JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CHARLES BRISSE

Mémoire sur le déplacement des figures

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 15 (1870), p. 281-314.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15__281_0>

Mémoire sur le déplacement des figures;

PAR M. CHARLES BRISSE,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

Tous les géomètres connaissent le beau Mémoire publié en 1843 par M. Chasles sur le déplacement des figures [*], Mémoire qui avait été précédé d'une Note insérée en 1831 au *Bulletin de Férussac* [**]. Je me propose de démontrer les théorèmes contenus dans cette Note et dans ce Mémoire, en commençant par les établir pour un déplacement fini [***].

PROPRIÉTÉS RELATIVES AU MOUVEMENT HÉLIÇOÏDAL.

Les mouvements que l'on conçoit le plus facilement sont les mouvements de translation et de rotation. Il est donc naturel de chercher si l'on ne pourrait pas amener un corps d'une première position à une seconde, à laquelle il est parvenu d'une manière quelconque, à l'aide de l'un de ces mouvements.

1. Quand le déplacement est celui d'une figure plane dans son plan, la question revient à amener une droite de la figure de son ancienne position AB à sa nouvelle A'B'. Or on reconnaît immédiatement qu'il est en général impossible d'y parvenir par une translation.

Si l'on y parvient par une rotation, c'est que les extrémités de la

---

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XVI : Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace.

[**] *Bulletin de Férussac*, t. XIV : Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entre eux, et placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini, ou infiniment petit, d'un corps solide libre.

[***] Tous les passages guillemetés sont empruntés à M. Chasles.

droite auront décrit des arcs de cercle concentriques ayant respectivement AA′ et BB′ pour cordes. Le centre inconnu O ne pourra donc se trouver qu'à la rencontre des perpendiculaires élevées à ces droites en leurs milieux. Or, de l'égalité des triangles OAB, OA′B′ on conclut l'égalité des angles AOA′, BOB′ et par suite l'existence de la solution.

Si les deux perpendiculaires étaient parallèles, AA′ et BB′ le seraient également, et il suffirait d'une translation suivant leur direction pour amener AB en A′B′. En employant un langage connu, et en disant qu'on fait tourner AB autour du point situé à l'infini dans la direction des deux perpendiculaires, on peut énoncer le théorème général suivant :

« *Quelle que soit la position respective des deux figures, il existe toujours un point qui, étant considéré comme appartenant à la première figure, est lui-même son homologue dans la seconde; de sorte qu'il suffit de faire tourner la première figure autour de ce point pour la faire coïncider dans toutes ses parties avec la seconde* [*].

» Nous appellerons indifféremment *point central,* ou *centre de rotation,* ce point dans lequel coïncident deux points homologues des deux figures, et autour duquel on peut faire tourner une des figures pour la faire coïncider avec l'autre. »

« Quand le déplacement de la figure est infiniment petit, on en conclut que *les normales aux trajectoires des différents points d'une figure en mouvement passent toutes, à un instant du mouvement, par un même point.* Et de là résulte une méthode fort simple de déterminer les normales et les tangentes des courbes décrites dans le mouvement d'une figure de forme invariable [**]. »

---

[*] Cet énoncé est emprunté au Mémoire publié en 1860 par M. Chasles dans les *Comptes rendus*. Le théorème avait été donné, dans le *Bulletin de Férussac*, sous la forme suivante :

« *Quand deux polygones égaux sont placés d'une manière quelconque dans un plan, il existe toujours un point du plan qui est également distant de deux sommets homologues quelconques des deux polygones; ce point est semblablement placé par rapport aux deux polygones.* »

[**] Cette méthode a été indiquée pour la première fois par M. Chasles à propos de la courbe à longue inflexion décrite par un point du parallélogramme articulé de Watt (*Histoire des Machines à vapeur*, par HACHETTE, p. 85).

2. Quand le déplacement est celui d'un corps dans l'espace, la question revient à amener un triangle scalène, formé par trois points du corps, de son ancienne position ABC à sa nouvelle A′B′C′. Or on reconnaît immédiatement qu'il est en général impossible d'y parvenir par une translation.

Si l'on y parvenait par une rotation, c'est que les sommets du triangle auraient décrit des arcs de cercle ayant respectivement AA′, BB′ et CC′ pour cordes; ces trois droites seraient donc parallèles à un même plan, ce qui n'a pas lieu en général.

