$

Dans ce dernier cas, la condition qui sert à déterminer le polynôme cherché contient des constantes inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, dont la valeur se trouve par les mêmes équations de condition auxquelles doit satisfaire le polynôme y, et qui sont en nombre égal à celui des inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$.

La détermination du polynôme y, limité par la condition de rendre la somme $\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$ un maximum ou un minimum, a de l'analogie avec la solution des questions semblables dans le calcul des variations. Dans le cas particulier, quand cette somme se réduit à une intégrale, le polynôme y, déterminé comme il vient d'être dit, peut être considéré comme une valeur approchée de la fonction qu'on obtient à l'aide de la méthode des variations. Mais dans le calcul des variations, la fonction cherchée, étant déterminée par une équation différentielle, s'obtient en l'intégrant par les méthodes connues, tandis que, dans le cas que nous examinons, la détermination du polynôme y exige des procédés spéciaux, car elle se réduit à une condition qui ne se laisse pas exprimer par des équations de formes connues.

Pour montrer comment des polynômes peuvent être déterminés à l'aide de ces conditions, examinons le cas très-simple où les fonctions $\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$, $\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots)$, $\Phi_2(x, y, y', y'', \ldots)\ldots$ ne contiennent y qu'à une puissance qui ne dépasse pas la seconde, ses dérivées $y', y'', \ldots$ à une puissance qui ne dépasse pas l'unité, et avec des coefficients qui ne dépendent que de la variable x.

Dans ce cas les dérivées

$$M_0 = \frac{d\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)}{dy}, \quad M_1 = \frac{d\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots)}{dy}, \ldots$$

ne contiendront pas $y', y'', \ldots$, et y ne s'y trouvera qu'à la première puissance. Pour les dérivées

$$N_0 = \frac{d\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)}{dy'}, \quad N_1 = \frac{d\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots)}{dy'}, \ldots,$$

$$P_0 = \frac{d\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)}{dy''}, \quad P_1 = \frac{d\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots)}{dy''}, \ldots,$$

elles ne contiendront pas du tout $y, y', y'', \ldots$. Partant l'expression (4 *bis*) du n° 5 qui représente exactement le polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

jusqu'au terme multiplié par x^{-m} inclusivement, et qui doit être égale à une fonction entière, se réduira au binôme

$$uy - v,$$

dans lequel u et v ne sont fonction que de la seule variable indépendante x. Ainsi, dans ce cas, la recherche du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

assujetti à la condition de rendre la somme $\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$ un maximum ou un minimum, se réduit à la détermination d'un polynôme y, de degré $m - 1$, tel, que le binôme $uy - v$, qui lui est identique jusqu'au terme multiplié par x^{-m} inclusivement, soit une fonction entière. Nous allons montrer que les polynômes qui jouissent de cette propriété s'obtiennent facilement à l'aide de la série que j'ai publiée dans mon Mémoire intitulé : *Développement des fonctions en séries, à l'aide des fractions continues* [*].

7. Nous avons établi dans ce Mémoire, qu'en développant une fonction quelconque u en fraction continue

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}$$

en désignant, de plus, par $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots$ ses fractions réduites, par $R_1, R_2, R_3, \ldots$ les différences

$$uQ_1 - P_1, \quad uQ_2 - P_2, \quad uQ_3 - P_3, \ldots,$$

et par $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ les fonctions entières qu'on obtient à l'aide de la formule

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathbf{E} q_n (Q_n v - Q_n v);$$

nous aurons pour développer la fonction v d'après les valeurs R_1, R_2, $R_3, \ldots$, la série que voici

$$v = \mathbf{E} v + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3, \ldots, \tag{5}$$

où $\mathbf{E}$ désigne la partie entière de la fonction, et où l'on admet que u et v sont des fonctions développables suivant les puissances entières et décroissantes de la variable x.

Pour déterminer, à l'aide de cette série, le polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

au moyen duquel la différence $uy - v$ est réductible à une fonction

[*] *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. IV.

entière exacte, jusqu'aux termes en x^{-m} inclusivement, désignons par Q_μ le dernier dénominateur des fractions convergentes $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots,$ dont le degré soit inférieur à m, et par F_μ, $F_{\mu-1}, \ldots, F_2$, F_1, r_μ, $r_{\mu-1}, \ldots, r_2$, r_1 les quotients et les restes obtenus par la division du polynôme y par Q_μ, du premier reste r_μ, par $Q_{\mu-1}$, du second reste, par $Q_{\mu-2}$, et ainsi de suite.

