

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-VENANT

**Sur une détermination rationnelle, par approximation, de la
poussée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion, contre
un mur ayant une inclinaison quelconque**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 15 (1870), p. 250-263.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15_250_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur une détermination rationnelle, par approximation, de la poussée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion, contre un mur ayant une inclinaison quelconque ;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, séance du 14 février 1870.)

1. Le Mémoire *Sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres sans consistance*, que l'Académie vient d'approuver, et dont l'auteur est M. l'ingénieur des Ponts et Chaussées Maurice Levy, donne, pour cet équilibre supposé près de se rompre, des équations générales, et des formules simples qui les résolvent exactement dans une série indéfinie de cas particuliers, où il y a une certaine relation entre l'inclinaison de la face postérieure du mur soutenant les terres, et l'inclinaison du plan que leur surface supérieure est supposée affecter à partir du haut de cette même face du mur.

Je me propose principalement, dans la présente Note, de montrer, plus explicitement qu'il n'a pu être fait à la fin du Rapport sur ce Mémoire, que les formules simples tirées jusqu'à présent de sa nouvelle théorie par l'auteur peuvent être employées comme approximation et avec sécurité dans tous les autres cas, c'est-à-dire lorsque la relation en question n'est point satisfaite, et qu'ainsi la face du mur et le talus d'en haut des terres sont des plans ayant des inclinaisons quelconques.

2. La propriété qu'ont les liquides pesants en repos d'avoir leur surface supérieure constamment perpendiculaire à la direction de la gravité suffit pour montrer que, dans l'état d'équilibre, leurs pressions, même intérieures, sont partout normales aux faces pressées, et pour

qu'on puisse évaluer exactement leurs intensités et leurs directions à toutes les profondeurs.

Pour les masses inconsistantes dites *demi-fluides*, telles que la terre sablonneuse, on n'a qu'une notion bien moins complète de ce qui se passe, car leur surface supérieure peut se tenir sous une inclinaison susceptible de grandeurs diverses; on sait seulement, et c'est là leur propriété caractéristique, que cette inclinaison sur l'horizon *ne dépasse jamais un certain angle*, qui, pour chaque espèce, est dit *de terre coulante*, ou *de frottement de terre contre terre*.

Or on peut tirer, de cela seul, des conditions pour cet état d'*équilibre-limite*, ou sur le point d'être rompu, qu'il faut toujours supposer dans un système lorsqu'on veut, comme dans la question qui nous occupe, établir les conditions de sa stabilité et calculer sa résistance.

3. Soit en effet

φ

l'angle en question, qui, ainsi, est le plus grand de ceux que la direction d'une pression intérieure puisse faire avec la normale à la face à travers laquelle elle agit; c'est-à-dire soit

$\text{tang } \varphi$

le plus grand rapport de la composante tangentielle à la composante normale de la pression exercée sur cette face.

Et soient encore, si NMQ et ABMN (*fig. 1*) représentent les coupes transversales du massif considéré de terre sans cohésion et d'un mur qui le soutient, l'un et l'autre de forme prismatique à arêtes horizontales perpendiculaires au plan de coupe :

x et y les coordonnées Mq , qm tracées dans ce plan vertical, d'un de ses points, m ;

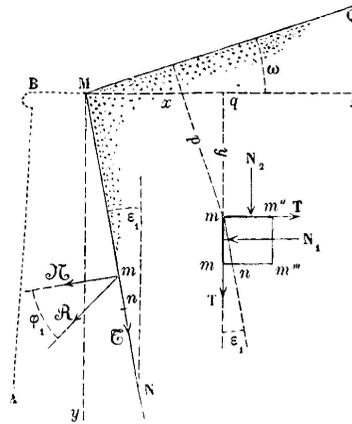
θ l'angle que nous supposerons d'abord fait avec la verticale par la coordonnée y ;

N_1 , N_2 les composantes *normales*, ou respectivement parallèles aux x , aux y , des pressions ou poussées que supportent, par unité superficielle, deux très-petites faces mm' , mm'' passant par ce point, et perpendiculaires aux mêmes coordonnées;

T la composante *tangentielle* des deux mêmes pressions, perpendiculairement à l'intersection commune m des deux faces; composante qui doit, comme on sait, être la même sur toutes deux pour satisfaire à l'équilibre de rotation d'un élément rectangle dont la coupe est $mm'm''m''$;

II le poids de l'unité de volume de la terre.