La translation ou la rotation seules ne suffisant pas, il y a lieu d'essayer la combinaison des deux mouvements qui nous est le plus familière, c'est-à-dire le *mouvement héliçoïdal*. AA′, BB′, CC′ seraient alors les cordes d'arcs d'hélices de même pas décrites autour d'un axe commun par les sommets du triangle. Cet axe serait donc tel que AA′, BB′, CC′ auraient sur lui des projections égales; d'où il résulte qu'en menant par un point quelconque de l'espace des droites égales et parallèles à AA′, BB′, CC′, leurs extrémités détermineront un plan qui sera perpendiculaire à la direction de l'axe cherché. Les droites AA′ et BB′ ayant sur cet axe des projections égales, il en sera de même pour les droites AB et A′B′; AB et A′B′ auront donc aussi des projections égales sur un plan perpendiculaire à l'axe, et les projections abc, $a'b'c'$ des deux triangles ABC, A′B′C′ sur un pareil plan seront superposables. Un déplacement du triangle ABC, parallèlement à l'axe, d'une quantité égale à la projection de AA′, n'altérant pas la projection abc, il suffira de chercher le point central des figures abc et $a'b'c'$ pour avoir un point de l'axe autour duquel s'effectuera la rotation qui achève de faire coïncider les deux corps. Il en résulte les théorèmes suivants :

« *L'on peut toujours transporter un corps solide libre d'une position dans une autre position quelconque déterminée, par le mouvement continu d'une vis à laquelle ce corps serait fixé invariablement.* »

« *Quand on a dans l'espace un corps solide libre, si on lui fait éprouver un déplacement fini quelconque, il existera toujours dans ce corps une certaine droite indéfinie, qui, après le déplacement, se retrouvera au même lieu qu'auparavant.* »

« *Quand on a dans l'espace deux corps parfaitement égaux, et* *placés d'une manière quelconque, l'un par rapport à l'autre, il existe toujours dans l'espace une certaine droite indéfinie, qui, considérée comme appartenant au premier corps, est elle-même son homologue dans le second.* »

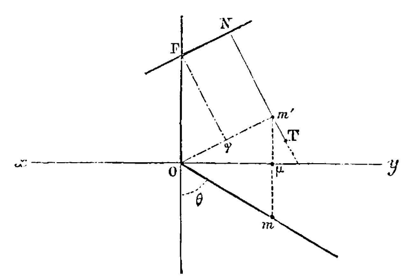
« *Quand on imprime à un corps solide libre un mouvement quelconque infiniment petit, il existe toujours dans ce corps une certaine droite qui glisse sur elle-même pendant que le corps tourne autour de cette droite; de sorte que le mouvement du corps n'est autre que celui d'une vis dans son écrou.* »

« *Tout mouvement infiniment petit d'un corps solide, retenu par un point fixe, n'est autre qu'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, mené par ce point.* »

3. Nous avons vu que les normales aux trajectoires des différents points d'une figure plane mobile dans son plan passaient toutes à chaque instant par un même point. Existe-t-il une propriété analogue pour le déplacement d'une figure plane dans l'espace?

Prenons pour plan horizontal de projection un plan mené par l'*axe du déplacement* perpendiculairement au plan donné; soit (*fig.* 1)

Fig. 1.



mO la trace horizontale de ce plan. Le plan mené par O perpendiculairement à l'axe du déplacement sera le plan vertical, et la droite OF normale à la ligne de terre la trace verticale du plan donné; soient m, m' les projections d'un point quelconque M du plan. La tangente à l'hélice décrite par le point M, quand le plan passe d'une position à une autre, est située dans le plan tangent au cylindre qui passe par M; elle se projette donc verticalement suivant la perpendiculaire $m'T$ à Om', et sa trace verticale est en un certain point T qui dépend de la grandeur du déplacement. Le plan normal à la tangente en M a pour trace verticale une parallèle FN à Om', qui coupe $m'T$ en un point N situé par rapport à m' du côté opposé à T et tel que

$$m'N \, . \, m'T = \overline{m\mu}^2;$$

en outre, F est un point de la trace du plan normal sur le plan donné.

