JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE LA GOURNERIE

Note sur les singularités élevées des courbes planes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 15 (1870), p. 1-6.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

NOTE

SUR

LES SINGULARITÉS ÉLEVÉES DES COURBES PLANES [*];

PAR M. DE LA GOURNERIE.

SECONDE PARTIE.

Pour compléter l'exposition du mode de discussion que je propose, je vais en faire l'application à trois courbes. Je rappelle que j'ai pris pour coordonnées l'abscisse x et le rapport u de l'ordonnée à l'abscisse.

1. Je considère en premier lieu la courbe du trente-deuxième ordre représentée par l'équation

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} &u^{15} - 2u^{14} + u^{13}x + u^{13} - u^{12}x + u^{9}x^{3} \\ &\quad - 2u^{3}x^{9} + u^{2}x^{9} - 2ux^{10} + x^{11} + x^{17} = 0. \end{aligned}\right.$$

On voit immédiatement qu'elle possède à l'origine un point multiple de l'ordre 15, et que treize des quinze branches sont tangentes à l'axe des abscisses.

A. Lorsque x est infiniment petit, les valeurs de u pour ces treize

---

[*] *Voir* première Partie, t. XIV (2e série), p. 425.

branches sont infiniment petites. De quelques ordres qu'elles soient par rapport à x, les trois premiers termes disparaissent devant le quatrième, u^3x^9 devant u^2x^9 et x^{17} devant x^{11}. Nous pouvons donc négliger cinq termes dans la recherche des grandeurs principales u_1, et ne considérer qu'un polynôme pouvant être ordonné suivant les puissances croissantes de x et les puissances décroissantes de u

$$(b) \qquad u^{13} - u^{12}x + u^9x^3 + u^2x^9 - 2ux^{10} + x^{11}.$$

B. Je cherche d'abord les valeurs de u de l'ordre le moins élevé. Je dois en trouver treize, parmi lesquelles les valeurs des ordres supérieurs figureront comme nulles. Le terme u^{13} entre donc dans l'équation qui donnera la première branche. Je suppose successivement que chacun des autres termes du polynôme (b) soit réuni à u^{13}, et je vois l'ordre qui en résulte pour u. On obtient le plus faible lorsqu'on pose $u^{13} + u^9x^3 = 0$. Nous avons donc

$$u^9(u^4 + x^3) = 0;$$

u possède par conséquent quatre valeurs de l'ordre $\frac{3}{4}$, et neuf d'ordres plus élevés. Les premières déterminent une branche ayant un rebroussement de première espèce, avec un point quadruple et un rayon de courbure nul.

C. L'équation qui donne la seconde branche ne peut pas contenir des puissances de u supérieures à la neuvième, et renferme nécessairement le terme u^9x^3. On trouve $u^9x^3 + u^2x^9 = 0$, d'où

$$u^2x^3(u^7 + x^6) = 0.$$

Des neuf valeurs supérieures à $\frac{3}{4}$, sept sont de l'ordre $\frac{6}{7}$ et deux d'ordres plus élevés. Le facteur x^3 indique que les branches, dans lesquelles les valeurs de u sont d'ordres inférieurs à $\frac{6}{7}$, possèdent sur l'axe des abscisses trois points coïncidant avec l'origine des coordonnées, indépendamment de ceux qui forment la multiplicité de ce point singulier.

La branche $(u^7 + x^6)$ se décompose en sept branches partielles dont six sont imaginaires et une réelle. Les rayons de courbure de toutes ces branches changent de signe à l'origine en passant par zéro.

D. J'ai ensuite $u^2x^9 - 2ux^{10} + u^{11} = 0$, d'où

$$x^9(u - x)^2 = 0.$$

u ayant deux valeurs égales, je dois avoir égard aux termes qui, dans l'équation générale (a), sont de l'ordre immédiatement supérieur à celui des termes de l'équation que je viens d'écrire, en considérant u comme du premier ordre. Je trouve

$$x^9(u - x)^2 + u^9x^3 - 2u^3x^9 = 0.$$

Je remplacce u hors de la parenthèse par sa valeur principale x, et j'ai l'équation

$$u = x \pm \sqrt{x^3},$$

qui caractérise un rebroussement de seconde espèce.

E. Je vais maintenant m'occuper des branches qui ne touchent pas l'axe des abscisses.

Lorsqu'on suppose x infiniment petit et u fini, l'équation (a) se réduit à

$$u^{13}(u - 1)^2 = 0.$$

La valeur 1 de u donne seulement l'inclinaison de la tangente des branches. Pour connaître leur nature, il faut introduire les termes dont l'ordre est immédiatement supérieur à celui des termes qui ont été conservés. La partie nouvelle ainsi ajoutée à l'équation est divisible par $(u - 1)$. En opérant comme il est dit au n° 5 de la première Partie de cette Note, on est conduit à rechercher les valeurs infiniment petites de $(u - 1)$ données par l'équation

$$u_1^{13}(u - 1)^2 + u_1^{12}x(u - 1) + u_1^9x^3 = 0,$$

dans laquelle u_1 est égal à l'unité. On trouve

$$u - 1 + x = 0 \quad \text{et} \quad u - 1 + x^2 = 0.$$

Nous avons deux branches simples tangentes l'une à l'autre. Le rayon de courbure de la première est égal à la racine carrée de 2; la seconde présente une inflexion.