FIG. 1.



L'on a, entre N_1 , N_2 , T les trois équations

$$(1) \quad \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT}{dy} = -\Pi \sin \theta,$$

$$(2) \quad \frac{dT}{dx} + \frac{dN_2}{dy} = \Pi \cos \theta,$$

$$(3) \quad 4T^2 + (N_2 - N_1)^2 - (N_2 + N_1)^2 \sin^2 \varphi = 0,$$

dont les deux premières signifient simplement qu'il y a équilibre de translation du même élément rectangle dans les sens x et y , et dont la troisième, due à M. Levy, exprime que, parmi les petites faces obliques qui ont pour intersection commune l'arête m de l'élément, il y en a une ou deux où l'inclinaison de la pression sur sa normale atteint l'angle maximum φ : ce qui est la condition pour que le massif, ou au moins la partie du massif où est le point m , soit près de s'ébouler, ou se trouve dans l'état particulier d'équilibre que nous devons ici supposer.

Nous disons *ou la partie du massif*, parce que rien ne nous dit encore qu'il n'y ait pas quelques autres parties qui, lors de la chute du mur, resteraient immobiles, et d'autres qui se mouvraient en bloc à la manière des solides cohérents, ou sans les glissements relatifs intérieurs qui constituent l'état ébouléux.

De plus si, mn étant une quelconque de ces petites faces obliques intérieures qui se coupent suivant l'arête m , l'on appelle, pour cette face, et de même pour une petite portion mn de celle MN du mur :

ε , l'angle qu'elle fait avec les y ;

\mathcal{X} , \mathcal{C} les composantes normale et tangentielle de la pression sur cette même petite face par unité superficielle;

φ , l'angle aigu de cette pression avec la normale à la face;

φ' l'angle du frottement qu'exerceront les terres sur la maçonnerie du mur en glissant sur elle s'il y a éboulement, ou l'inclinaison-limite, sur la normale au mur, de la pression ou poussée de la terre contre le mur;

Il résulte de l'équilibre de translation du tétraèdre élémentaire de Cauchy, remplacé ici par un élément prismatique à base triangulaire $mm'n$, qu'on a

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X} = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{N_2 - N_1}{2} \cos 2\varepsilon, - T \sin 2\varepsilon, \\ \mathcal{C} = - \frac{N_2 - N_1}{2} \sin 2\varepsilon + T \cos 2\varepsilon, \\ \text{tang } \varphi = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{X}} [^*]. \end{array} \right.$$

[*] C'est même de la troisième de ces équations, écrite ainsi :

$$(4 \text{ bis}) \quad 2T \cos(\varphi - 2\varepsilon) + (N_2 - N_1) \sin(\varphi - 2\varepsilon) = (N_2 + N_1) \sin \varphi,$$

que M. Levy déduit celle (3); car, en la différentiant par rapport à ε , et faisant $\frac{d\varphi}{d\varepsilon} = 0$, il tire pour la tangente, et par suite pour le cosinus et le sinus de $\varphi - 2\varepsilon$, répondant au maximum de φ , des valeurs qui, substituées dans (4 bis), donnent pour le sinus de ce plus grand angle φ , d'inclinaison de la pression sur la normale à la face, une expression où l'on n'a qu'à remplacer φ par φ pour avoir la condition (3) de l'équilibre-limite en m .

Il faut donc, pour le *juste équilibre* supposé, outre les équations (1), (2), (3), *indéfinies* ou applicables aux divers points m du massif, qu'on ait la condition suivante *définie* ou particulière à quelques points :

$$(5) \quad \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{K}} = \text{tang } \varphi', \quad \text{c'est-à-dire } \varphi_1 = \varphi' \quad \text{à ceux qui touchent le mur;}$$

et, encore, les deux qui suivent, si l'on suppose que la partie *ébouleuse*, ou qui ne se meut qu'en se désagrégeant, doit s'étendre jusqu'en haut :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_2 = 0, \quad T = 0 \quad [\text{entraînant, vu (3), } N_1 = 0] \\ \text{aux points de la surface supérieure MQ [*].} \end{array} \right.$$

La solution, si elle est possible, des équations (1), (2), (3) sous les conditions (5) sur la partie MN du contour et (6) sur la partie MQ, fournira, après substitution dans les expressions (4), la solution complète du problème de *la poussée des terres contre le mur*, dont on doit déterminer les dimensions et le mode de fondation de manière à y résister.

