JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Étude sur les surfaces isothermes et sur les courants de chaleur, dans les milieux homogènes chauffés en un de leurs points

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 265-297.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__265_0>

Étude sur les surfaces isothermes et sur les courants de chaleur, dans les milieux homogènes chauffés en un de leurs points;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

Le but de ce Mémoire est de montrer les rôles que jouent, dans trois questions intéressantes concernant la propagation de la chaleur, *l'ellipsoïde principal* de M. Lamé et celui que j'ai appelé *ellipsoïde des conductibilités linéaires* [*].

M. Lamé a démontré qu'il y a, dans tout milieu homogène, un ellipsoïde tel, que, si l'on adopte pour axes des coordonnées un système quelconque de ses diamètres conjugués, l'équation de la chaleur prend la forme simple de celle de Fourier, mais avec trois coefficients distincts au lieu d'un seul, et que ces trois coefficients ne sont autres que les carrés des demi-diamètres correspondants. C'est l'ellipsoïde principal.

Je fais voir qu'il existe pour le même milieu un autre ellipsoïde, jouissant de cette propriété, que, si un courant de chaleur se propage à travers le milieu dans une direction quelconque, ce courant est égal à la dérivée, changée de signe, de la température suivant cette direction, multipliée par le carré du demi-diamètre correspondant. C'est l'ellipsoïde des conductibilités linéaires. Il a un diamètre commun avec l'ellipsoïde principal; de plus, les plans conjugués à ce diamètre sont les mêmes dans les deux surfaces, et les coupent suivant deux ellipses homothétiques, dont la plus grande appartient à l'ellipsoïde des conductibilités linéaires.

Les trois questions fondamentales que j'étudie, et où interviennent ces deux ellipsoïdes, sont : 1° *Propagation de la chaleur dans un mi-*

[*] *Voir* à ce sujet une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 104, une autre Note insérée au tome LXVI, p. 1194, et ma Thèse (*Étude sur la Propagation de la chaleur dans les milieux homogènes*, Paris, 1867, chez M. Gauthier-Villars, libraire).

lieu indéfini; 2° *Propagation de la chaleur dans une barre rectiligne indéfinie;* 3° *Propagation de la chaleur dans une plaque très-mince et plane, indéfinie.* Dans ces trois cas, le milieu est supposé chauffé en un point unique, pris pour origine des coordonnées.

Dans la première question, les surfaces isothermes sont des ellipsoïdes concentriques, semblables et semblablement placés, dont l'un n'est autre que l'ellipsoïde principal. La chaleur se répand en tous sens à partir de l'origine : elle décrit des espèces de spirales, situées sur des cônes ou tourbillons de chaleur, dont le sommet est à l'origine, et qui ont pour directrices les intersections de l'ellipsoïde principal par les plans conjugués au diamètre commun des deux ellipsoïdes. Tout le long d'une même génératrice des cônes, les tangentes aux spirales qui la coupent sont parallèles. Pour obtenir une droite qui ait leur direction, il faut mener, au point où la génératrice s'appuie sur l'ellipse directrice, une tangente à cette ellipse, la prolonger dans un sens déterminé jusqu'à la rencontre de l'ellipsoïde des conductibilités linéaires, et joindre l'origine à son extrémité. Les spirales couperont toutes les génératrices sous un angle constant, si les deux ellipsoïdes sont de révolution autour de leur diamètre commun.

Dans la deuxième question, en supposant des barres taillées à partir de l'origine dans le même milieu, chauffées simultanément à cette origine, et rayonnant de la même manière (ce qui arrivera, par exemple, si elles sont d'égales dimensions et recouvertes d'un vernis qui leur donne la même conductibilité extérieure), je démontre que leurs points d'égale température seront situés, à chaque instant, sur des ellipsoïdes homothétiques par rapport à celui des conductibilités linéaires. De plus, leurs surfaces isothermes seront des éléments plans de direction constante pour une même barre, et celui d'entre ces éléments qui est à l'intersection de la barre par l'ellipsoïde des conductibilités linéaires deviendra, si on le prolonge, tangent à l'ellipsoïde principal. Les courants de chaleur sont rectilignes, car la chaleur s'écoule le long des barres.

Enfin, dans la troisième question, les courbes isothermes dessinées sur la plaque sont des ellipses situées sur des ellipsoïdes semblables à celui des conductibilités linéaires et semblablement placés. Plusieurs plaques, taillées suivant des sens différents dans le même milieu, chauffées pareillement et rayonnant de la même manière, ont au même instant leurs courbes d'égale température sur des ellipsoïdes différents. On obtient, par exemple, les ellipsoïdes correspondants à une *certaine* température, la même chez toutes les plaques, si on construit, pour chacune d'elles, celui qui est tangent à l'intersection de la plaque considérée par l'ellipsoïde principal. Les surfaces isothermes, menées suivant les lignes d'égale température ainsi obtenues, sont des cylindres qui, prolongés, se trouvent être tangents à l'ellipsoïde principal.

La chaleur se répand dans chaque plaque en décrivant des spirales, et celles-ci sont parallèles entre elles aux points où elles coupent un même rayon émané de l'origine. La direction de leurs tangentes en ces points s'obtient d'une manière analogue à celle du premier cas : il faut mener, à l'intersection du rayon par la courbe d'égale température dont il vient d'être parlé, une tangente à cette courbe, la prolonger dans un sens déterminé jusqu'à la rencontre de l'ellipsoïde des conductibilités linéaires, et enfin joindre à son extrémité, par une droite, l'origine des coordonnées; cette dernière droite a même direction que les tangentes cherchées. Les spirales couperont tous les rayons sous un même angle, c'est-à-dire seront logarithmiques, si les courbes d'égale température sont des cercles.

Je ne pense pas que ces problèmes eussent déjà été traités dans leur ensemble. Je les croyais même absolument nouveaux lorsque j'ai présenté plusieurs d'entre eux, dans une Thèse, à la Faculté des Sciences de Paris. Mais, depuis, j'ai trouvé, aux tomes XXV, p. 870, et XXVII, p. 129, des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, deux articles où M. Duhamel traite des surfaces isothermes qui se produisent dans les milieux homogènes symétriques, soit indéfinis, soit taillés en plaques minces. M. Duhamel indique seulement ses résultats, qui concordent avec les miens dans l'hypothèse, qu'il adopte, de la symétrie du milieu [*].

§ I. — *Ellipsoïde principal.*

Soient, à l'époque t : x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'un milieu homogène en repos; u la température

[*] *Voir*, à la page suivante, la définition de cette symétrie.

de ce point; ρ la capacité du corps pour la chaleur sous l'unité de volume; $\varphi(u, t)$ la quantité de chaleur, rapportée à l'unité de volume et à l'unité de temps, que reçoit le corps autrement que par conductibilité. M. Lamé démontre, dans sa troisième *Leçon sur la Chaleur,* § XXIV, qu'on peut toujours choisir les axes des coordonnées de manière que l'équation de la température prenne la forme

$$(1) \qquad \rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + b^2 \frac{d^2 u}{dy^2} + c^2 \frac{d^2 u}{dz^2}.$$

De plus, les trois flux de chaleur F_1, F_2, F_3, rapportés à l'unité de surface et à l'unité de temps, qui traversent les éléments plans perpendiculaires aux axes, en allant des parties positives de ceux-ci vers leurs parties négatives, peuvent s'écrire

$$(2) \quad F_1 = a^2 \frac{du}{dx} - \nu \frac{du}{dy} + \mu \frac{du}{dz}, \quad F_2 = b^2 \frac{du}{dy} - \lambda \frac{du}{dz} + \nu \frac{du}{dx}, \quad F_3 = c^2 \frac{du}{dz} - \mu \frac{du}{dx} + \lambda \frac{du}{dy};$$

a^2, b^2, c^2, λ, μ, ν sont six coefficients de conductibilité, dépendants de la nature du corps. Je représente les trois premiers par des carrés, afin de rappeler qu'ils sont essentiellement positifs. Les trois autres peuvent être de signe quelconque : ils sont nuls dans les milieux étudiés par M. Duhamel, milieux *symétriques* par rapport aux trois plans coordonnés choisis, c'est-à-dire tels que les expressions des trois flux F_1, F_2, F_3 n'y changent pas, quand on change en son opposée la direction de l'un quelconque des axes.

M. Lamé appelle *principal* (*Leçons sur la Chaleur,* § XXVI) l'ellipsoïde

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et il fait voir que, si on le rapporte à un système quelconque de diamètres conjugués, de manière à mettre son équation sous la forme

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1,$$

l'équation de la chaleur, avec le même système d'axes, sera

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + a'^2 \frac{d^2u}{dx'^2} + b'^2 \frac{d^2u}{dy'^2} + c'^2 \frac{d^2u}{dz'^2}.$$

Cette proposition nous servira plus tard. Nous allons la démontrer simplement, en partant de la transformation

$$(4) \qquad \frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{y}{b} = \eta, \quad \frac{z}{c} = \zeta,$$

qu'a employée M. Duhamel.