En égalant les dividendes aux produits des quotients ajoutés aux restes, nous obtenons une suite d'équations

$$y = F_\mu Q_\mu + r_\mu, \quad r_\mu = F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + r_{\mu-1}, \ldots,$$
$$r_3 = F_2 Q_2 + r_2, \quad r_2 = F_1 Q_1 + r_1.$$

En éliminant de ces équations les restes r_μ, $r_{\mu-1}, \ldots, r_3$, r_2, et en observant que le dernier reste r_1, qu'on obtient par la division de l'avant-dernier reste par $Q_1 = 1$ est zéro, nous sommes conduit à l'expression de y que voici

$$y = F_\mu Q_\mu + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + \ldots + F_2 Q_2 + F_1 Q_1.$$

Mais comme notre polynôme cherché $y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$ ne sera jamais d'un degré supérieur à $m-1$, il est évident que la fonction F_μ, qui s'obtient par la division de y par Q_μ, ne pourra pas être d'un degré plus élevé que $\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$, et par conséquent son degré sera inférieur à celui du quotient $\frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu}$, car, par hypothèse, $Q_{\mu+1}$ est d'un degré supérieur à $m-1$. Quant aux fonctions $F_{\mu-1}$, $F_{\mu-2}, \ldots,$ F_2, F_1, leurs degrés seront inférieurs à ceux des quotients $\frac{Q_\mu}{Q_{\mu-1}}$, $\frac{Q_{\mu-1}}{Q_{\mu-2}}, \ldots, \frac{Q_3}{Q_2}, \frac{Q_2}{Q_1}$, car elles résultent de la division des restes r_μ, $r_{\mu-1}, \ldots,$ r_2, r_1 par $Q_{\mu-1}$, $Q_{\mu-2}, \ldots, Q_2$, Q_1, et ces restes eux-mêmes obtenus par la division de y par Q_μ, de r_μ par $Q_{\mu-1}$ et ainsi de suite, seront nécessairement de degrés inférieurs à Q_μ, $Q_{\mu-1}, \ldots, Q_2$, Q_1.

Pour déterminer les facteurs F_μ, $F_{\mu-1}$, $F_{\mu-2}, \ldots, F_2$, F_1 dans le développement de y par la formule

$$(6) \qquad y = F_\mu Q_\mu + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + \ldots + F_2 Q_2 + F_1 Q_1,$$

nous observons que le binôme $uy - v$ devient, en y substituant pour y sa dernière valeur, et en y exprimant v par la formule (5),

$$\begin{aligned} uy - v = {} & F_\mu Q_\mu u + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} u + \ldots + F_2 Q_2 u + F_1 Q_1 u \\ & - \mathbf{E} v - \omega_1 R_1 - \omega_2 R_2 - \omega_3 R_3 - \ldots, \end{aligned}$$

en y remplaçant $Q_\mu u$, $Q_{\mu-1} u, \ldots$, $Q_2 u$ et $Q_1 u$ par leurs valeurs déduites des égalités

$$R_\mu = Q_\mu u - P_\mu, \quad R_{\mu-1} = Q_{\mu-1} u - P_{\mu-1}, \ldots,$$

nous obtenons la formule que voici

$$\begin{aligned} uy - v = {} & - \mathbf{E} v + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \ldots \\ & + F_{\mu-1} P_{\mu-1} + F_\mu P_\mu + (F_1 - \omega_1) R_1 + (F_2 - \omega_2) R_2 + \ldots \\ & + (F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1}) R_{\mu-1} + (F_\mu - \omega_\mu) R_\mu - \omega_{\mu+1} R_{\mu+1} + \ldots. \end{aligned}$$

En examinant cette nouvelle expression de la différence $uy - v$, nous voyons que ses termes

$$- \mathbf{E} v + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \ldots + F_{\mu-1} P_{\mu-1} + F_\mu P_\mu$$

forment une fonction entière, et que les autres, comme il est aisé de le voir, sont tous de puissances négatives et vont en décroissant. En effet, conformément à notre notation,

$$R_1 = Q_1 u - P_1, \quad R_2 = Q_2 u - P_2, \ldots,$$
$$R_{\mu-1} = Q_{\mu-1} u - P_{\mu-1}, \; R_\mu = Q_\mu u - P_\mu, \; R_{\mu+1} = Q_{\mu+1} u - P_{\mu+1}, \ldots,$$

et ces restes, d'après les propriétés des fractions réduites, sont de degrés égaux à ceux des fractions

$$\frac{1}{Q_2}, \quad \frac{1}{Q_3}, \quad \frac{1}{Q_4}, \ldots, \quad \frac{1}{Q_\mu}, \quad \frac{1}{Q_{\mu-1}}, \quad \frac{1}{Q_{\mu-2}}, \ldots.$$

En rapprochant ces considérations de ce qui a été dit, dans le numéro précédent, sur les fonctions $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{\mu-1}, F_\mu$, et, dans le Mémoire cité, sur les fonctions $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{\mu-1}, \omega_\mu, \omega_{\mu+1}, \ldots$, il devient évident que dans les derniers termes de la formule

$$\begin{aligned}&(F_1 - \omega_1)R_1 + (F_2 - \omega_2)R_2 + \ldots \\ &\quad + (F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1})R_{\mu-1} + (F_\mu - \omega_\mu)R + \omega_{\mu+1}R_{\mu+1} + \ldots,\end{aligned}$$

les facteurs de $R_1, R_2, R_3, \ldots$ seront des fonctions entières de degrés inférieurs à $\frac{Q_2}{Q_1}, \frac{Q_3}{Q_2}, \ldots, \frac{Q_\mu}{Q_{\mu-1}}, \frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu}, \frac{Q_{\mu+2}}{Q_{\mu+1}}, \ldots$.