M. Levy, prenant les coordonnées x, y horizontale et verticale, ou $\theta = 0$, ramène les équations indéfinies (1), (2), (3), qu'il faut résoudre, à une seule, en posant, au moyen d'une inconnue auxiliaire ψ ,

$$(7) \quad N_1 = \frac{d^2\psi}{dy^2}, \quad N_2 = \Pi y + \frac{d^2\psi}{dx^2}, \quad T = -\frac{d^2\psi}{dx dy},$$

ce qui satisfait à (1) et à (2), et donne, par substitution dans (3), une équation en ψ aux dérivées partielles du second ordre.

Comme cette équation est aussi *du second degré*, on ne peut guère espérer en trouver l'intégrale générale et exacte.

4. Mais elle s'intègre d'elle-même, ou plutôt on résout directement et exactement les équations indéfinies (1), (2), (3) dont elle provient,

[*] On n'a pas besoin de tenir compte de la pression de l'atmosphère si N_1, N_2, \mathfrak{K} ne représentent que les excès, sur celle-ci, des pressions normales effectives.

D'où l'on déduit facilement, par les formules (4) de changement de face pressée, en y faisant $\varepsilon_1 = -\omega$ et $\varepsilon_2 = -\frac{\pi}{2} + \omega$, les pressions qui suivent, relatives à $\theta = 0$, ou à des coordonnées horizontales et verticales,

$$(10) \quad N_1 = \Pi p \sigma^2 \cos \omega, \quad N_2 = \Pi p \frac{1 + \sigma^2 \sin^2 \omega}{\cos \omega}, \quad T = -\Pi p \sigma^2 \sin \omega.$$

5. Or ces expressions (10), établies par M. Levy de manière à satisfaire d'abord aux conditions (6) relatives à la surface supérieure, résoudre évidemment le problème d'une manière complète si les données ω et ε , sont telles que ces expressions satisfassent aussi à la condition (5) relative à la face du mur [*], c'est-à-dire si les angles ω et ε , ont entre eux la relation qui résulte de la substitution, dans $\frac{\bar{c}}{\bar{\sigma}} = \text{tang } \varphi'$, des expressions (4) de $\bar{\sigma}$, \bar{c} , où l'on aura mis celles (10) pour N_1 , N_2 , T . Cette relation est

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{c}}{\bar{\sigma}} = \text{tang } \varphi_1, \\ \text{en faisant } \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \varphi', \text{ et} \\ \bar{c} = \frac{-\Pi p}{2 \cos \omega} [\sin 2\varepsilon_1 + \sigma^2 \sin(2\omega - 2\varepsilon_1)], \\ \bar{\sigma} = \frac{\Pi p}{2 \cos \omega} [2 \sin^2 \varepsilon_1 + 2\sigma^2 \cos^2(\omega - \varepsilon_1)]. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

prendre $N'_1 = KN'_2 = K\Pi p \cos \omega$, K étant un certain nombre fractionnaire indépendant de ω , et auquel le calcul des forces moléculaires attribue la valeur $\frac{1}{3}$. Tout serait déterminé sans considérer spécialement l'état d'équilibre près de se rompre. Mais, en déduisant de là les pressions sur d'autres faces, on aperçoit facilement que cette assimilation à un corps unique, d'un amas de petits corps solides juxtaposés, conduirait à des pressions négatives ou *tractions* et à d'autres conséquences qui ne sauraient convenir au massif incohérent ainsi composé.

[*] Nous ne parlons pas du cas d'un massif indéfini en deux sens, ou sans mur qui le soutienne; car il n'est à l'état d'équilibre-limite et les expressions (10) ne lui sont applicables que si l'on a

$$\omega = \varphi,$$

ou si la face supérieure a le talus de terre coulante. Pour toute valeur de $\omega > \varphi$, l'équilibre ne saurait avoir lieu même quand il y a un mur, et N'_1 devient imaginaire.

Et, pour toute valeur de $\omega < \varphi$, le rapport $\frac{\bar{c}}{\bar{\sigma}}$ n'atteint sa limite $\text{tang } \varphi$ nulle part.