Afin d'abréger l'écriture, nous représenterons, dans la suite de ce Mémoire, par le signe S la somme de trois termes, dont le premier sera écrit après ce signe, et dont les deux autres se déduiraient de celui-là par une et par deux permutations circulaires effectuées sur les lettres correspondantes; ces lettres seront : x, y, z; ξ, η, ζ; a, b, c; λ, μ, ν; m, n, p;.... Par exemple, l'équation de l'ellipsoïde principal s'écrira $S\frac{x^2}{a^2} = 1$. Une relation telle que

$$(nz - py)m' + (px - mz)n' + (my - nx)p' = 0$$

s'écrira de même

$$S(nz - py)m' = 0.$$

Cela posé, les variables ξ, η, ζ, substituées à x, y, z, mettent les expressions

$$Sa^2 \frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{et} \quad S\frac{x^2}{a^2}$$

sous les formes respectives

$$S\frac{d^2u}{d\xi^2} \quad \text{et} \quad S\xi^2.$$

Adoptons, pour nouveaux axes des coordonnées, un système quelconque de diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal. L'équation de celui-ci prendra la forme

$$S\frac{x'^2}{a'^2} = 1; \quad \text{ce qui donne identiquement} \quad S\frac{x^2}{a^2} = S\frac{x'^2}{a'^2}.$$

Si nous posons

$$\frac{x'}{a'} = \xi', \quad \frac{y'}{b'} = \eta', \quad \frac{z'}{c'} = \zeta',$$

nous devrons donc avoir

$$S\xi^2 = S\xi'^2.$$

Or x, y, z, et, par suite, ξ, η, ζ, sont fonctions linéaires de x', y', z', ou de ξ', η', ζ'. En désignant par m, n, p; m', n', p'; m'', n'', p'' certains coefficients, on aura

$$(5)\quad \xi = m\xi' + m'\eta' + m''\zeta', \quad \eta = n\xi' + n'\eta' + n''\zeta', \quad \zeta = p\xi' + p'\eta' + p''\zeta'.$$

L'égalité de $S\xi^2$ à $S\xi'^2$ entraîne les six relations

$$(6)\quad Sm^2 = 1, \quad Sm'^2 = 1, \quad Sm''^2 = 1, \quad Sm'm'' = 0, \quad Sm''m = 0, \quad Smm' = 0.$$

Alors les équations (5), respectivement multipliées par m, n, p, ou par m', n', p', ou par m'', n'', p'', et ajoutées, donnent les relations inverses

$$\xi' = Sm\xi, \quad \eta' = Sm'\xi, \quad \zeta' = Sm''\xi.$$

De celles-ci on déduira, pour transformer les dérivées partielles de u, les formules

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} &= m\frac{d}{d\xi'} + m'\frac{d}{d\eta'} + m''\frac{d}{d\zeta'},\\ \frac{d}{d\eta} &= n\frac{d}{d\xi'} + n'\frac{d}{d\eta'} + n''\frac{d}{d\zeta'},\\ \frac{d}{d\zeta} &= p\frac{d}{d\xi'} + p'\frac{d}{d\eta'} + p''\frac{d}{d\zeta'}.\end{aligned}\right.$$

Elles sont pareilles aux relations (5), et changeront

$$S\frac{d^2u}{d\xi^2} \quad \text{en} \quad S\frac{d^2u}{d\xi'^2}, \quad \text{ou bien} \quad Sa^2\frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{en} \quad Sa'^2\frac{d^2u}{dx'^2};$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ II. — *Ellipsoïde des conductibilités linéaires.*

On sait qu'un élément plan quelconque, mené par le point (x, y, z), est actuellement traversé par un flux de chaleur, dont l'expression, pour l'unité de surface et dans l'unité de temps, en appelant m, n, p les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à l'élément, menée du côté d'où vient le flux, est

$$F = mF_1 + nF_2 + pF_3 \text{ [*]}. \tag{8}$$

Ce flux sera nul, si la direction (m, n, p) de la normale est perpendiculaire à la direction (F_1, F_2, F_3), c'est-à-dire à celle qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à F_1, F_2, F_3. Soient f, g, h ces cosinus, et dl une ligne infiniment petite menée, à partir de (x, y, z), dans la direction correspondante. Tout élément superficiel passant par la ligne dl n'est donc traversé par aucun flux; ce qui revient à dire que, tout près de (x, y, z), la chaleur marche dans le sens de la ligne dl, ou y forme un courant dirigé suivant cette ligne. Proposons-nous de calculer la valeur de ce courant, en fonction de la dérivée partielle $\frac{du}{dl}$ de la température suivant la ligne dl. Les trois cosinus f, g, h étant proportionnels à F_1, F_2, F_3, on aura, d'après les relations (2),

$$\frac{a^2\frac{du}{dx} - \nu\frac{du}{dy} + \mu\frac{du}{dz}}{f} = \frac{b^2\frac{du}{dy} - \lambda\frac{du}{dz} + \nu\frac{du}{dx}}{g} = \frac{c^2\frac{du}{dz} - \mu\frac{du}{dx} + \lambda\frac{du}{dy}}{h}. \tag{9}$$

Appelons k la valeur commune de ces trois rapports, et résolvons par rapport à $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$. Nous obtiendrons

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\frac{du}{dx}}{b^2c^2f + \lambda S\lambda f + \nu c^2 g - \mu b^2 h} &= \frac{\frac{du}{dy}}{c^2a^2g + \mu S\lambda f + \lambda a^2 h - \nu c^2 f} \\ &= \frac{\frac{du}{dz}}{a^2b^2h + \nu S\lambda f + \mu b^2 f - \lambda a^2 g} \\ &= \frac{k}{a^2b^2c^2 + S\lambda^2 a^2}. \end{aligned} \right.$$

---

[*] *Voir* la deuxième *Leçon sur la Chaleur*, de M. Lamé, § XVIII.

Les trois dérivées partielles $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la surface isotherme $u = \text{const.}$, qui passe par (x, y, z); donc les rapports de ces trois dérivées partielles et la direction de la normale sont complétement déterminés, quand la direction (f, g, h) du courant l'est elle-même.

A l'inverse, si les mêmes surfaces restent surfaces isothermes à tous les instants consécutifs, les directions de leurs normales ne varieront pas avec le temps, et, par suite, d'après (9), les cosinus f, g, h conserveront en chaque point (x, y, z) les mêmes valeurs : la chaleur marchera suivant des lignes fixes, que nous appellerons *filets* ou *courants de chaleur,* et dont la tangente au point quelconque (x, y, z) aura la direction (f, g, h).

Ajoutons, terme à terme, les trois premiers rapports (10), après avoir multiplié les deux termes du premier par f, ceux du second par g et ceux du troisième par h. Si nous observons que $\mathrm{S}f\frac{du}{dx} = \frac{du}{dl}$, il viendra

$$(11) \qquad \frac{\frac{du}{dl}}{\mathrm{S}\,b^2c^2f^2 + (\mathrm{S}\lambda f)^2} = \frac{k}{a^2b^2c^2 + \mathrm{S}\lambda^2a^2}, \quad \text{ou} \quad k = \frac{1 + \frac{\mathrm{S}\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}}{\mathrm{S}\frac{f^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{S}\lambda f)^2}{a^2b^2c^2}}\frac{du}{dl}.$$

La grandeur du courant est mesurée par le flux C, qui traverse l'élément plan perpendiculaire à la direction (f, g, h), en marchant suivant la ligne dl. La formule (8) et puis les relations (9) donnent

$$\mathrm{C} = -\mathrm{S}f\left(a^2\frac{du}{dx} - \nu\frac{du}{dy} + \mu\frac{du}{dz}\right) = -\mathrm{S}fkf = -k,$$

ou bien, d'après (11),

$$(12) \qquad \mathrm{C} = \frac{1 + \frac{\mathrm{S}\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}}{\mathrm{S}\frac{f^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{S}\lambda f)^2}{a^2b^2c^2}}\,\frac{-du}{dl}.$$

Le coefficient de $\frac{-du}{dl}$, dans le second membre de cette relation, peut être appelé *coefficient de conductibilité du corps pour le courant* *de direction* (f, g, h) : il mesure l'aptitude plus ou moins grande du milieu à transmettre la chaleur dans cette direction. Je l'appellerai aussi *coefficient de conductibilité linéaire*, car nous verrons plus loin que c'est celui d'une barre de même direction, taillée dans le milieu.

Portons à partir de l'origine, dans le sens (f, g, h) du courant, une ligne égale à la racine carrée de ce coefficient. Les extrémités de toutes les lignes pareilles donneront l'ellipsoïde

$$\text{(13)} \qquad S\frac{x^2}{a^2} + \frac{(S\lambda x)^2}{a^2b^2c^2} = 1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}.$$

Je l'appelle *ellipsoïde des conductibilités linéaires*. Il coïncide avec l'ellipsoïde principal (3) dans le cas des milieux symétriques, c'est-à-dire quand on a $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$. Si le milieu est peu dissymétrique, ou que les coefficients λ, μ, ν soient très-petits, on peut encore regarder les deux ellipsoïdes comme identiques sauf erreur négligeable, car ces coefficients n'entrent dans l'équation (13) que par leurs carrés et leurs produits.