Menons à $m'T$ la parallèle $F\varphi$; les triangles $OF\varphi$, $Om'\mu$ sont semblables et donnent

$$F\varphi \quad \text{ou} \quad m'N = OF \frac{O\mu}{Om'}.$$

On a d'ailleurs, en désignant par h le pas des hélices décrites et en remarquant que $m'T$ est la sous-tangente en M,

$$\frac{m\mu}{m'T} = \frac{h}{2\pi . Om'},$$

ou

$$m'T = \frac{2\pi . Om'}{h} m\mu.$$

Ces valeurs de $m'N$ et de $m'T$ portées dans la première équation la réduisent à

$$OF = \frac{h}{2\pi . O\mu} m\mu;$$

mais, en désignant par θ l'angle du plan donné avec l'axe du déplacement, on voit sur l'épure que

$$\frac{O\mu}{m\mu} = \operatorname{tang}\theta,$$

ce qui donne finalement

$$OF = h\frac{\cot\theta}{2\pi}.$$

D'où l'on conclut les théorèmes suivants :

« *Un plan étant considéré comme faisant partie du corps, les plans normaux aux trajectoires de ses points passeront tous par un même point du plan.* J'appellerai ce point le *foyer* du plan. »

« *Quand plusieurs plans sont parallèles entre eux, leurs foyers sont sur une droite qui est toujours parallèle à un même axe, quelle que soit la direction commune des plans.*

» *Cette droite jouit de la propriété que les trajectoires de ses points sont toutes parallèles entre elles,* » *puisque,* « *dans le déplacement du corps, la droite n'a qu'un mouvement de translation parallèlement à elle-même.* »

La projection verticale de la tangente à l'hélice décrite par le point F est parallèle à la ligne de terre; d'ailleurs, en appliquant la formule

$$\tang\alpha = \frac{2\pi R}{h}$$

qui donne l'angle α d'une hélice avec les génératrices du cylindre de rayon R sur lequel elle est tracée, on trouve

$$\tang\alpha = \frac{2\pi . OF}{h},$$

et, en remplaçant OF par sa valeur,

$$\tang\alpha = \cot\theta.$$

Pour tout point du plan qui n'est pas sur OF, la projection verticale de la tangente n'est pas parallèle à la ligne de terre. Pour tout point de OF qui n'est pas F, la relation

$$\tang\alpha = \cot\theta$$

n'est pas satisfaite. Par conséquent :

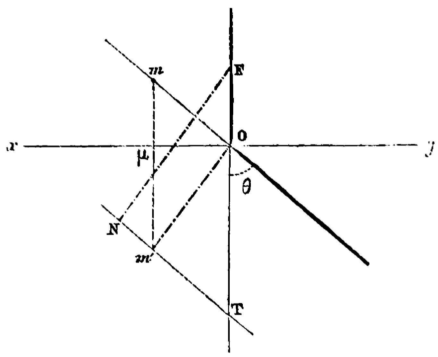
« *Ce qui distingue le foyer d'un plan de tous ses autres points, c'est que sa trajectoire est perpendiculaire au plan, ce qui n'a lieu pour aucun autre de ses points.* »

Cette propriété, jointe à celle qu'a le plan normal à la trajectoire d'un point d'un plan de passer par le foyer de ce plan, conduit à la proposition suivante :

« *Quand plusieurs plans passent par un même point, leurs foyers sont tous sur un même plan, qui a son foyer en ce point.* »

4. Cherchons maintenant si, parmi les points du plan, il n'y en aurait pas dont les trajectoires soient tangentes au plan lui-même. Les traces verticales des tangentes aux hélices décrites par ces points seront

Fig. 2.



sur la trace verticale du plan, de sorte que les triangles OTm', m'Oμ (*fig.* 2) seront semblables; on aura donc

$$\frac{Om'}{m'T} = \frac{m'\mu}{O\mu}.$$

Remplaçons $O\mu$ et $m'T$ par leurs valeurs

$$O\mu = m\mu \operatorname{tang}\theta, \quad m'T = \frac{2\pi . Om'}{h} m\mu,$$

il viendra

$$m'\mu = h\frac{\operatorname{tang}\theta}{2\pi},$$

quantité constante. Par conséquent :

« *Dans le plan, il existe une infinité de points dont les trajectoires seront comprises dans le plan même ; tous ces points sont situés en* *ligne droite*. J'appellerai cette droite la *caractéristique* du plan; je dirai plus loin la raison de cette dénomination. »

Un point de la caractéristique d'un plan étant connu, la caractéristique s'obtient en menant par ce point un plan perpendiculaire au plan donné et parallèle à l'axe du déplacement.