Elle devient fort simple et d'un calcul facile lorsque l'on prend, comme il convient toujours de le faire,

$$(12) \quad \varphi' = \varphi;$$

car, alors, elle se réduit, comme l'a trouvé M. Levy, à

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \varepsilon, \\ \varepsilon \text{ étant tiré de } \cos(2\varepsilon + \varphi - \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}. \end{array} \right.$$

Dans ce cas fort étendu, ou cette suite de cas, où la surface supérieure est plane et où la valeur de ε , est celle que l'on tire en ω de (11) ou de (13), l'on a des *plans* pour les *surfaces de glissement des deux systèmes*, formés par la double suite des petites faces sur lesquelles la pression fait, avec leur normale, l'angle φ et l'angle $-\varphi$; surfaces dont les premières sont parallèles au mur si $\varphi' = \varphi$.

Aussi alors, mais seulement alors, la théorie de Coulomb, fondée sur l'hypothèse de cette séparation des massifs par surfaces toujours planes, donne des formules s'accordant avec la théorie nouvelle. Mais celle-ci apprend qu'elles se simplifient considérablement; car en appelant en général :

\mathcal{R} la poussée résultante $= \frac{\mathfrak{P}}{\cos \varphi_1} = - \frac{\mathfrak{C}}{\sin \varphi_1}$ par unité superficielle de l'élément du mur en m ,

L la profondeur $Mm = \frac{P}{\cos(\omega - \varepsilon_1)}$ du point m , mesurée sur la face même du mur,

M. Levy a reconnu analytiquement, et vérifié géométriquement, qu'on a

$$(14) \quad \mathcal{R} = \Pi L \cos(\varphi + \varepsilon).$$

On doit remarquer aussi que toutes ces formules, établies pour une étendue indéfinie des plans MQ de la terre et MN du mur, seraient également applicables si le massif n'était qu'un coin ou prisme triangulaire contenu inférieurement entre deux murs dont les faces, pour lesquelles on suppose $\varphi' = \varphi$, et se rencontrant suivant leur arête d'en bas, seraient dirigées suivant des plans de glissement appartenant à chacun des deux systèmes dont on vient de parler. Les mêmes for-

mules sont, par conséquent, applicables aussi pour un seul mur de longueur finie MN, et pour un massif limité, pourvu que le plan supérieur de celui-ci, d'inclinaison constante ω , s'étende assez loin pour être rencontré par le plan de glissement du deuxième système partant de l'arête inférieure N; et toute la terre au-dessous de ce plan, en restant immobile, fera l'effet du deuxième mur.

6. Maintenant que fera-t-on, faute de pouvoir intégrer l'équation différentielle en ψ , lorsque, le talus supérieur ω étant donné, l'inclinaison ε_1 , aussi donnée, de la face du mur, ne sera pas égale à ε tiré de (13), c'est-à-dire lorsque les angles ω et ε_1 n'auront pas entre eux la relation nécessaire pour que les expressions (10) satisfassent exactement à la condition qui fixe l'inclinaison de la pression du massif sur la face du mur dans l'état d'équilibre-limite?

Faudra-t-il, pour obtenir toujours une approximation, revenir à la théorie de 1773, bien qu'on sache qu'alors les surfaces de glissement, ou de tendance à rupture, ne sont pas planes comme Coulomb le supposait faute de mieux?

L'étude de la théorie nouvelle m'a convaincu qu'elle offrait pour cela un expédient plus facile et plus sûr.

Il consiste à se servir des expressions (10) de N_1 , N_2 , T et de celles (11) de \varkappa , $\bar{\varepsilon}$ qu'on en déduit par substitution, comme si elles étaient exactes quel que soit l'angle ε_1 du mur qui soutient le massif.

Cela, en effet, revient simplement à supposer que l'angle du frottement sur la face du mur, au lieu d'être φ , est l'angle toujours moindre $\varphi_1 = \text{arc tang } \frac{\bar{\varepsilon}}{\varkappa}$ qui résulte de ces expressions (11) de \varkappa , $\bar{\varepsilon}$.

Or (ainsi qu'il a été observé au Rapport), le frottement des terres contre les murs les rend plus stables et diminue leur chance d'être renversés ou poussés en avant. En supposant ce frottement, non pas nul, sans doute (comme font encore quelques ingénieurs par une prudence exagérée), mais *moindre qu'il n'est effectivement*, cela conduira simplement à adopter, pour les murs, des dimensions un peu plus fortes qu'il n'est nécessaire. L'emploi que je propose ici des valeurs (11) de T et N, comme approximation dans les cas où la solution rigoureuse ne peut être obtenue, est donc favorable à la stabilité et à la sécurité.