En général, les deux ellipsoïdes n'ont que deux points communs. En effet, les valeurs de x, y, z qui vérifient leurs deux équations (3) et (13) donnent

$$S\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{et} \quad S\lambda x = \pm\sqrt{S\lambda^2a^2}.$$

La seconde de ces relations est l'équation de deux plans tangents à l'ellipsoïde principal, et perpendiculaires à la direction dont les angles avec les axes ont leurs cosinus proportionnels à λ, μ, ν. Ainsi les points communs aux deux ellipsoïdes se réduisent aux deux points de contact de ces plans avec l'ellipsoïde principal. Les deux surfaces y ont donc un diamètre commun et s'y touchent, c'est-à-dire que les plans $S\lambda x =$ const. y sont, chez tous les deux, conjugués au diamètre commun. L'un de ces plans, $S\lambda x = 0$, coupe, d'après (13), l'ellipsoïde des conductibilités linéaires suivant la même courbe que la surface

$$S\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2},$$

semblable à l'ellipsoïde principal. Donc les courbes d'intersection des deux ellipsoïdes par les plans conjugués au diamètre commun sont des ellipses homothétiques, dont les plus grandes appartiennent à celui des conductibilités linéaires : celui-ci est, par suite, extérieur à l'autre.

§ III. — *Surfaces isothermes et courants de chaleur dans un milieu homogène indéfini.*

Admettons qu'un milieu homogène indéfini soit primitivement à la température zéro, et qu'on vienne à le chauffer dans un très-petit espace, situé à l'origine des coordonnées et limité par la surface $f(x, y, z) = 0$. La température u prendra des valeurs qui vérifieront partout l'équation (1), et qui, de plus, pour $f(x, y, z) = 0$, équivaudront à celles données à chaque instant en fonction de x, y, z, t.

Effectuons la transformation (4). Les équations

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + \mathrm{S} a^2 \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad \text{et} \quad f(x, y, z) = 0,$$

deviendront

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + \mathrm{S} \frac{d^2 u}{d\xi^2}, \quad f(a\xi, b\eta, c\zeta) = 0.$$

Considérons un milieu isotrope, qui aurait l'unité pour coefficient de conductibilité, et dont un point quelconque aurait pour coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ. D'après les deux dernières équations, u représenterait sa température, si ce milieu était primitivement à zéro, et si on le chauffait dans un très-petit espace autour de l'origine, limité par la surface $f(a\xi, b\eta, c\zeta) = 0$. Or il est évident que, dans ce cas, la température serait la même au même instant pour tous les points situés à égale distance de l'origine. Ainsi u n'est fonction que de t et de $\mathrm{S}\xi^2$. On aura les surfaces isothermes en posant

$$\mathrm{S}\xi^2 = \text{const.}, \quad \text{ou bien} \quad \mathrm{S} \frac{x^2}{a^2} = \text{const}.$$

Les surfaces isothermes sont donc des ellipsoïdes concentriques, semblables et semblablement placés, dont l'un n'est autre que l'ellipsoïde principal.

En désignant par ψ une certaine fonction, et par ψ' une de ses dérivées partielles, nous pouvons poser

$$(14)\quad u = \frac{1}{2}\psi\left(t,\ \mathrm{S}\frac{x^2}{a^2}\right),\quad \text{d'où}\quad \frac{du}{dx} = \psi'\frac{x}{a^2},\quad \frac{du}{dy} = \psi'\frac{y}{b^2},\quad \frac{du}{dz} = \psi'\frac{z}{c^2}.$$

Les équations (9) donneront, pour déterminer en chaque point la direction (f, g, h) du courant ou filet de chaleur qui y passe,

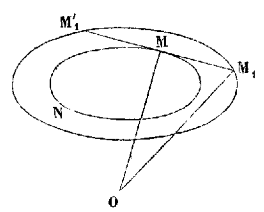
$$(15)\qquad \frac{f}{x_1} = \frac{g}{y_1} = \frac{h}{z_1},$$

dans lesquelles nous faisons

$$(16)\ x_1 = x - \nu\frac{y}{b^2} + \mu\frac{z}{c^2},\quad y_1 = y - \lambda\frac{z}{c^2} + \nu\frac{x}{a^2},\quad z_1 = z - \mu\frac{x}{a^2} + \lambda\frac{y}{b^2}.$$

Ces relations montrent d'abord qu'en tous les points d'un rayon quelconque mené à partir de l'origine, les cosinus (f, g, h) restent les mêmes, puisque x, y, z y varient à la fois dans un même rapport. Donc en tous ces points les courants de chaleur sont parallèles, et il suffit de considérer le point du rayon qui est situé sur l'ellipsoïde principal. Ce point étant $\mathrm{M}(x, y, z)$ (*fig.* 1), celui M_1, qui a pour coordonnées les valeurs correspondantes (16) de x_1, y_1, z_1, sera situé sur

FIG. 1.



l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde des conductibilités linéaires par le plan $\mathrm{S}\lambda x = \text{const.}$, mené en M et conjugué au diamètre commun des deux ellipsoïdes.

En effet, de (16) on tire d'abord

$$S\lambda x_1 = S\lambda x :$$

donc le point M_1 est sur le plan dont il vient d'être parlé. On en tire encore

$$x_1^2 = x^2 - 2x\left(\nu\frac{y}{b^2} - \mu\frac{z}{c^2}\right) + \left(\nu\frac{y}{b^2} - \mu\frac{z}{c^2}\right)^2,$$

et, par suite,

$$S\frac{x_1^2}{a^2} = S\frac{x^2}{a^2} + S\frac{1}{a^2}\left(\nu\frac{y}{b^2} - \mu\frac{z}{c^2}\right)^2.$$

En observant que l'on a identiquement

$$(17)\qquad S\frac{1}{a^2}\left(\nu\frac{y}{b^2} - \mu\frac{z}{c^2}\right)^2 = \frac{S\left(\nu c\frac{y}{b} - \mu b\frac{z}{c}\right)}{a^2b^2c^2} = \frac{S\lambda^2a^2S\frac{x^2}{a^2} - (S\lambda x)^2}{a^2b^2c^2},$$

et $S\lambda x_1 = S\lambda x$, il vient

$$(17\ bis)\qquad S\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(S\lambda x_1)^2}{a^2b^2c^2} = \left(1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}\right)S\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}.$$

Ainsi le point M_1 appartient bien à l'intersection de l'ellipsoïde des conductibilités linéaires par le plan $S\lambda x =$ const., qui passe en M.

Si λ, μ, ν changent de signe tout en conservant les mêmes valeurs absolues, l'ellipsoïde principal, qui ne dépend pas de ces coefficients, et celui des conductibilités linéaires, dont l'équation ne les contient qu'au second degré, resteront les mêmes; d'ailleurs les relations (16) font voir que, pour le même point $M(x, y, z)$ que dans le premier cas, les projections sur les trois axes $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ de la ligne qui joint ce point à (x_1, y_1, z_1) changent simplement de signe. On aura donc, au lieu du point primitif M_1, un autre point M'_1 de la même ellipse, sur le prolongement de M_1M, et à une distance MM'_1 égale à M_1M. Or nous avons vu à la fin du paragraphe précédent que le plan mené par M, perpendiculairement à la direction (λ, μ, ν), coupe l'ellipsoïde principal suivant une ellipse MN concentrique et semblable à l'ellipse $M_1 M'_1$: donc la corde $M_1 M'_1$, que M divise en deux parties égales, s'y trouve tangente à l'ellipse MN.

On pourra, d'après cela, obtenir le point (x_1, y_1, z_1), en faisant passer, par le point donné M de l'ellipsoïde principal, un plan perpendiculaire à la direction λ, μ, ν, c'est-à-dire conjugué au diamètre qui est commun à cet ellipsoïde et à celui des conductibilités linéaires; la tangente en M à l'intersection de ce plan par l'ellipsoïde principal, prolongée de part et d'autre jusqu'à la rencontre de l'ellipsoïde des conductibilités linéaires, donnera le point cherché par l'une de ses deux extrémités. Il ne reste plus qu'à savoir laquelle de ces deux extrémités on devra choisir.

Pour cela, supposons, afin de fixer les idées, qu'on ait pris les axes de sens direct, c'est-à-dire l'axe des y à droite de celui des x, pour un observateur dont les pieds sont à l'origine et dont la tête est suivant la partie positive de l'axe des z. Représentons-nous un autre observateur, couché le long du diamètre commun, lieu des centres des ellipses MN, qui aurait les pieds à l'origine et la tête dans la direction dont les angles avec les axes ont pour cosinus $\frac{\lambda a^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$, $\frac{\mu b^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$, $\frac{\nu c^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$: cherchons si cet observateur, tourné vers le point M, verra le point (x_1, y_1, z_1) à sa droite ou à sa gauche.

Les valeurs (16) de x_1, y_1, z_1 variant d'une manière continue quand x, y, z varient aussi d'une manière continue, il est clair que, si le point (x_1, y_1, z_1) est vu à droite ou à gauche de M dans une seule de ses positions, il le sera dans toutes. Prenons, par exemple, le point $M(x, y, z)$, à l'intersection de l'ellipse $S\frac{x^2}{a^2} = 1$, $S\lambda x = 0$, par le plan des yz, et du côté des y positifs. La première des relations (16), combinée avec $S\lambda x = 0$ et $x = 0$, donne

$$x_1 = -\frac{y}{\nu}\left(\frac{\nu^2}{b^2} + \frac{\mu^2}{c^2}\right);$$

y étant positif, x_1 et ν ont signe contraire. Si ν est positif, l'observateur a la tête au-dessus du plan des xy, et, x_1 étant négatif, tandis que $x = 0$ et que y est positif, le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ est vu à droite du point M. Si ν est négatif, l'observateur a la tête au-dessous du plan des xy, x_1 est positif, et M_1 est encore vu à droite de M.