Donc le premier de ces termes $(F_1 - \omega_1)R_1$ sera d'un degré inférieur à $\frac{Q_2}{Q_1}\frac{1}{Q_2} = \frac{1}{Q_1}$ et ne sera pas inférieur à $\frac{1}{Q_2}$; le second terme $(F_2 - \omega_2)R_2$ sera d'un degré inférieur à $\frac{Q_3}{Q_2}\frac{1}{Q_3} = \frac{1}{Q_2}$ et ne sera pas inférieur à $\frac{1}{Q_3}, \ldots$; le terme $\omega_{\mu+1}$, $R_{\mu+1}$ sera d'un degré inférieur à $\frac{Q_{\mu+2}}{Q_{\mu+1}}\frac{1}{Q_{\mu+2}} = \frac{1}{Q_{\mu+1}}$, et ne sera pas inférieur à $\frac{1}{Q_{\mu+2}}$, et ainsi de suite.

D'où il résulte que, dans l'expression ci-dessus trouvée, pour le binôme $uy - v$, la partie fractionnaire sera exprimée par la série

$$\begin{aligned}&(F_1 - \omega_1)R_1 + (F_2 - \omega_2)R_2 + \ldots \\ &\quad + (F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1})R_{\mu-1} + (F_\mu - \omega_\mu)R_\mu - \omega_{\mu+1}R_{\mu+1} - \ldots,\end{aligned}$$

où les puissances des membres vont en décroissant. Donc le degré d'exactitude avec lequel notre binôme se réduit à une fonction entière sera déterminé par le degré du premier de ses termes qui ne devient pas zéro.

A l'aide de ce résultat, il nous sera aisé de trouver la valeur des fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_{\mu-1}, F_\mu$ qui entrent dans l'expression (6) du polynôme cherché, ou de nous convaincre de son impossibilité.

Les termes $(F_1 - \omega_1)R_1$, $(F_2 - \omega_2)R_2, \ldots$, $(F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1})R_{\mu-1}$, comme nous venons de le voir, ne peuvent être de degrés inférieurs aux fractions $\frac{1}{Q_2}, \frac{1}{Q_3}, \ldots, \frac{1}{Q_\mu}$: donc ils ne peuvent être d'un degré inférieur à x^{-m+1}, car, d'après notre notation, dans la suite des dénominateurs $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\mu$, il n'y en aura pas un seul d'un degré supérieur à $m-1$. Ainsi la différence $uy - v$ ne peut se ramener à une fonction entière qui la représente exactement jusqu'au terme où x est de la puissance $-m$, que dans le cas où tous ces termes disparaissent, ce qui entraîne forcément les équations suivantes :

$$F_1 - \omega_1 = 0, \quad F_2 - \omega_2 = 0, \ldots, \quad F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1} = 0,$$

qui nous donnent

$$(7) \qquad F_1 = \omega_1, \quad F_2 = \omega_2, \ldots, \quad F_{\mu-1} = \omega_{\mu-1}.$$

Avec ces valeurs des fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_{\mu-1}$, l'expression ci-dessus trouvée pour la partie fractionnaire du binôme $uy - v$ se réduit à la série

$$(F_\mu - \omega_\mu) R_\mu - \omega_{\mu+1} R_{\mu+1} - \omega_{\mu+2} R_{\mu+2} - \ldots,$$

où, comme nous venons de le voir, les termes $\omega_{\mu+1} R_{\mu+1}$, $\omega_{\mu+2} R_{\mu+2}, \ldots$, sont de degrés inférieurs à ceux des fractions $\frac{1}{Q_{\mu+1}}, \frac{1}{Q_{\mu+2}}, \ldots$, et par conséquent inférieurs à x^{-m}, car, d'après notre notation, les dénominateurs $Q_{\mu+1}, Q_{\mu+2}, \ldots$, ne sont pas de degrés inférieurs à m. Nous voyons ainsi que pour réduire l'expression ci-dessus trouvée de la différence $uy - v$ à une fonction entière qui la représente exactement jusqu'aux termes où la variable x est à la puissance $-m$, il est nécessaire et suffisant de donner aux fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_{\mu-1}$ les valeurs (7) et de rendre la puissance du membre $(F_\mu - \omega_\mu) R_\mu$ inférieure à $-m$.

Mais comme, d'un autre côté, pour que le polynôme cherché, représenté par la formule

$$y = F_1 Q_1 + F_2 Q_2 + \ldots + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

reste, comme l'exigent les conditions de la question, d'un degré qui ne soit pas supérieur à m, il est nécessaire et suffisant qu'avec les valeurs (7) des fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_{\mu-1}$, le terme $F_\mu Q_\mu$ ne soit pas d'un degré supérieur à $m-1$, car tous les autres termes, comme il est aisé de le voir, seront de degrés inférieurs à $m-1$.

En effet, conformément à ce qui vient d'être dit, les degrés des facteurs $F_1=\omega_1$, $F_2=\omega_2, \ldots, F_{\mu-1}=\omega_{\mu-1}$ seront inférieurs à ceux de $\frac{Q_2}{Q_1}, \frac{Q_3}{Q_2}, \ldots, \frac{Q_\mu}{Q_{\mu-1}}$; donc les produits $F_1 Q_1$, $F_2 Q_2, \ldots, F_\mu Q_\mu$ ne contiendront que des termes de degrés inférieurs à $Q_2, Q_3, \ldots, Q_\mu$, et par conséquent inférieurs à la puissance x^{m-1}, car, d'après notre notation, tous ces dénominateurs des fractions réduites de u ont des degrés moindres que $m-1$.