Rien ne prouve qu'il en soit de même des formules déduites de la théorie de Coulomb : on n'a aucune raison de conjecturer qu'elles donnent des résultats au-dessus plutôt qu'au-dessous de la réalité. Elles sont moins sûres.

Or, M. Levy, à qui j'ai parlé de ce moyen de tirer de sa théorie un parti plus étendu, a aussitôt cherché à simplifier et à rendre calculables par logarithmes les expressions (13) de T et N. Il y est heureusement parvenu, et m'a communiqué les résultats suivants, non mentionnés à son Mémoire :

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \sin(2\alpha + \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi} \quad (\text{pour calculer un angle auxiliaire } \alpha), \\ \operatorname{tang}(\varphi_1 + \varepsilon_1 + \alpha) = \frac{\operatorname{tang}(\varepsilon_1 + \alpha)}{\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (\text{pour déterminer l'angle } \varphi_1), \\ \bar{\mathfrak{C}} = \frac{\Pi p \sin \varphi}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \frac{\cos \alpha \sin(2\alpha + 2\varepsilon_1)}{\cos(\alpha + \omega)}, \\ \mathfrak{R} = \frac{\bar{\mathfrak{C}}}{\operatorname{tang} \varphi_1}. \end{array} \right.$$

C'est de ces formules (où α représente l'angle fait avec l'horizon par l'une des deux directions rectangulaires de *pressions principales*, normales aux faces pressées), qui se réduisent à ce que donne (14) quand $\varepsilon_1 = \varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \alpha$, que l'on pourra tirer la valeur [quand elle ne sera pas exacte ou conforme à (14)] au moins approximative des poussées exercées sur un mur d'inclinaison quelconque ε , avec la verticale, par un massif de terre s'élevant derrière le haut du mur sous un angle ω fait avec l'horizon. Elles sont plus simples, en même temps que plus sûres, disons-nous, que celles qui résultent de la théorie de Coulomb [*].

[*] Celle-ci fournit, par une analyse compliquée dont M. l'ingénieur en chef Saint-Guilhelm est parvenu à dégager la valeur de la poussée résultante \mathfrak{R} , φ' étant l'angle quelconque du frottement contre la maçonnerie :

$$(16) \quad \frac{\mathfrak{R}}{\cos \varphi'} = \frac{\pm \bar{\mathfrak{C}}}{\sin \varphi'} = \Pi L \frac{\cos^2(\omega - \varepsilon_1) \cos(\varphi' + \varepsilon_1)}{\cos^2(\varphi + \varphi' + \varepsilon_1 - \omega)} \left[1 - \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi') \sin(\varphi - \omega)}{\cos(\omega - \varepsilon_1) \cos(\varphi' + \varepsilon_1)}} \right]^2;$$

et si l'on veut avoir la valeur de l'angle V déterminant l'inclinaison, sur la verticale,

7. On peut se demander, en partant des formules (10) et (11) regardées comme donnant une première approximation, s'il y a possibilité de s'élever analytiquement à une approximation plus grande.

de la ligne de rupture ou de glissement, ce qui est utile quand la forme du profil est un peu différente de celle que la formule (16) suppose, il faut la tirer de l'expression suivante, où le radical est le même que dans celle-ci :

$$(17) \quad \cot(V + \varphi) = - \frac{(1 + \sqrt{\quad}) \cot(\varphi + \varepsilon_1)}{1 + \cot(\varphi' + \varepsilon_1) \cot(\varphi + \omega) \sqrt{\quad}}.$$

L'expression (16) donne, pour la composante normale \mathfrak{N} qui tend au renversement, des valeurs un peu plus faibles, et, pour la composante \mathfrak{C} qui tend à la stabilité, des valeurs sensiblement plus fortes que les formules (15) de la théorie nouvelle, comme on peut le voir par le tableau suivant, qui suppose $\varphi' = \varphi = 45^\circ$.