Donc la tangente MM_1 doit être toujours menée de gauche à droite à partir du point M.

La droite OM_1, qui joint l'origine des coordonnées au point (x_1, y_1, z_1), a, d'après les relations (15), même direction que les courants de chaleur qui rencontrent OM. Des éléments infiniment petits de ces courants, pris à partir de leur intersection avec OM, sont donc dans le plan MOM_1, tangent au cône qui aurait pour sommet O et pour directrice l'ellipse MN : ils se trouvent par conséquent sur ce cône. Pour la même raison, les éléments suivants de ces courants seront encore sur le même cône, et ainsi de suite.

Donc les courants de chaleur sont des spirales tracées sur des cônes qui ont pour sommet commun l'origine et pour directrices les diverses sections de l'ellipsoïde principal par des plans conjugués au diamètre commun de cet ellipsoïde et de celui des conductibilités linéaires. Ces cônes, constitués par une infinité de courants pareils, sont de véritables tourbillons de chaleur. En s'écartant de l'origine, les spirales tournent de gauche à droite pour un observateur qui a les pieds à cette origine, et la tête dans la direction dont les angles avec les axes ont pour cosinus $\frac{\lambda a^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$, $\frac{\mu b^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$, $\frac{\nu c^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$. Toutes celles qui se trouvent sur un même cône sont parallèles aux points où elles rencontrent la même génératrice; leur direction en ces points s'obtient en menant de gauche à droite, à l'intersection de la génératrice considérée et de l'ellipse directrice, une tangente à cette ellipse, et en joignant l'origine au point où cette tangente rencontre l'ellipsoïde des conductibilités linéaires. La chaleur décrit ainsi une infinité de tours, et, d'un tour à l'autre, s'écarte de l'origine qui est un point asymptote. Le seul courant qui soit rectiligne est celui qui correspond au cône central, c'est-à-dire au diamètre commun des deux ellipsoïdes.

Les expressions (14) des dérivées partielles de u, portées dans les relations (2), changent la formule générale (8) des flux de chaleur en

$$F = \psi' S m x_1.$$

La valeur du courant C s'obtient en faisant

$$m = \frac{-x_1}{\sqrt{\mathrm{S}x_1^2}}, \quad n = \frac{-y_1}{\sqrt{\mathrm{S}x_1^2}}, \quad p = \frac{-z_1}{\sqrt{\mathrm{S}x_1^2}},$$

d'où

$$\mathrm{C} = -\psi'\sqrt{\mathrm{S}x_1^2}.$$

Aux divers points d'une même surface isotherme, le courant est proportionnel à $\sqrt{\mathrm{S}x_1^2}$, c'est-à-dire au rayon OM_1 de l'ellipsoïde des conductibilités linéaires, qui correspond à la génératrice OM sur laquelle est le point où l'on mesure le courant.

Un plan conjugué au diamètre commun des deux ellipsoïdes a pour équation $\mathrm{S}\lambda x = \pm\,\delta\sqrt{\mathrm{S}\lambda^2}$, δ désignant sa distance à l'origine. Le flux qui le traverse en venant de l'origine s'obtient en faisant

$$m = \frac{\mp\lambda}{\sqrt{\mathrm{S}\lambda^2}}, \quad n = \frac{\mp\mu}{\sqrt{\mathrm{S}\lambda^2}}, \quad p = \frac{\mp\nu}{\sqrt{\mathrm{S}\lambda^2}};$$

il est égal à

$$-\psi'\delta.$$

Donc tout plan conjugué au diamètre commun des deux ellipsoïdes est coupé par deux tourbillons infiniment voisins suivant une couronne elliptique, traversée dans toute son étendue par un flux de chaleur constant, proportionnel, pour les couronnes adjacentes à un même ellipsoïde isotherme, aux distances de leurs plans à l'origine.

On trouverait encore que le flux qui sort par les divers éléments plans d'un ellipsoïde isotherme est égal à $-\psi'$, multiplié par la normale menée de l'origine aux plans de ces éléments.

§ IV. — *Cylindres et plans isothermes.*

Supposons que le milieu homogène, au lieu d'être chauffé en un seul point, le soit de la même manière en tous les points d'une droite indéfinie; il est clair que la température sera constante sur toute parallèle à cette droite. Si donc nous prenons celle-ci pour axe des z', et pour axes des x' et des y' deux droites formant avec elle un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal, l'équation de la chaleur sera, d'après le § I,

$$(18) \qquad \rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + a'^2 \frac{d^2 u}{dx'^2} + b'^2 \frac{d^2 u}{dy'^2}.$$

Effectuons la transformation $\frac{x'}{a'} = \xi'$, $\frac{y'}{b'} = \eta'$, et cette équation deviendra

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + \frac{d^2 u}{d\xi'^2} + \frac{d^2 u}{d\eta'^2};$$

u, considéré comme fonction de ξ', η', t, exprimerait la température dans un milieu isotrope, où ξ', η', ζ' seraient des coordonnées rectangulaires d'un point quelconque, et où le coefficient de conductibilité vaudrait 1. De plus, les autres conditions reviendraient à dire que, pour $t = 0$, $u = 0$, et que sur un cylindre très-petit, presque identique à l'axe des ζ', la température est une fonction donnée de ξ', η', t. Or il est évident que, dans ce cas, u ne dépendrait que de t et de la distance de chaque point à l'axe des ζ'. Ainsi u est fonction de t et de $\xi'^2 + \eta'^2$. L'équation des surfaces isothermes est $\xi'^2 + \eta'^2 = \text{const.}$, ou bien

$$(19) \qquad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = \text{const.}$$

Elle représente des cylindres qui ont leurs génératrices parallèles à la droite chauffée et sont circonscrits aux ellipsoïdes isothermes du paragraphe précédent.

Concevons plusieurs milieux homogènes pareils et superposés, où la fonction $\varphi(u, t)$ soit la même, et dont la température initiale soit nulle. Supposons qu'on les chauffe simultanément suivant des droites différentes, menées à partir de l'origine, de manière que la condition relative à l'échauffement se trouve la même pour tous les milieux isotropes correspondants en ξ', η'. Il est clair que u sera pour tous la même fonction de ξ', η', t. Ainsi l'équation (19) représentera les cylindres d'égale température qui se produiront au même instant dans tous les milieux. Ces cylindres auront pour enveloppes les ellipsoïdes isothermes du paragraphe précédent, c'est-à-dire des surfaces homothétiques par rapport à l'ellipsoïde principal.

Reportons-nous à l'équation (18), et considérons en outre le cylindre isotherme

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1.$$

Par la même origine, et sans changer l'axe des z', menons un plan quelconque pour nouveau plan coordonné, et adoptons deux axes des x'' et des y'' suivant deux diamètres conjugués de l'ellipse d'intersection du cylindre par ce plan. L'équation du cylindre deviendra de la forme

$$\frac{x''^2}{a''^2} + \frac{y''^2}{b''^2} = 1.$$

Les coordonnées x' et y' seront des fonctions linéaires de x'', y''. Donc on pourra raisonner absolument comme au § I, et mettre l'équation (18) sous la forme

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + a''^2 \frac{d^2 u}{dx''^2} + b''^2 \frac{d^2 u}{dy''^2}.$$

Concevons enfin un milieu indéfini, chauffé également sur toute l'étendue d'un plan. Il est clair que la température sera constante sur tout plan parallèle à celui-là. Prenons ce plan pour celui des $x'y'$, et dirigeons l'axe de z' suivant le diamètre conjugué de l'ellipsoïde principal. L'équation de la chaleur sera

$$(20) \qquad \rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + c'^2 \frac{d^2 u}{dz'^2}.$$

Effectuons encore la même transformation $\zeta' = \frac{z'}{c'}$. L'équation deviendra

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + \frac{d^2 u}{d\zeta'^2}.$$

Soit une infinité de milieux pareils et superposés, ayant tous la même fonction $\varphi(u, t)$, et zéro pour température initiale. Supposons qu'on les porte simultanément à la même température suivant des plans différents passant par l'origine des coordonnées. Il est clair que les conditions exprimées en ζ'^2 et t seront les mêmes pour tous. Donc u sera pour tous la même fonction de ζ'^2 et t, et les surfaces d'égale température auront pour équation $\zeta'^2 = \text{const.}$, ou $\frac{z'^2}{c'^2} = \text{const.}$ Ce sont des plans parallèles aux plans chauffés, et tangents aux surfaces $S\frac{x'^2}{a'^2} = \text{const.}$, qui ne sont autres que les ellipsoïdes isothermes du paragraphe précédent.

Les enveloppes des plans d'égale température dans les divers milieux seront donc des ellipsoïdes semblables à l'ellipsoïde principal, et semblablement placés.