En vertu de quoi nous concluons que le polynôme cherché y sera donné par la formule

$$y = F_1 Q_1 + F_2 Q_2 + \ldots + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

où $F_1=\omega_1$, $F_2=\omega_2, \ldots, F_{\mu-1}=\omega_{\mu-1}$, et où le facteur F_μ est une fonction entière déterminée par les conditions suivantes :

La puissance du produit $F_\mu Q_\mu$ *ne surpassera pas* $m-1$, *et la puissance du produit* $(F_\mu-\omega_\mu) R_\mu$ *ne surpassera pas* $-m-1$.

Or, d'après notre notation, $R_\mu = Q_\mu u - P_\mu$, de plus, d'après les propriétés des fractions réduites, $Q_\mu u - P_\mu$ étant du même degré que la fraction $\frac{1}{Q_{\mu+1}}$, on peut, en déterminant le facteur F_μ, par la méthode que nous venons d'exposer, remplacer R_μ par la fraction $\frac{1}{Q_{\mu+1}}$.

Ceci nous permet d'exprimer les conditions qui déterminent le facteur F_μ de la manière suivante :

La puissance du produit $F_\mu Q_\mu$ *ne surpassera pas* $m-1$, *et la puissance du quotient* $\frac{F_\mu-\omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ *ne surpassera pas* $-m-1$.

Pour ce qui est des fonctions ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots$, elles s'expriment généralement, comme nous l'avons dit dans le numéro précédent, ainsi :

$$\omega_n = (-1)^n \mathbf{E} q_n (Q_n v - \mathbf{E} Q_n v).$$

Ayant déterminé à l'aide de cette formule les valeurs ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_{\mu-1}$

et les ayant mises, conformément à (7), à la place de $F_1, F_2, \ldots F_{\mu-1}$ dans l'expression du polynôme cherché y, nous obtenons pour cette dernière la formule que voici :

$$y = \omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \ldots + \omega_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

où le facteur F_μ doit satisfaire aux conditions que nous venons d'énoncer.

Nous allons donc nous occuper, dans le numéro suivant, de la manière de déterminer F_μ sous ces conditions.

8. D'après notre notation, Q_μ est le dernier dénominateur de la suite $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\mu, Q_{\mu+1}, \ldots$, dont le degré est inférieur à m; par conséquent le dénominateur $Q_{\mu+1}$ sera, ou du degré m, ou d'un degré supérieur à m. Dans le premier cas, comme il sera aisé de le faire voir, il n'y aura qu'une valeur de F_μ propre à satisfaire aux conditions qui limitent le choix de cette quantité, c'est-à-dire qu'il faudra que F_μ soit égal à ω_μ; dans le second cas, ou il n'y aura pas du tout de valeur de F_μ qui satisfasse à ces conditions, ou bien F_μ s'exprimera au moyen d'une fonction à plusieurs coefficients arbitraires.

En effet, d'après les conditions qui déterminent la fonction F_μ, le degré du produit $F_\mu Q_\mu$ ne pourra pas surpasser $m-1$, et celui du quotient $\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ ne surpassera pas $-m-1$; mais le dénominateur $Q_{\mu+1}$ est de la puissance m. Ainsi quand le numérateur sera entier et différent de zéro, le degré du quotient $\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ sera nécessairement supérieur à $-m-1$. Donc, dans ce cas, on est forcé d'admettre que

$$F_\mu - \omega_\mu = 0,$$

ou bien

$$F_\mu = \omega_\mu.$$

Ensuite, d'après ce qui a été dit précédemment, le degré de la fonction ω_μ est inférieur à celui de $\frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu}$; donc, en donnant à F_μ la valeur ω_μ, nous rendons la puissance du produit $F_\mu Q_\mu$ inférieure à celle de $\frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu} Q_\mu = Q_{\mu+1}$, et par conséquent inférieure à celle de x^m, car, dans le cas que nous examinons, le dénominateur $Q_{\mu+1}$ est du degré m.

D'où il résulte que si $Q_{\mu+1}$ est du degré m, on peut toujours faire $F_\mu = \omega_\mu$, et qu'aucune autre valeur de ce facteur F_μ ne satisfera aux conditions établies dans le numéro précédent.

Dès lors, dans ce cas, le polynôme cherché y ne peut avoir qu'une seule valeur, et elle sera déterminée par la formule que nous venons d'écrire, c'est-à-dire par

$$y = \omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \ldots + \omega_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

pourvu que nous y fassions $F_\mu = \omega_\mu$.

Passons maintenant au cas où le dénominateur $Q_{\mu+1}$ est d'une puissance supérieure à m. Conformément aux conditions qui déterminent le facteur F_μ, le produit $F_\mu Q_\mu$ doit être d'un degré qui ne soit pas supérieur à $m-1$, et le degré du quotient $\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ ne doit pas surpasser $-m-1$, ou bien, ce qui est la même chose, le facteur F_μ ne doit pas avoir un degré supérieur à celui de $\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$, et le degré de la différence $F_\mu - \omega_\mu$ ne doit pas surpasser celui de $\frac{Q_{\mu+1}}{x^{m+1}}$. Or cette propriété est évidemment exprimée par les deux équations suivantes :

$$F_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots \tag{8}$$

et

$$F_\mu - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots, \tag{9}$$

où ν désigne la puissance de la fonction $\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$, ν_1 celle de la fonction $\frac{Q_{\mu+1}}{x^{m+1}}$; et les quantités $C_1, C_2, \ldots, C', C'', \ldots$, sont des coefficients indéterminés.