Il résulte de là qu'un plan, mené par la tangente à la trajectoire d'un point et par la plus courte distance de cette tangente à l'axe du déplacement, a cette tangente pour caractéristique. D'ailleurs, la caractéristique est tangente à la trajectoire du pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur elle, puisque cette perpendiculaire est normale à l'hélice décrite. On peut donc énoncer le théorème suivant :

« *La tangente à la trajectoire d'un point jouit de la propriété d'être la caractéristique d'un plan; et réciproquement, la caractéristique d'un plan est toujours tangente à la trajectoire d'un de ses points.* »

5. Considérons une droite fixe D et un plan variable P mené par cette droite. Le foyer du plan P sera dans le plan normal à la trajectoire d'un des points p de la droite, il sera également dans le plan normal à la trajectoire d'un autre point p', et par suite il décrira l'intersection Δ de ces deux plans.

Soient P et P' deux plans menés par D, ϖ et ϖ' leurs foyers ou points de rencontre avec Δ. P est normal à la trajectoire du point ϖ, P' à la trajectoire du point ϖ', et par suite le foyer d'un plan mobile autour de Δ décrit l'intersection D des plans P et P'. Donc :

« *Quand plusieurs plans passent par une même droite* D, *leurs foyers sont sur une deuxième droite* Δ; *réciproquement, si plusieurs plans passent par cette droite* Δ, *leurs foyers seront sur la première droite* D. *De sorte que ces deux droites jouissent de propriétés réciproques.*

» Cela signifie, en d'autres termes, que *si l'on considère une droite quelconque* D *comme faisant partie du corps, les plans normaux aux trajectoires des points de cette droite passeront tous par une même droite* Δ; *et réciproquement, les plans normaux aux trajectoires des points de cette droite* Δ, *considérée comme faisant partie du corps, passeront tous par la droite* D.

» Ces deux droites D, Δ, que j'appellerai *droites conjuguées*, donnent lieu à un grand nombre de propriétés du mouvement infiniment petit du corps, qui trouveront leur place plus loin. »

Quand la droite D est la caractéristique d'un plan, les plans normaux aux trajectoires de ses points sont normaux au plan, et, comme ils passent par son foyer F, on en conclut que :

« *La tangente à la trajectoire d'un point a pour conjuguée la caractéristique du plan dont ce point est le foyer; ou, en d'autres termes, si, par le foyer d'un plan, on mène la normale au plan, la droite conjuguée à cette normale sera la caractéristique du plan.* »

6. Soient P et P′ deux positions quelconques d'une figure plane, $a'b'$ l'intersection de leurs plans, ab l'homologue dans le plan P de $a'b'$ considérée comme appartenant à P′. Une rotation du plan P autour du point central des segments ab et $a'b'$, suivie d'une nouvelle rotation de ce plan autour de $a'b'$, amène les figures P et P′ à coïncider. Dans le premier mouvement, les points de ab ne sortent pas du plan P, et le point central est immobile; dans le second mouvement, les points de $a'b'$ sont immobiles, et le point central quitte normalement P. « Il suit de là que :

» *Le mouvement du plan se réduit à une rotation autour de la caractéristique, pendant que cette droite tourne dans la position primitive du plan, autour de son foyer considéré comme un point fixe.* »

En supposant les positions P et P′ infiniment voisines, « on peut donc dire, en général, que :

» *Tout déplacement infiniment petit d'une figure plane dans l'espace se réduit à une rotation du plan de la figure autour d'une droite de ce plan, pendant que cette droite tourne elle-même autour d'un point fixe sans sortir de la position primitive du plan.*

» Cette droite est donc l'intersection des deux positions infiniment voisines du plan. C'est pourquoi je l'ai appelée *la caractéristique du plan*, suivant l'expression employée par Monge dans la théorie des surfaces développables. »