Revenons à l'équation (20), et considérons les deux plans isothermes $\frac{z'^2}{c'^2} = 1$. Prenons, à partir de l'origine, un nouvel axe quelconque des z'', en laissant invariable le plan des $x'y'$. L'équation des deux plans précédents sera de la forme

$$\frac{z''^2}{c''^2} = 1, \quad \text{ce qui donne} \quad \frac{z'^2}{c'^2} = \frac{z''^2}{c''^2},$$

et l'équation (20) deviendra

$$\rho\frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + c''^2\frac{d^2u}{dz''^2}.$$

Cette remarque, et la remarque analogue sur l'équation (18), constituent une extension du théorème de M. Lamé. En les joignant à ce théorème, on voit l'analogie qui existe entre l'équation différentielle de la température et celle des surfaces isothermes, soit que la chaleur se propage suivant les trois dimensions, soit qu'elle se propage suivant deux dimensions ou suivant une seule. Dans tous ces cas, si l'on considère la surface isotherme dont le paramètre est égal à 1, et qu'on adopte pour axes des coordonnées un système quelconque de diamètres conjugués de cette surface, l'équation des températures a la forme simple de celle de Fourier, avec des coefficients égaux aux carrés des demi-diamètres correspondants de la surface.

§ V. — *Propagation de la chaleur dans une barre.*

Après avoir étudié le mouvement de la chaleur dans un milieu indéfini en tous sens, nous allons traiter la même question pour des corps ayant deux dimensions très-petites, ou seulement une seule. Nous appellerons les premiers des *barres,* les seconds des *plaques*.

Cherchons donc l'équation de la chaleur dans une barre homogène rectiligne, à section normale très-petite, mais d'ailleurs de forme quelconque.

Nous adopterons pour axes des coordonnées ceux de l'ellipsoïde principal, et nous supposerons que la barre parte de l'origine et s'étende indéfiniment dans la direction qui fait avec les axes des angles ayant les cosinus f, g, h.

Nous admettrons qu'elle soit placée dans un milieu dont chaque point se trouve à une température donnée en fonction du temps. Cette température sera supposée la même sur toute l'étendue d'une droite quelconque parallèle à la barre. Il est clair que tous les points de celle-ci, situés sur une même génératrice de la surface, se trouveront dans les mêmes conditions et rayonneront de la même manière vers le milieu environnant, pourvu qu'ils aient la même température. Le même fait aura lieu, sans que la température du milieu environnant soit constante sur toute parallèle à la barre, si celle-ci est placée très-loin des corps vers lesquels elle rayonne. Donc la chaleur rayonnante émise dans l'unité de temps et par l'unité de surface, sera, aux divers points d'une même génératrice, une fonction déterminée χ du temps t et de la température u au point considéré. La même chose arrivera si la barre est recouverte d'une substance, telle que la cire, qui fonde pendant l'expérience et fasse ainsi varier le pouvoir émissif. En effet, ce pouvoir pourra varier de deux manières : si la substance, tout en changeant d'état, continue à recouvrir la surface, le pouvoir émissif ne changera qu'avec son état et sera par conséquent une fonction déterminée de u; si au contraire la substance, en fondant, tombe ou se retire par un effet de capillarité, comme il arrivait dans plusieurs expériences de M. de Senarmont, le pouvoir émissif sera encore une fonction déterminée de u, car il ne sera autre que celui de la substance jusqu'à la température de fusion complète, et au delà il sera celui de la barre même. La fonction χ pourra varier d'une génératrice de la surface à une autre génératrice, soit parce que le pouvoir émissif ne sera pas le même pour toutes, soit encore parce que la température du milieu environnant ne sera pas également distribuée tout autour.

Découpons la barre en éléments de volume, par des plans infiniment voisins parallèles entre eux. Soient : σ une section normale, s son contour, dl la distance de deux plans consécutifs, mesurée suivant la direction de la barre. L'élément compris entre les deux plans aura pour volume σdl, et la quantité de chaleur qu'il reçoit dans l'instant dt sera exprimée par $\rho \frac{du}{dt} dt \sigma dl$. Cette quantité de chaleur se compose de trois parties. Il y a d'abord, si le corps est diathermane, une partie reçue par rayonnement dans toute la masse, partie que nous supposerons de la forme $\varphi(u, t)\sigma dl dt$. En second lieu, la chaleur reçue par la surface latérale est, pour un élément $dsdl$ de cette surface, $-\chi(u, t) ds dl dt$; elle est donc pour toute la surface, en désignant par $\chi_1(u, t)$ la valeur moyenne de $\chi(u, t)$, $-\chi_1(u, t) s dl dt$. Enfin la troisième partie est la différence entre le flux que l'élément considéré σdl a reçu par une de ses bases de l'élément suivant, et celui qu'il a cédé par son autre base au précédent. Quelques réflexions nous permettront d'obtenir, presque sans nouveaux calculs, la différence de ces flux, et, par suite, l'équation de la chaleur dans la barre.

Les flux considérés, c'est-à-dire ceux qui traversent les bases d'un élément de volume, sont de même ordre de grandeur que ces bases, et, s'ils laissent varier d'une manière continue la température d'éléments de volume incomparablement plus petits, c'est qu'ils leur ôtent à chaque instant par une base presque autant de chaleur qu'ils leur en donnent par l'autre. Il n'en est pas ainsi des flux qui entrent ou qui sortent par la surface latérale. Ceux-ci sont indépendants les uns des autres, car ils ne varient qu'avec le pouvoir émissif, la température u et les circonstances extérieures; ils ne se neutralisent pas en général, et sont par conséquent de même ordre de grandeur que les éléments de volume, c'est-à-dire incomparablement plus petits que les premiers.

Soient m, n, p les cosinus des angles que fait, avec les axes des x, y, z, la normale à un élément de la surface. D'après les formules (2) et (8), le flux qui traverse cet élément est $S\left(a^2 \frac{du}{dx} - \nu \frac{du}{dy} + \mu \frac{du}{dz}\right) m$.

Il doit être très-petit par rapport à d'autres flux, et conséquemment par rapport aux dérivées partielles de u en x, y, z. On peut donc égaler sensiblement à zéro son expression : ce qui signifie que l'élément de la surface est à très-peu près parallèle à la direction dont les angles avec les axes ont leurs cosinus proportionnels à

$$a^2 \frac{du}{dx} - \nu \frac{du}{dy} + \mu \frac{du}{dz}, \quad b^2 \frac{du}{dy} - \lambda \frac{du}{dz} + \nu \frac{du}{dx}, \quad c^2 \frac{du}{dz} - \mu \frac{du}{dx} + \lambda \frac{du}{dy}.$$

A cause de la continuité, les dérivées partielles de u en x, y, z varient très-peu sur toute l'étendue d'une même section très-petite de la barre par un plan ; on peut les regarder comme égales à la valeur qu'elles ont en un point particulier de la section, et mettre cependant pour m, n, p les cosinus relatifs à une normale quelconque de la surface. Or la seule direction parallèle à tous les éléments de la surface est celle de la barre. On aura donc à très-peu près les égalités (9), qui signifient que le courant de chaleur en chaque point est sensiblement dirigé dans le sens même (f, g, h) de la barre, et qu'au même degré d'approximation les surfaces isothermes sont des éléments plans parallèles entre eux, de direction déterminée.

Concevons actuellement qu'au lieu de la barre nous ayons le corps, supposé indéfini, d'où elle a été tirée, et que la température vérifie dans ce corps les équations (9). Les surfaces isothermes y seront les mêmes plans, mais indéfinis, que dans la barre. Si nous adoptons un axe des z', suivant la droite conjuguée à ces plans dans l'ellipsoïde principal, l'équation (20) sera celle des températures dans le milieu. La conductibilité y donnera donc, par unité de volume et dans l'unité de temps, une quantité de chaleur égale à $c'^2 \frac{d^2 u}{dz'^2}$.

Cela posé, découpons par la pensée, dans le milieu indéfini, une barre exactement égale à la proposée, et divisons cette barre en éléments de volume, comme nous l'avons fait pour la proposée elle-même. Les équations (9) étant rigoureusement vérifiées, les flux sont nuls à travers la surface latérale de ces éléments, et la différence des flux qui traversent leurs bases fournit à elle seule le terme $c'^2 \frac{d^2 u}{dz'^2}$. Cela sera vrai de quelque manière que la température varie d'un plan isotherme à un autre plan isotherme. Si donc nous supposons qu'à l'époque t, u varie d'un de ces plans aux suivants, à très-peu près comme dans la barre proposée, les températures seront sensiblement distribuées dans celle-ci comme dans la barre idéale; par conséquent les flux relatifs aux bases seront à très-peu près égaux dans les deux barres pour tous les éléments de volume, et la différence des deux consécutifs qui traversent les deux bases de l'élément σdl vaudra chez toutes les deux $c'^2 \frac{d^2 u}{dz'^2} \sigma dl\, dt$.

En égalant à $\rho \frac{du}{dt} \sigma dl dt$ la somme de cette quantité et des deux autres termes $\varphi(u, t)\sigma dl dt$, $-\chi_1(u, t) s\, dl\, dt$, on obtient l'équation des températures dans la barre

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) - \chi_1(u, t) \frac{s}{\sigma} + c'^2 \frac{d^2 u}{dz'^2}.$$

Elle est pareille à l'équation (20), relative aux plans isothermes dans le milieu indéfini, et donnera lieu aux mêmes conséquences, que je vais développer.