L'élimination de F_μ à l'aide de ces deux équations nous donne

$$\omega_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots - C' x^{\nu_1} - C'' x^{\nu_1-1} - \ldots,$$

équation qui ne peut être satisfaite par aucune valeur des coefficients

$C_1, C_2, \ldots, C', C'', \ldots$, si le degré de la fonction ω_μ surpasse ν et ν_1. D'où il est aisé de voir que si la puissance de ω_μ est supérieure à ν et ν_1, il est impossible de satisfaire aux conditions qui déterminent F_μ dans l'expression du polynôme cherché, et par conséquent, dans ce cas, notre problème n'a pas de solution. Dans le cas contraire, quand la puissance de ω_μ n'est pas supérieure au moins à l'un des nombres ν et ν_1, la valeur du facteur F_μ sera facile à trouver, et, comme il est aisé de le voir, elle sera déterminée, ou par la seule équation (8) ou par la seule équation (9), selon que ν sera ou ne sera pas $<\nu_1$.

En effet, mettons l'expression de F_μ, donnée par l'équation (8), dans la formule (9), nous aurons

$$C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots.$$

Si le nombre ν est inférieur au nombre ν_1, le degré de la première partie de cette équation ne surpassera pas celui de la seconde, car si $\nu < \nu_1$ la puissance de la fonction ω_μ ne peut être supérieure à ν_1, puisque dans ce cas, contrairement à l'hypothèse, cette puissance serait supérieure aux deux nombres ν et ν_1. Donc, par un choix convenable des coefficients $C', C'', \ldots$, on pourra toujours satisfaire, dans ce cas, à l'équation

$$C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots,$$

quels que soient les coefficients $C_1, C_2, \ldots$ du premier membre de cette équation.

De même si ν n'est pas $<\nu_1$, l'équation (9) nous donne

$$F_\mu = \omega_\mu + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots,$$

et, en y laissant tous les coefficients arbitraires, nous obtenons une valeur de F_μ qui satisfait à l'équation (8) si l'on donne des valeurs convenables aux coefficients $C_1, C_2, \ldots$.

Ainsi, il est bien établi que toutes les fois que le degré de la fonction ω_μ n'est pas supérieur au moins à l'un des deux nombres ν et ν_1 $\left(\text{degrés des fonctions } \frac{x^{m-1}}{Q_\mu} \text{ et } \frac{Q_{\mu+1}}{x^{m+1}}\right)$, la valeur du facteur F_μ, satisfaisant aux conditions du numéro précédent, peut être trouvée. De plus, la valeur de F_μ sera déterminée par l'équation

$$F_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots$$

ou par l'équation

$$F_\mu = \omega_\mu + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots$$

selon que l'on aura $\nu < \nu_1$ ou bien $\nu \gtreqless \nu_1$. Quant aux coefficients C_1, $C_2, \ldots$, C', $C'', \ldots$, ils restent arbitraires.

9. Pour donner un exemple, cherchons à déterminer le polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

sous la condition de rendre maximum ou minimum la valeur de la somme

$$\sum \tfrac{1}{2} [y_i - f(x_i)]^2 \theta(x_i)$$

étendue aux valeurs $x = x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Nous commencerons par supposer que le choix des coefficients A_0, A_1, $A_2, \ldots$ du polynôme cherché y n'est limité par aucune condition particulière, et puis nous traiterons le cas où la valeur d'un de ces coefficients est donnée.

La première hypothèse, avec les valeurs réelles de $x_1, x_2, x_3, \ldots$ et l'invariabilité de signe de la fonction $\theta(x)$, nous donnera la formule déjà connue de l'interpolation parabolique d'après la méthode des *moindres carrés* dans les cas ordinaires; la seconde, avec les mêmes conditions pour les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots$ et la fonction $\theta(x)$, nous conduira aussi à une formule d'interpolation parabolique d'après la méthode des *moindres carrés*, mais dans les cas particuliers où l'un des coefficients de l'expression y est assujetti à la condition d'avoir une valeur donnée.

Si dans les formules du n° 2 nous faisons

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = \tfrac{1}{2} [y - f(x)]^2 \theta(x),$$

nous trouverons

$$M = \frac{dF(x, y, y', y'')}{dy} = [y - f(x)]\theta x,$$

$$N = \frac{dF(x, y, y', y'')}{dy'} = 0,$$

$$P = \frac{dF(x, y, y', y'')}{dy''} = 0,$$

avec de telles valeurs des fonctions M, N, P,... et dans l'hypothèse que le choix des coefficients du polynôme n'est limité par aucune condition spéciale, nous aurons à remplir d'après le n° **3** la condition suivante :

L'expression

$$[y - f(x)]\theta(x)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \textit{où} \quad \varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots$$

doit être réductible à une fonction entière, avec une approximation poussée jusqu'au terme x^{-m}, inclusivement.