Considérons deux droites conjuguées D, Δ. Les plans normaux aux trajectoires des points de Δ passant par D, « par une rotation du corps autour de la droite D, on placera la droite Δ dans la position même qu'elle doit occuper après le mouvement *infiniment petit* du corps. De sorte que, pour placer le corps dans la position même qu'il occupera après ce mouvement, il suffit de lui faire éprouver une seconde rotation autour de la droite Δ. Ainsi :

» *Les deux droites conjuguées* D *et* Δ *sont deux axes de rotations simultanées qu'on peut imprimer au corps pour effectuer son déplacement.*

» Je dirai plus loin quelle est la valeur de chaque rotation, et quelles sont les relations générales, soit entre les grandeurs des deux rotations, soit entre les directions de leurs axes D et Δ. »

PROPRIÉTÉS RELATIVES A DEUX DROITES CONJUGUÉES D, Δ.

7. Il peut arriver que le plan normal à la trajectoire d'un point p de la droite D passe par cette droite; ce plan, qui contient Δ, a pour foyer p. Le plan normal à la trajectoire d'un autre point p' de D passant par p', par p et par Δ, D et Δ coïncident; donc :

« *Si la droite* D *est normale à la trajectoire d'un de ses points, tous ses autres points auront leurs trajectoires normales à cette droite. De sorte que la droite* D *sera elle-même sa conjuguée* Δ », *et que tout plan passant par* D *aura son foyer sur cette droite.*

« Il suit de là que :

» *Quand une droite de longueur constante se meut dans l'espace, de manière à être toujours normale à la courbe décrite par l'une de ses extrémités, elle sera normale aussi à la courbe décrite par son autre extrémité. Et si, sur une surface engendrée par une ligne droite, on trace deux courbes qui coupent à angle droit toutes les génératrices, les segments compris sur ces droites entre les deux courbes seront tous égaux entre eux.* »

8. Considérons deux droites conjuguées quelconques D, Δ, et une droite L qui les rencontre. Le point où Δ perce le plan mené par L et par D est le foyer de ce plan, et il est situé sur L; donc :

« *Toute droite qui s'appuie sur ces deux droites jouit de la propriété d'être normale aux trajectoires de tous ses points.* »

Soient D, Δ, D′, Δ′ deux couples de droites conjuguées. Toute droite L qui s'appuie sur D, Δ et D′ est normale aux trajectoires de tous ses points. Menons le plan normal à la trajectoire du point commun à L et à D′, il passera par Δ′; d'ailleurs, il contiendra L. Donc :

« *Deux droites conjuguées* D, Δ *et deux autres droites conjuguées quelconques* D′, Δ′ *sont toujours quatre génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe, c'est-à-dire que toute droite qui s'appuiera sur trois de ces lignes rencontrera nécessairement la quatrième.* »

9. Menons par D un plan parallèle à Δ, par Δ un plan parallèle à D; les foyers de ces plans seront sur une parallèle à l'axe du déplacement, puisqu'ils sont parallèles entre eux. Or le foyer du plan mené par D est à la rencontre de ce plan avec Δ, et, comme Δ ne rencontre pas le plan, il en est de même d'une parallèle à l'axe du déplacement, et par suite de l'axe du déplacement lui-même. La plus courte distance des deux droites étant normale aux plans est donc normale à l'axe du déplacement, et l'on peut mener à cet axe par la plus courte distance un plan perpendiculaire. Ce plan a, d'une part, son foyer sur la plus courte distance, puisqu'elle est à elle-même sa conjuguée, et, d'autre part, sur l'axe du déplacement, puisqu'il lui est normal. Par conséquent :

« *La droite par laquelle se mesure la plus courte distance de deux droites conjuguées* D, Δ *rencontre l'axe de rotation et lui est perpendiculaire.* »

Les trois droites D, Δ et l'axe du déplacement étant parallèles à un même plan, une droite mobile qui s'appuie sur elles engendre un paraboloïde hyperbolique. Cette droite mobile est normale aux trajectoires de tous ses points, et, comme son point de rencontre avec l'axe a l'axe pour trajectoire, elle est normale à l'axe. Par conséquent :

« *Tout plan perpendiculaire à cet axe rencontre les deux droites* D, Δ *et l'axe lui-même, en trois points qui sont en ligne droite; ou, en d'au-*

tres termes, par deux droites conjuguées D, Δ, *et par l'axe de rotation, on peut faire passer un paraboloïde hyperbolique dont les génératrices seront perpendiculaires à cet axe.* »

10. Soit p le point de rencontre de deux droites D et D', Δ et Δ' leurs conjuguées. Le plan normal à la trajectoire du point p, qui a son foyer en ce point, passe par Δ et par Δ'; donc :

« *Quand deux droites* D, D' *se rencontrent, leurs conjuguées* Δ, Δ' *se rencontrent aussi.* »

Il en résulte immédiatement que :

Si une droite variable D *engendre une surface réglée du second ordre, il en est de même de sa conjuguée* Δ.