1° Si plusieurs barres, taillées dans le même milieu et ayant le terme $-\chi_1(u, t) \frac{s}{\sigma}$ égal, partent en divers sens de l'origine des coordonnées et sont chauffées simultanément à cette origine, les plans d'égale température seront tangents chez toutes aux mêmes ellipsoïdes $S \frac{x^2}{a^2} = \text{const.}$ La normale au plan isotherme tangent en un point (x, y, z) de ces ellipsoïdes fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}$. Ces quantités sont entre elles comme les dérivées partielles de u en x, y, z et peuvent leur être substituées dans les relations (9). Appelons, d'autre part, x_1, y_1, z_1, les coordonnées du point d'intersection du même plan isotherme par la barre, supposée réduite à une simple droite, et nous pourrons, dans les mêmes relations, remplacer f, g, h par x_1, y_1, z_1. Nous aurons ainsi

$$\frac{x_1}{x - \nu \frac{y}{b^2} + \mu \frac{z}{c^2}} = \frac{y_1}{y - \lambda \frac{z}{c^2} + \nu \frac{x}{a^2}} = \frac{z_1}{z - \mu \frac{x}{a^2} + \lambda \frac{y}{b^2}}.$$

Désignons par q la valeur commune de ces rapports, et tirons les valeurs de x_1, y_1, z_1, pour les porter dans l'équation du plan tangent isotherme

$$S\frac{xx_1}{a^2} = S\frac{x^2}{a^2};\quad \text{celle-ci devient}\quad S\frac{x^2}{a^2} = qS\frac{x^2}{a^2},\quad \text{ou}\quad q = 1.$$

Les valeurs de $(x_1 y_1, z_1)$ sont par conséquent données par les relations (16), et les lieux géométriques des points d'égale température sur toutes les barres seront, d'après (17 *bis*), des ellipsoïdes semblables à celui des conductibilités linéaires et semblablement placés.

2° Si l'on prend, à partir de l'origine, au lieu de l'axe des z', un autre axe des z'' qui aille rencontrer à une distance c'' le plan isotherme $z' = c'$, l'équation de la chaleur dans la barre deviendra

$$\rho\frac{du}{dt} = \varphi(u, t) - \chi_1(u, t)\frac{s}{\sigma} + c''^2\frac{d^2 u}{dz''^2}.$$

Il est naturel de choisir pour axe coordonné une droite prise dans la barre et de même direction (f, g, h). Désignons par l la distance à l'origine d'un point quelconque de cette droite, et par K la distance à la même origine du point où la droite rencontre le plan isotherme $z' = c'$. L'équation de la température le long de l'axe, ou le long de toute droite voisine, sera

$$\rho\frac{du}{dt} = \varphi(u, t) - \chi_1(u, t)\frac{s}{\sigma} + K^2\frac{d^2 u}{dl^2}; \tag{21}$$

K^2 est le coefficient de conductibilité de la barre : il vaut le carré de la distance à l'origine du point où la barre rencontre son plan isotherme tangent à l'ellipsoïde principal, c'est-à-dire, d'après (17 *bis*), qu'il n'est autre que le coefficient de conductibilité linéaire du milieu dans la direction de la barre. C'est même pour cela que ce dernier a été ainsi désigné au § II.

On serait arrivé directement à l'équation (21), en décomposant la barre en éléments de volume par des plans perpendiculaires à sa direction (f, g, h), et en observant que le flux qui traverse l'un de ces plans est, rapporté à l'unité de temps, égal au courant de chaleur $K^2\frac{-du}{dl}\sigma$.

§ VI. — *Propagation dans une plaque. — Cylindres isothermes.*

Proposons-nous maintenant d'étudier le mouvement de la chaleur dans une plaque plane indéfinie, tirée d'un milieu homogène, et d'une épaisseur très-petite et constante ε. Cette plaque sera supposée chauffée en un de ses points, pris pour origine des coordonnées x, y, z. Quant à la température du milieu environnant, nous la supposerons en chaque point une fonction donnée de t. Cette fonction pourra être arbitraire, si la plaque est très-éloignée des corps vers lesquels elle rayonne; dans le cas contraire, elle sera supposée la même sur toute l'étendue d'un plan quelconque parallèle à la plaque.

Les considérations données au commencement du paragraphe précédent font voir que les flux émis par les deux faces auront pour somme, sur l'unité de surface et dans l'unité de temps, une fonction déterminée χ_1 de u et de t. Elles montrent aussi qu'on pourra regarder comme sensiblement nulle l'expression de ces flux en fonction des dérivées partielles de la température.

Désignons par f', g', h' les cosinus des angles que fait avec les axes une normale à la plaque. Le flux qui traverse une des faces aura pour expression

$$\mathrm{S}\left(a^2\frac{du}{dx} - \nu\frac{du}{dy} + \mu\frac{du}{dz}\right)f' = \mathrm{S}(a^2 f' + \nu g' - \mu h')\frac{du}{dx}.$$

Cette quantité sera très-petite sur chacune des deux faces et, par suite, dans toute la plaque : ce qui signifie que les surfaces isothermes sont sensiblement parallèles en tous leurs points à une droite qui ferait avec les axes des angles ayant leurs cosinus proportionnels à

$$(21\ bis)\qquad a^2 f' + \nu g' - \mu h',\quad b^2 g' + \lambda h' - \nu f',\quad c^2 h' + \mu f' - \lambda g'.$$

Donc, dans une plaque, les surfaces isothermes sont à très-peu près des cylindres de forme variable, mais dont les génératrices ont une direction parfaitement déterminée.

Concevons actuellement qu'au lieu de la plaque nous ayons le milieu d'où elle a été tirée, et que la température vérifie rigoureusement dans ce milieu l'équation

$$(22) \qquad S(a^2 f' + \nu g' - \mu h')\frac{du}{dx} = 0;$$

u s'y trouvera la même sur toute droite parallèle à la direction indiquée ci-dessus, et, si l'on adopte un axe des z' suivant cette direction, deux axes des x' et des y' conjugués entre eux et avec celui des z' dans l'ellipsoïde principal, l'équation de la température dans le milieu sera (18), et la conductibilité donnera, par unité de volume et dans l'unité de temps, une quantité de chaleur égale à

$$(23) \qquad a'^2 \frac{d^2u}{dx'^2} + b'^2 \frac{d^2u}{dy'^2}.$$

Cela posé, découpons par la pensée, dans le milieu indéfini, une plaque égale à la proposée, et divisons-la en parallélipipèdes élémentaires au moyen de deux systèmes de plans parallèles. L'équation (22) étant rigoureusement vérifiée, les flux sont nuls à travers les deux bases de ces éléments, et les différences des flux qui traversent les faces latérales donnent à elles seules toute la chaleur reçue par conductibilité. Cela sera vrai, de quelque manière que varie la température d'une droite isotherme à une autre droite isotherme. Si donc nous supposons qu'à l'époque t, u varie d'une de ces droites aux autres à très-peu près comme dans la plaque proposée, la température sera sensiblement distribuée de la même manière dans les deux plaques, et les flux relatifs aux faces latérales des parallélipipèdes élémentaires donneront pour toutes les deux, par unité de volume et dans l'unité de temps, une quantité de chaleur exprimée par (23).

Si nous y joignons la chaleur rayonnante $\varphi(u,t)$, et celle que reçoit la surface, laquelle vaut $-\chi_1(u,t)$ par unité de surface et $-\frac{1}{\varepsilon}\chi_1(u,t)$ pour l'unité de volume, nous aurons l'équation de la température dans la plaque

$$\rho\frac{du}{dt} = \varphi(u,t) - \frac{1}{\varepsilon}\chi_1(u,t) + a'^2\frac{d^2u}{dx'^2} + b'^2\frac{d^2u}{dy'^2}.$$

Elle est pareille à l'équation (18), relative aux cylindres isothermes du milieu indéfini, et donnera les mêmes conséquences.

Par exemple, si l'on conçoit passant par l'origine plusieurs plaques, tirées d'un même milieu, ayant le même terme $-\frac{1}{\varepsilon}\chi_1(u,t)$, et chauffées pareillement à l'origine, les cylindres d'égale température seront pour toutes circonscrits à de mêmes ellipsoïdes semblables à l'ellipsoïde principal et semblablement placés.

Si, de plus, on prend, à partir de la même origine, au lieu des axes des x' et des y', deux autres axes quelconques des x'' et des y'', qui mettent l'équation du cylindre isotherme

$$(24)\qquad \frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1 \quad \text{sous la forme} \quad \frac{x''^2}{a''^2}+\frac{y''^2}{b''^2}=1,$$

l'équation de la chaleur dans la plaque deviendra

$$(25)\qquad \rho\frac{du}{dt}=\varphi(u,t)-\frac{1}{\varepsilon}\chi_1(u,t)+a''^2\frac{d^2u}{dx''^2}+b''^2\frac{d^2u}{dy''^2}\,[*].$$

§ VII. — *Ellipses isothermes.*

Il est spécialement intéressant d'obtenir l'intersection du cylindre isotherme (24) par la plaque correspondante, afin de connaître la forme des ellipses isothermes dessinées sur les faces de la plaque, et aussi afin d'avoir l'équation (25) au moyen de coordonnées x'', y'' prises parallèlement à deux diamètres conjugués de ces ellipses. Pour cela, nous allons d'abord chercher l'équation du cylindre (24) en fonction des coordonnées x, y, z.