Désignant par $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,..., $\psi_{\mu-1}(x)$, $\psi_\mu(x)$, $\psi_{\mu+1}(x)$ les dénominateurs des réduites qu'on obtient en développant la fonction $\frac{\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ en une fraction continue

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_{\mu-1} + \cfrac{1}{q_\mu + \cfrac{1}{q_{\mu+1} + \cdots}}}}},$$

et supposant que dans la suite de valeurs

$$\psi_1(x), \quad \psi_2(x), \quad \psi_3(x),\ldots, \quad \psi_{\mu-1}(x), \quad \psi_\mu(x), \quad \psi_{\mu+1}(x),\ldots,$$

la dernière fonction d'un degré inférieur à m soit $\psi_\mu(x)$, nous trouverons que le polynôme $y = A_0 + A_1 x + \ldots + A^{m-1} x_{m-1}$, qui satisfait à cette condition, sera donné par la formule

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \ldots + \omega_{\mu-1} \psi_{\mu-1}(x) + F_\mu \psi_\mu(x), \ldots,$$

où les facteurs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\mu-1}$ seront déterminés par la formule

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathbf{E} q_n \left[\frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} - \mathbf{E} \frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} \right],$$

et le facteur F_μ, d'après le n° **8**, n'aura qu'une valeur déterminée $F_\mu = \omega_\mu$, si la fonction $\psi_{\mu-1}(x)$ est du degré m. Dans le cas contraire, si notre problème admet une solution, c'est-à-dire si la somme $\sum \frac{1}{2}[y_i - f(x_i)]^2 \theta x$ peut devenir un maximum ou un minimum, le facteur F_μ contiendra plusieurs coefficients indéterminés et sera donné par l'une des formules

$$F_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots,$$
$$F_\mu = \omega_\mu + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu-1} + \ldots,$$

où ν et ν_1 désignent les degrés des fonctions $\frac{x^{m-1}}{\psi_\mu(x)}$ et $\frac{\psi_{\mu+1}}{x^{m+1}}$. Comme précédemment, on appliquera la première de ces deux formules si $\nu < \nu_1$, et la seconde dans le cas de $\nu \overline{\gtrless} \nu_1$. Enfin pour savoir si notre problème admet une solution, il faudra examiner, comme nous l'avons indiqué dans le n° **8**, si le degré de la fonction ω_μ n'est pas supérieur au moins à l'un des nombres ν et ν_1, car ce n'est que dans ce cas que le facteur F_μ peut satisfaire aux conditions du problème.

Quand les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ont des valeurs réelles, et que la fonction $\theta(x)$ ne change pas de signe, la fraction continue, qu'on obtient en développant l'expression $\frac{\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, comme il est connu, sera de la forme

$$q_0 + \cfrac{1}{A_1 x + B_1 + \cfrac{1}{A_2 x + B_2 + \ddots}},$$

où A_1, B_1, A_2, B_2,... sont des quantités constantes [*]. Dans ce cas les fonctions $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$, ont pour valeurs

$$q_1 = A_1 x + B_1, \quad q_2 = A_2 x + B_2, \ldots, \quad q_n = A_n x + B_n,$$

et les dénominateurs $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{m-1}(x), \psi_m(x), \psi_{m+1}(x), \ldots$, des fractions réduites de l'expression $\frac{\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ seront de degrés 0, 1, 2,..., $m-2$, $m-1$, m,....

Comme dans ce cas le dernier dénominateur d'un degré inférieur à m, est $\psi_m(x)$, et celui qui le suit immédiatement, c'est-à-dire $\psi_{m+1}(x)$ est du degré m, d'après ce qui a été établi, le polynôme cherché y sera donné par la formule

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \ldots + \omega_{m-1} \psi_{m-1}(x) + \omega_m \psi_m(x).$$

Mettons à la place de q_n sa valeur $q_n = A_n x + B_n$ dans la formule du n° **7** qui sert à calculer les facteurs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m-1}, \omega_m$, nous aurons

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathbf{E}(A_n x + B_n)\left[\frac{\psi_n(x) f(x)\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \mathbf{E}\frac{\psi_n(x) f(x)\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right].$$

Si nous désignons par U la fonction entière qu'on obtient en divisant le produit $\psi_n(x) f(x)\theta(x)\varphi'(x)$ par $\varphi(x)$, nous aurons, par notre notation

$$\mathbf{E}\frac{\psi_n(x) f(x)\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)} = U$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\psi_n(x) f(x)\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)} &= U + \frac{\psi_n(x_1) f(x_1)\theta(x_1)}{x - x_1} + \frac{\psi_n(x_2) f(x_2)\theta(x_2)}{x - x_2} + \ldots \\ &= U + \sum \frac{f(x_i)\theta(x_i)\psi_n(x_i)}{x - x_i}.\end{aligned}$$

---

[*] Voyez le Mémoire intitulé : *Recherches sur les fractions continues* (Outchénié... *Mémoires savants de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. IX). Du reste cela résulte aussi de ce que $x_1, x_2, x_3, \ldots$ étant réels, et $\theta(x)$ conservant toujours le même signe, notre problème a toujours une solution, quel que soit m, car cela suppose d'après le n° **8** que dans la série $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$, il y aura toujours un dénominateur du degré m, et que par conséquent il s'y trouvera des dénominateurs de tous les degrés, ce qui n'est possible que quand la fraction continue dont il s'agit a la forme que nous venons d'indiquer.