Pour	$\omega =$	0°	10°	20°	30°	40°	$45^\circ = \varphi$
Pour $\varepsilon_1 = 0^\circ$	$\varphi_1 =$	0	10	20	30	40	45
	$\mathfrak{N} =$ (Levy....)	0,1716	0,1738	0,1818	0,2010	0,2608	0,5000
	$\mathfrak{N} =$ (Coulomb.)	0,1361	0,1374	0,1547	0,1836	0,2547	0,5000
	$\mathfrak{C} =$ (Levy....)	0	0,0306	0,0662	0,1160	0,2188	0,5000
	$\mathfrak{C} =$ (Coulomb.)	0,1361	0,1374	0,1547	0,1836	0,2547	0,5000
Pour $\varepsilon_1 = 10^\circ$	$\varphi_1 =$	$35^\circ 46' 58''$	$39^\circ 14' 24''$	$41^\circ 54' 20''$	$43^\circ 56' 48''$	$44^\circ 59' 56''$	$42^\circ 25' 37''$
	$\mathfrak{N} =$ (Levy....)	0,1936	0,2126	0,2408	0,2894	0,4109	0,8123
	$\mathfrak{N} =$ (Coulomb.)	0,1832	0,2068	0,2378	0,2886	0,4109	0,8272
	$\mathfrak{C} =$ (Levy....)	0,1395	0,1736	0,2161	0,2790	0,3833	0,7424
	$\mathfrak{C} =$ (Coulomb.)	0,1832	0,2068	0,2378	0,2886	0,4109	0,8272
Pour $\varepsilon_1 = 15^\circ$	$\varphi_1 =$	$42^\circ 22' 4''$	$43^\circ 45' 19''$	$44^\circ 38' 25''$	$45^\circ 0' 0''$	$44^\circ 12' 23''$	$39^\circ 53' 46''$
	$\mathfrak{N} =$ (Levy....)	0,2193	0,2477	0,2876	0,3536	0,5111	1,0006
	$\mathfrak{N} =$ (Coulomb.)	0,2172	0,2468	0,2874	0,3536	0,5125	1,0607
	$\mathfrak{C} =$ (Levy....)	0,1395	0,2371	0,2840	0,3536	0,4972	0,8365
	$\mathfrak{C} =$ (Coulomb.)	0,2172	0,2468	0,2874	0,3536	0,5125	1,0607
Pour $\varepsilon_1 = 20^\circ, \varphi_1 =$		$44^\circ 45' 40''$	$44^\circ 59' 40''$	$44^\circ 52' 27''$	$44^\circ 15' 30''$	$42^\circ 20' 36''$	$36^\circ 53' 41''$

Ce tableau comparatif ne donne les poussées que pour $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_1 = 10^\circ$ et $\varepsilon_1 = 15^\circ$.

Mais on voit, par les valeurs de l'angle $\varphi_1 = \arctang \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{N}}$ qui sont relatées, que

Égalons, pour cela, N_1, N_2, T à leurs expressions (10) augmentées respectivement de trois inconnues nouvelles, n_1, n_2, t supposées assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés et produits, et remplaçons-les, après substitution dans (1), (2), (3), par les trois dérivées secondes

$$\frac{d^2\psi'}{dy^2}, \quad \frac{d^2\psi'}{dx^2}, \quad -\frac{d^2\psi'}{dx dy},$$

multipliées par Π , d'une inconnue auxiliaire unique ψ' . Les deux premières équations seront satisfaites, et la troisième se changera en une équation aux dérivées partielles du second ordre *linéaire*, dont l'intégrale générale est facile à poser, soit sous forme finie, soit en série transcendante transformable en intégrale double prise de zéro à l'infini comme dans la formule de Fourier. Mais les fonctions arbitraires, ou les coefficients et paramètres, seraient à déterminer de manière à satisfaire aux conditions définies (5) et (6) relatives aux deux parties, de longueur infinie en un seul sens, MN, MQ du contour discontinu du massif; ou bien (conformément à l'observation de la fin du n° 5) aux conditions (6) à la surface MQ réduite à une longueur limitée, et à deux conditions telles que (5) relatives l'une au mur se terminant en N , l'autre à un plan de terre NQ fermant le triangle de base du massif ébouleux.

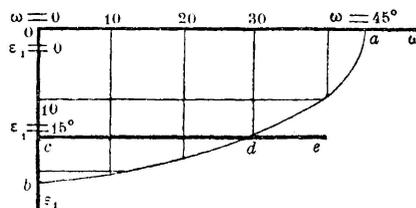
8. Une pareille détermination nous mènerait trop loin pour aujourd'hui, et paraît d'ailleurs affectée de difficultés d'un genre nouveau.