En désignant par x, y, z les coordonnées courantes, par x_0, y_0, z_0 celles d'un point de l'ellipsoïde principal, les équations d'une génératrice seront

$$(26)\qquad \frac{x-x_0}{a^2f'+\nu g'-\mu h'}=\frac{y-y_0}{b^2g'+\lambda h'-\nu f'}=\frac{z-z_0}{c^2h'+\mu f'-\lambda g'}.$$

---

[*] On peut voir dans ma Thèse (*Étude sur la Propagation de la chaleur dans les milieux homogènes*, §§ IX et XV, une autre méthode, toute différente, pour obtenir les équations de la température dans une barre et dans une plaque. Paris, 1867, chez M. Gauthier-Villars, libraire.

Pour exprimer que la génératrice est située sur un plan tangent, on aura les relations

$$(27)\qquad S\frac{x_0^2}{a^2}=1,\quad S\frac{xx_0}{a^2}=1,\quad S(a^2f'+\nu g'-\mu h')\frac{x_0}{a^2}=0.$$

Ajoutons terme à terme les rapports (26), après avoir multiplié les deux termes du premier par $\frac{x}{a^2}$, ceux du second par $\frac{y}{b^2}$ et ceux du troisième par $\frac{z}{c^2}$. Ajoutons encore terme à terme les mêmes rapports, après avoir multiplié leurs deux termes respectivement par les expressions (21 *bis*), et les avoir divisés ensuite par a^2, b^2, c^2; puis égalons les deux résultats, et tenons compte de (27). Nous aurons l'équation du cylindre isotherme

$$(28)\qquad \left(S\frac{x^2}{a^2}-1\right)S\left(af'+\frac{\nu g'-\mu h'}{a}\right)^2=\left(S\frac{a^2f'+\nu g'-\mu h'}{a^2}x\right)^2.$$

A l'intersection de ce cylindre par la plaque $Sf'x=0$, son équation se réduit à

$$(29)\qquad \left(S\frac{x^2}{a^2}-1\right)S\left(af'+\frac{\nu g'-\mu h'}{a}\right)^2=\left(S\frac{\nu g'-\mu h'}{a}\frac{x}{a}\right)^2.$$

Or on a identiquement

$$S\left(af'+\frac{\nu g'-\mu h'}{a}\right)^2=Sa^2f'^2+S\left(\frac{\nu g'-\mu h'}{a}\right)^2,$$

et, en remplaçant, dans l'identité $(Saa')^2=Sa^2Sa'^2-S(bc'-cb')^2$, a par $\frac{\nu g'-\mu h'}{a}$, a' par $\frac{x}{a}$, et de même b et b', c et c' par des expressions analogues,

$$(30)\qquad S\left(\frac{\nu g'-\mu h'}{a}\frac{x}{a}\right)^2=S\left(\frac{\nu g'-\mu h'}{a}\right)^2S\frac{x^2}{a^2}-S\left(\frac{\lambda h'-\nu f'}{b}\frac{z}{c}-\frac{\mu f'-\lambda g'}{c}\frac{y}{b}\right)^2.$$

D'ailleurs on peut mettre $-f'x$ au lieu de $g'y+h'z$, dans cette dernière identité, ce qui change son dernier terme en $-\frac{Sa^2f'^2(S\lambda x)^2}{a^2b^2c^2}$;

et l'équation (29) devient

$$\mathrm{S}\frac{x^2}{a^2}+\frac{(\mathrm{S}\lambda x)^2}{a^2b^2c^2}=1+\frac{\mathrm{S}(\nu c\,bg'-\mu bch')^2}{a^2b^2c^2\,\mathrm{S}a^2f'^2}.$$

Considérons la direction fixe dont les angles avec les axes ont leurs cosinus proportionnels à λa, μb, νc, et la direction, variable d'une plaque à l'autre, dont les cosinus pareils sont proportionnels à af', bg', ch'. Si nous appelons θ l'angle de ces deux directions, nous aurons

$$\mathrm{S}(\nu c\,bg'-\mu bch')^2=\mathrm{S}\lambda^2a^2\,\mathrm{S}a^2f'^2-(\mathrm{S}\lambda a^2f')^2=\mathrm{S}\lambda^2a^2\,\mathrm{S}a^2f'^2\sin^2\theta.$$

Les équations de l'ellipse isotherme seront donc, d'abord celle de la plaque $\mathrm{S}f'x=0$, et ensuite celle-ci :

$$\mathrm{S}\frac{x^2}{a^2}+\frac{(\mathrm{S}\lambda x)^2}{a^2b^2c^2}=1+\frac{\mathrm{S}\lambda^2a^2\sin^2\theta}{a^2b^2c^2}. \tag{31}$$

Cette ellipse est située sur l'ellipsoïde (31), semblable à celui des conductibilités linéaires et semblablement placé. Les plaques dont les ellipses se trouvent sur un même ellipsoïde sont celles pour lesquelles θ a la même valeur, c'est-à-dire celles pour lesquelles les deux directions $(\lambda a, \mu b, \nu c)$ et (af', bg', ch') font un angle égal.

Cherchons les points communs aux trois intersections respectives de la plaque et des ellipsoïdes principal et (31). Les coordonnées de ces points vérifieront : 1° l'équation de l'ellipsoïde principal $\mathrm{S}\frac{x^2}{a^2}=1$; 2° celle de la plaque $\mathrm{S}af'\frac{x}{a}=0$; 3° enfin l'équation (31), qui se réduit à $\left(\mathrm{S}\frac{\lambda a}{\sqrt{\mathrm{S}\lambda^2a^2}}\frac{x}{a}\right)^2=\sin^2\theta$. La première de ces trois relations indique que $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ sont les cosinus des angles que fait avec les axes une certaine direction. La deuxième montre que cette direction est perpendiculaire à celle dont les angles avec les axes ont leurs cosinus proportionnels à af', bg', ch', ou qu'elle est celle d'une ligne située dans un plan perpendiculaire à (af', bg', ch'). Enfin, d'après la troisième, la même direction cherchée, ou son prolongement, fait avec la direction fixe $(\lambda a, \mu b, \nu c)$ un angle égal au complément de θ. Donc elle n'est autre que l'intersection d'un plan perpendiculaire à (af', bg', ch') par le plan qui contient l'angle θ, c'est-à-dire par celui qui est mené suivant les deux directions (af', bg', ch') et $(\lambda a, \mu b, \nu c)$.

Ainsi les courbes isothermes situées sur l'ellipsoïde (31) ne rencontrent qu'en deux points opposés, aux extrémités d'un diamètre de l'ellipsoïde principal, l'intersection de ces deux surfaces. Cette intersection se compose des deux ellipses égales

$$(32) \qquad S\frac{x^2}{a^2} = 1, \quad S\lambda x = \pm\sqrt{S\lambda^2 a^2}\sin\theta,$$

entre lesquelles sont comprises toutes les ellipses isothermes. De même les plaques coupent l'ellipsoïde principal suivant des ellipses, tangentes, aux deux mêmes points, aux courbes isothermes et à l'intersection (32) des deux ellipsoïdes [*].

Pour construire l'ellipsoïde (31), correspondant à une plaque quelconque, il suffira donc de mener deux plans, conjugués au diamètre commun de l'ellipsoïde principal et de celui des conductibilités linéaires, et de plus tangents à l'intersection de l'ellipsoïde principal par la plaque, puis de faire passer, par les intersections (32) de ces plans et de l'ellipsoïde principal, un ellipsoïde semblable à celui des conductibilités linéaires et semblablement placé.

---

[*] On trouve aisément que les coordonnées x, y, z, de celui des deux points pour lequel on a $S\lambda x > 0$, sont égales aux quotients par $Sa^2f'^2\sqrt{S\lambda^2 a^2}\sin\theta$ des trois expressions $a^2(\lambda Sa^2f'^2 - f'S\lambda a^2 f'),\ldots$, et que la tangente à la courbe (32), menée de gauche à droite à partir de ce point, fait avec les axes des angles ayant leurs cosinus de même signe et dans les mêmes rapports que trois quantités, dont la première est $\mu\frac{z}{c^2} - \nu\frac{y}{b^2} = (\nu g' - \mu h')S\lambda a^2 f'$. La comparaison de celles-ci avec (21 *bis*) fait voir ensuite que, des deux cylindres circonscrits à l'ellipsoïde principal qu'on peut faire passer par l'ellipse isotherme, et dont les génératrices ont leurs directions définies par des cosinus proportionnels aux expressions (21 *bis*) et à celles qu'on en déduirait en changeant les signes de λ, μ, ν, on doit choisir pour cylindre isotherme celui dont la génératrice, menée de bas en haut par rapport à l'observateur considéré au § III, fait le plus petit angle avec la tangente ci-dessus.

Il suit de là qu'en faisant varier θ, l'équation (31) représentera tous les ellipsoïdes homothétiques par rapport à celui des conductibilités linéaires, et qui coupent l'ellipsoïde principal. Les lieux des ellipses isothermes seront les portions de ces ellipsoïdes extérieures à ce dernier, et leur ensemble remplira l'espace compris entre l'ellipsoïde principal et celui des conductibilités linéaires.