d'où nous tirons

$$\frac{\psi_n(x) f(x)\,\theta(x)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \mathbf{E}\,\frac{\psi_n(x) f(x)\,\theta(x)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum \frac{f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_n(x_i)}{x - x_i}.$$

Ainsi l'expression trouvée ci-dessus pour le facteur ω_n se réduit à la suivante :

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\,\mathbf{E}\,(A_n x + B_n) \sum \frac{f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_n(x_i)}{x - x_i}.$$

Cette formule peut s'écrire ainsi :

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\,\mathbf{E}\left(A_n + \frac{B_n}{x}\right) \sum \frac{f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_n(x_i)}{1 - \frac{x_i}{x}}.$$

Le terme placé sous le signe $\mathbf{E}$ est du degré zéro; donc, en faisant $x = \infty$, nous aurons sa partie entière, et nous trouverons ainsi :

$$\omega_n = (-1)^{n-1} A_n \sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_n(x_i).$$

En calculant d'après cette formule les valeurs des facteurs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m-1}, \omega_m$, et en les mettant dans l'expression du polynôme y, nous obtiendrons la formule que voici :

$$\begin{aligned} y = {} & A_1 \sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_1(x_i).\psi_1(x) - A_2 \sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_2(x_i).\psi_2(x) + \ldots \\ & + (-1)^{m-2} A_{m-1} \sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_{m-1}(x_i).\psi_{m-1}(x) \\ & + (-1)^{m-1} A_m \sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\varphi_m(x_i).\psi_m(x). \end{aligned}$$

C'est ainsi que l'on détermine le polynôme du degré $m - 1$ qui rend maximum ou minimum la somme $\sum \frac{1}{2}[y_i - f(x_i)]^2\,\theta(x_i)$, étendue aux valeurs réelles de $\psi = x_1, x_2, x_3, \ldots$, et dont le facteur $\theta(x)$ ne change pas de signe. Cette formule sert pour l'interpolation parabolique, d'après la méthode des *moindres carrés*, quand il n'existe aucune condition particulière relative à ses coefficients.

10. Passons maintenant au cas où, dans le polynôme cherché

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

le coefficient de x^l, où l est un des nombres o, 1, 2,.., $m-1$, est supposé donné.

La condition que le coefficient de x^l, dans le polynôme y, doit être égal à un nombre donné, peut être exprimée par l'égalité

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_1,$$

pourvu toutefois qu'on n'étende cette somme qu'à la seule valeur de la variable x, $x = 0$, et que la fonction $\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots)$ se réduise à un seul terme $y^l = \frac{d^l y}{dx^l}$. Dans ce cas, d'après la notation du n° 5, nous aurons

$$\varphi_1(x) = x \quad \text{et} \quad \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{1}{x},$$

et toutes les dérivées partielles de $\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = y^l$, prises par rapport à y, y', y'', y''', seront zéro, excepté la seule dérivée y^l, qui sera égale à 1.

Supposant, comme ci-devant, que la somme qu'on se propose de rendre un maximum ou un minimum est $\sum \frac{1}{2}[y - f(x)]^2 \theta(x)$, et qu'elle s'étend aux valeurs de la variable x, telles que $x_1, x_2, x_3, \ldots$, nous aurons, en conservant la notation du n° 5,

$$\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots) = \frac{1}{2}[y - f(x)]^2 \theta(x),$$

$$M_0 = \frac{d\Phi_0}{dy} = [y - f(x)]\,\theta(x),$$

$$N_0 = \frac{d\Phi_0}{dy'} = 0,$$

$$P_0 = \frac{d\Phi_0}{dy''} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

et

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots = \varphi_0(x).$$

Avec ces valeurs des fonctions $M_0, N_0, P_0, \ldots, \varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$, et ayant en vue la remarque que nous venons de faire sur les dérivées partielles de la fonction $\Phi_1(x_1, y, y', y'', \ldots) = y^l$, prises par rapport à $y, y', y'', \ldots, y^l, \ldots$, le polynôme cherché sera déterminé, d'après le n° **5**, par la condition suivante :

L'expression $\dfrac{(y - f(x)\,\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + (-1)^l \dfrac{d^l \frac{\lambda_1}{x}}{dx^l}$ *doit se réduire à une fonction entière avec une approximation poussée jusqu'au terme* x^{-m} *inclusivement.*

Comme cette expression, après la différentiation et la multiplication indiquées, se réduit à la différence

$$\frac{\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\,y - \left[\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2\ldots l\lambda_1}{x^{l+1}}\right],$$

pour déterminer le polynôme y nous devons, conformément à ce qui a été dit au n° **7**, développer en fraction continue l'expression $\frac{\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}$. En nous bornant à examiner le cas où toutes les valeurs de $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sont réelles, et où la fonction $\theta(x)$ ne change pas de signe, nous aurons, d'après ce qui a été dit dans le numéro précédent,

$$\frac{\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} = q_0 + \cfrac{1}{A_1 x + B_1 + \cfrac{1}{A_2 x + B_2 + \cdots}},$$

où $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$, sont des constantes. Ce développement de la fonction $\frac{\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}$ nous donnera la suite de dénominateurs des réduites $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{m-1}(x), \psi_m(x), \psi_{m+1}(x), \ldots$, qui seront de degré $0, 1, 2, \ldots, m-2, m-1, m, \ldots$.