2. Pour seconde application, je prendrai l'équation

$$u^{16} - u^{11}x^3 + u^{10}x^5 - u^6x^6 - u^5x^8 + ux^9 - 3x^{11} = 0.$$

En raisonnant comme à l'article précédent, on trouve que les valeurs principales de u sont données par les équations

$$u(u^5 - x^3)^2(u^5 + x^3) = 0,$$
$$x^9(u - 3x^2) = 0.$$

Les termes de la première doivent être considérés comme étant de l'ordre $9\frac{3}{5}$. Pour étudier la singularité déterminée par les deux valeurs de u^5 dont les grandeurs principales sont égales à x^3, je dois avoir égard aux termes de l'ordre immédiatement supérieur qui est le onzième. J'ai

$$u(u^5 - x^3)^2(u^5 + x^3) + u^{10}x^5 - u^5x^8 - 3x^{11} = 0,$$

d'où

$$u_1^5 = x^3, \quad u^5 = x^3 \pm \sqrt{\frac{-u_1^{10}x^5 + u_1^5x^8 + 3x^{11}}{u_1(u_1^5 + x^3)}}.$$

Eu égard à la valeur de u_1^5, les termes du numérateur sous le radical ne diffèrent que par leurs coefficients; on peut les réduire à un seul, $3u_1^5x^8$. Les deux termes du dénominateur donnent de la même manière $2u_1x^3$, et on a

$$u^5 = x^3 \pm \sqrt{\frac{3}{2}u_1^4x^5}.$$

On peut remplacer le produit $u_1^4x^5$ par $u_1^9x^2$. Les exposants de u_1 et de x sous le radical ne sont donc pas complétement déterminés, mais l'un d'eux est nécessairement pair et l'autre impair.

La singularité consiste en un rebroussement de seconde espèce.

On déduit de la valeur trouvée pour u^5

$$u = x^{\frac{3}{5}} \pm \left(\frac{3}{50}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{10}} u_1^2.$$

L'abscisse étant infiniment petite du premier ordre, l'ordonnée est de l'ordre $\frac{8}{5}$, et la différence des ordonnées pour les deux branches de l'ordre $\frac{23}{10}$.

Je ne m'arrête pas aux particularités des branches caractérisées par les équations $u^5 + x^3 = 0$ et $u - 3x^2 = 0$, parce qu'elles ne présentent aucun intérêt particulier.

3. Je vais maintenant montrer par un exemple que la méthode s'applique sans difficulté au cas où le point multiple est à l'infini.

Jusqu'à présent j'ai pris pour variables x et $\frac{y}{x}$, parce que la discussion roule sur les nombres p et q qui sont les exposants de ces quantités. Cette considération a peu d'importance dans l'étude d'une courbe déterminée. Comme d'ailleurs je n'aurai pas à me servir de formules précédemment établies, j'emploierai les coordonnées ordinaires x et y.

La courbe représentée par l'équation

$$(a) \qquad x^{22}y^{8} - x^{11}y^{11} + x^{19} + x^{2}y^{13} - 2xy^{13} + y^{13} = 0$$

possède deux points multiples à l'infini : l'un du dix-septième ordre sur l'axe des ordonnées, l'autre du huitième sur celui des abscisses. Je me propose de déterminer les singularités des branches qui passent par le premier de ces points.

A. Si l'on suppose que x et y croissent indéfiniment, on reconnaît, en raisonnant comme je l'ai fait au n° **1** A, que quatre des termes disparaissent devant les trois autres, et que l'équation se réduit à

$$x^{22}y^{8} - x^{11}y^{11} + x^{2}y^{13} = 0.$$

Les termes ont deux facteurs communs x^2 et y^8. Le premier correspond à des branches infinies dont les asymptotes sont parallèles à l'axe des ordonnées; le second à des branches dont les asymptotes sont parallèles à l'axe des abscisses.

Je supprime ces facteurs, et j'ai pour représenter les branches dans lesquelles les coordonnées sont l'une et l'autre infinies l'équation

$$(b)\qquad x^{20} - x^9 y^3 + y^5 = 0.$$

On en déduit les deux équations caractéristiques

$$x^{11} - y^3 = 0, \quad x^9 - y^2 = 0.$$

La branche qui correspond à la première a un rebroussement de première espèce avec un point octuple sur l'axe des ordonnées. La droite de l'infini est la tangente de rebroussement; elle possède sur la courbe trois points indépendamment de ceux qui forment la multiplicité de ce point singulier.

La branche caractérisée par la seconde équation possède sur l'axe des ordonnées un point septuple; elle traverse la droite de l'infini qui est sa tangente, et elle a en commun avec cette ligne deux points en outre de ceux qui forment la multiplicité du point singulier.

B. Il faut actuellement rechercher les équations caractéristiques des branches pour lesquelles l'ordonnée est infinie et l'abscisse finie ou de degré zéro. En ne conservant que les termes qui, dans ces hypothèses, sont de l'ordre le plus élevé, on a

$$y^{13}(x-1)^2 = 0.$$

La branche n'est pas suffisamment caractérisée par l'équation $(x-1)^2 = 0$. J'introduis en conséquence les termes qui dans l'équation sont de l'ordre immédiatement inférieur à celui des termes conservés, et j'ai

$$xy^{13}(x-1)^2 - y^{11}x^{11} = 0,$$

$$x = 1 \pm \frac{1}{y}.$$

Dans cette équation, on doit regarder y comme infiniment grand; en d'autres termes, la courbe $y^2(x-1)^2 - 1 = 0$ possède, au point situé à l'infini sur l'axe des ordonnées, la même singularité que la branche considérée.