§ VIII. — *Courants de chaleur dans les plaques.*

L'équation (28) représente, parmi les cylindres isothermes d'une plaque, celui qui est circonscrit à l'ellipsoïde principal. En cherchant de la même manière le cylindre isotherme circonscrit à l'ellipsoïde $S\frac{x^2}{a^2} = A$, on trouve

$$(33)\qquad S\frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(S\dfrac{a^2f' + \nu g' - \mu h'}{a^2}x\right)^2}{Sa^2f'^2 + S\left(\dfrac{\nu g' - \mu h'}{a}\right)^2} = A, \quad \text{ou} \quad S\frac{x^2}{a^2} - \frac{H^2}{m} = A,$$

dans laquelle, afin d'abréger, nous représentons par H^2 le numérateur du second terme, et par m le dénominateur, égal à $Sa^2f'^2\left(1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}\sin^2\theta\right)$.

Si ψ désigne une certaine fonction, et ψ' sa dérivée par rapport à A, nous aurons

$$(34)\qquad u = \frac{1}{2}\psi(t, A),$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = \psi'\left(\frac{x}{a^2} - \frac{a^2f' + \nu g' - \mu h'}{a^2m}H\right),$$
$$\frac{du}{dy} = \psi'\left(\frac{y}{b^2} - \frac{b^2g' + \lambda h' - \nu f'}{b^2m}H\right),$$
$$\frac{du}{dz} = \psi'\left(\frac{z}{c^2} - \frac{c^2h' + \mu f' - \lambda g'}{c^2m}H\right).$$

Ces valeurs, portées dans (9), donnent pour les cosinus f, g, h, qui fixent la direction du courant de chaleur, en un point quelconque

$M(x, y, z)$ (*fig.* 2), trois quantités proportionnelles à des expressions que je représenterai par x_1, y_1, z_1, et dont la première est

$$(35) \qquad x_1 = x - \nu\frac{y}{b^2} + \mu\frac{z}{c^2} - \frac{Ha^2}{m}\left[f'\left(1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}\right) - \frac{\lambda S\lambda a^2 f'}{a^2b^2c^2}\right].$$

Si le point $M(x, y, z)$ est sur la plaque $Sf'x = 0$, le point M_1, qui a pour coordonnées x_1, y_1, z_1, sera sur la même plaque; car les valeurs de x_1, y_1, z_1, respectivement multipliées par f', g', h', et ajoutées, donneront

$$Sf'x_1 = Sf'\left(-\nu\frac{y}{b^2} + \mu\frac{z}{c^2}\right) - H = Sf'\left(-\nu\frac{y}{b^2} + \mu\frac{z}{c^2}\right) - S\frac{\nu g' - \mu h'}{a^2}x = 0.$$

Cela était d'ailleurs évident, puisque nous savions que la chaleur se répand dans la plaque en ne passant au dehors qu'en très-petite quantité.

Si le point M appartient de plus à l'ellipse isotherme qui est située sur l'ellipsoïde (31), le point M_1 se trouvera sur celui des conductibilités linéaires. En effet, l'expression (35) de x_1 et les expressions pareilles de y_1 et z_1 donnent, en observant que $Sf'^2 = 1$, et que $Sf'x = 0$,

$$\begin{aligned} S\frac{x_1^2}{a^2} = &\left(1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}\right)S\frac{x^2}{a^2} - \frac{(S\lambda x)^2}{a^2b^2c^2} \\ &+ \frac{H^2}{m^2}\left[Sa^2f'^2\left(1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}\right)\left(1 + \frac{S\lambda^2a^2\sin^2\theta}{a^2b^2c^2}\right) - \frac{(S\lambda a^2f')^2}{a^2b^2c^2}\right] \\ &+ \frac{2H}{m}\left(1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}\right)Sf'\left(\nu\frac{y}{b^2} - \mu\frac{z}{c^2}\right) + \frac{2HS\lambda xS\lambda a^2f'}{ma^2b^2c^2}, \end{aligned}$$

$$S\lambda x_1 = S\lambda x - \frac{H}{m}S\lambda a^2 f';$$

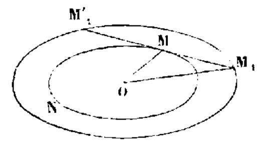
et, par suite, en observant que $Sf'\left(\nu\frac{y}{b^2} - \mu\frac{z}{c^2}\right) = -H$,

$$S\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(S\lambda x_1)^2}{a^2b^2c^2} = \left(1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}\right)\left(S\frac{x^2}{a^2} - \frac{H^2}{m}\right) = 1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2},$$

d'après (33).

Donc le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ est sur l'ellipse $M_1M'_1$ d'intersection de la plaque par l'ellipsoïde des conductibilités linéaires, courbe homothétique par rapport à l'ellipse isotherme MN sur laquelle est le point $M(x, y, z)$.

Fig. 2.



Si λ, μ, ν changent simplement de signe, ces deux ellipses restent les mêmes : mais au même point M correspond, pour point (x_1, y_1, z_1), au lieu de M_1, un autre point M'_1 de la même ellipse. D'ailleurs la relation (35), où H changera de signe, montre que $x_1 - x$, et de même $y_1 - y$ et $z_1 - z$, changent simplement de signe. Donc M'_1 est sur le prolongement de M_1M et à une distance $MM'_1 = M_1M$. Par suite, MM_1 est tangente à l'ellipse MN, et l'on obtiendra M_1, comme au § III, en menant en M la tangente à l'ellipse isotherme, et en prenant l'une des deux intersections de cette tangente avec l'ellipsoïde des conductibilités linéaires.

Il reste à savoir laquelle des deux extrémités de $M_1M'_1$ il faudra choisir. Pour cela, supposant les axes disposés comme au § III, concevons encore le même observateur, qui aurait les pieds à l'origine O, et la tête dans la direction dont les angles avec les axes ont leurs cosinus égaux à $\frac{\lambda a^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$, $\frac{\mu b^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$, $\frac{\nu c^2}{\sqrt{S\lambda^2 a^4}}$; cherchons si cet observateur, tourné vers le point M, verra le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ à sa droite ou à sa gauche.

Il est évident, d'après la continuité de la relation (35), que, si M_1 est, dans une de ses positions, à droite ou à gauche de M, il le sera dans toutes. Or il y a deux positions où il est à droite : c'est lorsque M est à un point de contact de l'ellipse isotherme et de l'intersection (32). En effet, la relation (30) donne alors

$$H^2 = S\left(\frac{\nu g' - \mu h'}{a}\right)^2 S\frac{x^2}{a^2} - \frac{S a^2 f'^2 (S\lambda x)^2}{a^2 b^2 c^2} = \frac{\left[S\lambda^2 a^2 \sin^2\theta\, S\frac{x^2}{a^2} - (S\lambda x)^2\right] S a^2 f'^2}{a^2 b^2 c^2} = 0,$$

et, par suite, les expressions de x_1, y_1, z_1 sont les mêmes que dans les formules (16) du § III, formules d'où nous avons déduit que M_1 est à droite de M.

La droite OM_1 fournissant la direction de la tangente en M au courant de chaleur qui passe par ce point, on en déduira, comme au § III, que les courants de chaleur sont des spirales ayant l'origine pour pôle et pour point asymptote, et qui s'écartent de ce point en tournant de gauche à droite. Toutes ces spirales sont parallèles aux points où elles rencontrent un même rayon émané de l'origine; la direction de leurs tangentes en ces points s'obtient en menant de gauche à droite, à l'intersection du rayon considéré et de l'ellipse isotherme MN, une tangente à cette ellipse, jusqu'à sa rencontre avec l'ellipsoïde des conductibilités linéaires, et en joignant l'origine des coordonnées à l'extrémité de cette tangente. Les spirales couperont tous les rayons sous un même angle et seront logarithmiques, alors et alors seulement que l'ellipse sera un cercle. Elles se réduiront à des lignes droites pour toutes les plaques menées suivant le diamètre commun des deux ellipsoïdes principal et des conductibilités linéaires, car alors les deux ellipses MN, $M_1M'_1$ se confondront.

La grandeur du courant sera, comme au § III, exprimée par $-\psi'\sqrt{Sx_1^2}$, et proportionnelle, aux divers points d'une même ellipse isotherme, au rayon OM_1 de l'ellipsoïde des conductibilités linéaires qui correspond au rayon OM sur lequel on mesure le courant [*].

---

[*] On arriverait encore aux résultats de ce paragraphe, et plus simplement, en observant que la *fig.* 1 (§ III) permet de construire, d'après les raisonnements mêmes faits pour l'établir, la direction du courant qui passe à l'époque t en un point quelconque O d'un milieu, lorsqu'on connaît celle de la surface isotherme menée en ce point. Si, de ce point O comme centre, on décrit l'ellipsoïde principal et celui des conductibilités linéaires, puis qu'on mène au premier, du côté où va le courant, un plan tangent parallèle à l'élément isotherme donné, et, par le point de contact M, un autre plan conjugué au diamètre commun des deux surfaces, le courant sera dirigé, à partir de O, vers l'intersection M_1, prise à droite de M, de ce plan, du plan tangent et du second ellipsoïde.

On déduira de là, dans le cas d'une plaque, la construction de la *fig.* 2, en se rappelant les cylindres isothermes du § VI et le parallélisme des courants aux faces de la plaque.