Comme le dernier dénominateur de degré inférieur à m est $\psi_m(x)$, et comme celui qui le suit immédiatement, $\psi_{m+1}(x)$, est de degré $m+1$, le polynôme cherché $y = A_0 + A_1 x + \ldots + \omega_{m-1} x^{m-1}$, d'après le n° **8**, s'exprimera par

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \ldots + \omega_{m-1} \psi_{m-1}(x) + \omega_m \psi_m(x), \ldots.$$

Mais comme dans le cas que nous examinons

$$q_1 = A_1 x + B_1, \quad q_2 = A_2 x + B_2, \ldots, \quad Q_1 = \psi_1(x), \quad Q_2 = \psi_2(x), \ldots,$$

et

$$v = \frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2\ldots l\lambda_1}{x^{l+1}},$$

nous aurons, d'après le n° **7**, pour déterminer les facteurs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m-1}, \omega_m$, la formule que voici :

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\,\mathbf{E}(\mathrm{A}_n x + \mathrm{B}_n)\left\{\left[\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2\ldots l\lambda_1}{x^{l+1}}\right]\psi_n(x) - \mathbf{E}\left[\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2\ldots l\lambda_1}{x^{l+1}}\,\psi_n(x)\right]\right\};$$

ce qui peut être écrit ainsi :

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\,\mathbf{E}(\mathrm{A}_n x + \mathrm{B}_n)\left[\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \mathbf{E}\,\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}\right] - (-1)^{n-1}\,1.2.3\ldots l\lambda_1\,\mathbf{E}(\mathrm{A}_n x + \mathrm{B}_n)\left[\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - \mathbf{E}\,\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}}\right].$$

Mais, d'après ce qui a été établi dans le numéro précédent, l'expression $\mathbf{E}(\mathrm{A}_n x + \mathrm{B}_n)\left[\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \mathbf{E}\,\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}\right]$ se réduit à

$$\mathrm{A}_n \sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_n(x_i),$$

et la fonction $\psi_n(x)$, développée par la série de Maclaurin, nous donne

$$\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} = \frac{\psi_n(0)}{x^{l+1}} + \frac{1}{1}\frac{\psi'_n(0)}{x^l} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots l}\frac{\psi^l_n(0)}{x} + \frac{1}{1.2\ldots l(l+1)}\psi^{l+1}_n(0) + \frac{x}{1.2\ldots(l+1)(l+2)}\psi^{l+2}_n(0) + \ldots;$$

par conséquent

$$\mathbf{E}\,\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} = \frac{1}{1.2\ldots l(l+1)}\psi^{l+1}_n(0) + \frac{x}{1.2\ldots(l+1)(l+2)}\psi^{l+2}_n(0) + \ldots,$$

et la différence $\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - \mathbf{E}\,\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}}$ se réduit à la série

$$\frac{\psi_n(0)}{1.2\ldots l}\,\frac{1}{x} + \frac{\psi_n(0)}{1.2\ldots(l-1)}\,\frac{1}{x^2} + \ldots.$$

En multipliant cette expression par $A_n x + B_n$ et en rejetant dans ce produit $\frac{A_n \psi_n^l(0)}{1.2\ldots l} + \left[\frac{B_n \psi_n^l(0)}{1.2\ldots l} + \frac{A_n \psi_n^{l-1}(0)}{1.2\ldots(l-1)}\right]\frac{1}{x} + \ldots$, les termes où la variable x a des exposants négatifs, nous aurons pour la valeur de $E(A_n x + B_n)\left[\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - E\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}}\right]$ l'expression $\frac{A_n \psi_n^l(0)}{1.2\ldots l}$. Par conséquent la formule qui sert à déterminer ω_n se réduit à

$$\omega_n = (-1)^{n-1} A_n \left[\sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_n(x_i) - \lambda_1 \psi_n^l(0)\right].$$

Ayant déterminé d'après cette formule les valeurs des facteurs ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots, \omega_{m-1}$, ω_m et les ayant mises dans l'expression du polynôme cherché $y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \ldots + \omega_{m-1}\psi_{m-1}(x) + \omega_m \psi_m(x)$, nous verrons qu'il se réduit à

$$\begin{aligned} y = {} & A_1\left[\sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_1(x_i) - \lambda_1 \psi_1^l(0)\right]\psi_1(x) \\ & - A_2\left[\sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_2(x_i) - \lambda_1 \psi_2^l(0)\right]\psi_2(x) + \ldots \\ & + (-1)^{m-1} A_m\left[\sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_m(x_i) - \lambda_1 \psi_m^l(0)\right]\psi_m(x), \end{aligned}$$

où λ_1 est une constante inconnue qui, dans notre cas, sera déterminée par la condition que le coefficient de x^l doit avoir une valeur donnée.

On trouvera aussi de la même manière l'expression du polynôme y, dans le cas où plusieurs de ses coefficients sont donnés, et les autres sont déterminés par la condition de rendre maximum ou minimum la somme $\sum \frac{1}{2}[y - f(x)]^2\,\theta(x)$, étendue à des valeurs données de la variable x.