Aussi, en me bornant à exprimer le vœu que quelqu'un l'entreprenne, ou fasse dans le même but quelque tentative meilleure, je terminerai par une remarque propre à donner quelque idée d'approximation que les formules pratiques (15), établies par M. Levy à ma demande, sont susceptibles de donner.

quand ε , atteint 20 degrés, cet angle φ , du frottement fictif de la terre contre la maçonnerie, pour des talus ω de 0 à 40 degrés, se rapproche tellement de l'angle du frottement réel, supposé ici 45 degrés, qu'il est inutile alors de comparer les résultats de la formule Coulomb et de la formule Levy pour achever de se convaincre que celle-ci donne une suffisante approximation avec une sécurité plus grande.

Imaginons que l'on construise deux surfaces ayant des abscisses horizontales proportionnelles aux angles ω du talus supérieur des terres et aux angles ε d'inclinaison de la face du mur destiné à les soutenir [ces abscisses étant portées sur deux axes rectangulaires

FIG. 3.



horizontaux $O\omega$, $O\varepsilon$ (fig. 3)]; et des ordonnées verticales \varkappa qui soient : 1° pour l'une des surfaces, ce que fournirait une détermination exacte des poussées normales inconnues, qui s'exercent par unité superficielle sur un élément déterminé de cette face de mur; 2° pour l'autre surface, les valeurs plus ou moins approchées que donnent de ces mêmes poussées normales \varkappa les formules (15).

Ces deux surfaces de poussées normales vraies et approchées se couperont ou se toucheront suivant une courbe à double courbure ayant pour projection, sur le plan $\omega O\varepsilon$, des abscisses, la courbe plane adb , dont l'équation en ω et ε , est (13), ou, pour $\varphi = 45^\circ$,

$$\cos(2\varepsilon_1 - \omega + 45) = \frac{\sin \omega}{\sin 45};$$

car lorsque les angles ω et ε , ont entre eux cette relation, nous avons vu que les solutions données par les formules (15) étaient exactes.

La même chose serait dite de deux surfaces dont les ordonnées verticales seraient les ε au lieu des \varkappa .

Or, la ligne cde représente, sur la même figure, jusqu'à un talus ω tenu un peu au-dessous de sa limite, l'ensemble des projections horizontales des points de ces surfaces qui répondent à $\varepsilon_1 = 15^\circ$, c'est-à-dire à un *fruit* :

$$\text{tang } \varepsilon_1 = 0,2679,$$

ou d'environ le quart de la hauteur, qui est celui que l'on donne le plus ordinairement à la face postérieure des murs de soutènement (généralement par gradins avec terre comblant leurs redans). Le peu d'éloignement où sont les points de cette droite cde de ceux de la courbe adb montre que les formules (15) donneront habituellement des résultats \varkappa ou ε suffisamment approchés des résultats exacts.

Le plus grand écart, ou la plus grande différence, entre les ordonnées, soit \varkappa , soit ε , des deux surfaces, aura lieu pour les points qui se projettent sur l'origine O , c'est-à-dire pour les valeurs

$$\omega = 0, \quad \varepsilon_1 = 0,$$

relatives à un terre-plein horizontal et à une face de mur verticale. Or l'adoption, dans ce cas extrême, des formules (15) revient à supposer (comme l'a fait Prony, qui a considéré ce seul cas) que le mur est lisse ou sans frottement. L'erreur est favorable à la stabilité. Elle est d'ailleurs moindre, quand ε_1 n'est point nul, que celle de la formule de Français, qui négligeait encore alors le frottement sur la face du mur, tandis que nous attribuons à son coefficient la valeur que fournit pour $\tan\varphi_1$ la deuxième expression (15), valeur qui, comme on voit par le tableau ci-dessus, se rapproche beaucoup de sa vraie valeur, supposée $= \tan 45^\circ = 1$ pour peu que ε_1 s'élève à 10 degrés, et y est sensiblement égale de $\omega = 0$ à $\omega = 40^\circ$ quand $\varepsilon_1 = 15^\circ$.

Les formules (15) de poussée contre un mur soutenant une terre en talus, plus faciles à calculer et surtout offrant une sécurité plus grande que celles (16) qui résultent de la théorie de Coulomb, me paraissent donc mériter la préférence dans les cas où il n'y a pas, entre les inclinaisons ω et ε_1 , du terre-plein et du mur, la relation (11) ou (13) qui rend tout à fait exacts les résultats fournis par les deux théories alors concordantes.