On prouverait de la même manière que :

« *Quand plusieurs droites* D, D',... *passent par un même point, leurs conjuguées* Δ, Δ',... *sont dans un même plan qui est normal à la trajectoire de ce point; réciproquement, quand plusieurs droites sont dans un même plan, leurs conjuguées passent toutes par un même point qui est le foyer de ce plan.* »

Si les droites D, D',... sont parallèles entre elles, on pourra mener par ces droites une série quelconque de plans parallèles entre eux, dont les foyers appartiendront respectivement à leurs conjuguées Δ, Δ',.... Or ces foyers sont situés sur une parallèle à l'axe du déplacement; donc :

« *Quand plusieurs droites sont parallèles entre elles, leurs conjuguées sont dans un plan parallèle à l'axe de rotation.* »

11. « *Quand une droite est située dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, sa conjuguée passe par le point où le plan rencontre cet axe.* » Ce point est, en effet, le foyer du plan.

« *Réciproquement, si une droite rencontre l'axe de rotation en un point, sa conjuguée est située dans le plan mené par ce point perpendiculairement à cet axe.* » Ce plan est, en effet, normal à la trajectoire du point.

12. Soit A un point d'une droite D dont la trajectoire est dirigée suivant cette droite, le plan mené par A normalement à D contiendra sa conjuguée Δ. Le plan mené par D normalement à Δ aura son foyer sur Δ; donc :

« *Quand une droite est tangente à la trajectoire d'un de ses points, sa conjuguée est aussi tangente à la trajectoire d'un de ses points. Ces deux droites sont à angle droit, et la droite qui mesure leur plus courte distance est celle qui joint les deux points aux trajectoires desquels elles sont tangentes.* »

En rapprochant la démonstration qui précède de la propriété qu'a la tangente à la trajectoire d'un de ses points d'avoir pour conjuguée la caractéristique du plan dont ce point est le foyer, on obtient cet autre énoncé :

« *Quand une droite est la caractéristique d'un plan, sa conjuguée est aussi la caractéristique d'un autre plan : ces deux plans sont à angle droit; le foyer du premier est sur la deuxième droite, et le foyer du second est sur la première droite. La droite qui joint ces deux foyers est celle qui mesure la plus courte distance des deux droites.* »

13. Par une droite D et par sa conjuguée Δ menons à un plan donné P deux plans perpendiculaires. L'intersection de ces plans est normale aux trajectoires de ses points, puisqu'elle s'appuie sur deux droites conjuguées; or elle est normale au plan P au point de concours des projections de D et de Δ; donc :

« *Deux droites conjuguées quelconques étant projetées orthogonalement sur un plan quelconque, leurs projections se coupent en un point situé sur la caractéristique de ce plan.* »

Si d et δ sont les points où D et Δ percent le plan P, ce plan a son foyer sur la droite $d\delta$ normale aux trajectoires de ses points, c'est-à-dire que :

« *Deux droites conjuguées rencontrent un plan quelconque en deux points qui sont toujours en ligne droite avec le foyer du plan.* »

PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX TRAJECTOIRES DES POINTS ET AUX CARACTÉRISTIQUES DES PLANS D'UN CORPS EN MOUVEMENT.

14. Soient D et Δ deux droites conjuguées, D' la tangente à la trajectoire d'un point d de D et Δ' sa conjuguée. La plus courte distance de D' et de Δ' s'appuie en d sur D et sur l'axe du déplacement auquel elle est normale; elle rencontre donc en δ la conjuguée Δ de D et engendre, quand d varie, un paraboloïde hyperbolique. Le plan tangent en δ à ce paraboloïde ayant son foyer en d, une parallèle à D' menée par δ engendre le paraboloïde des normales le long de Δ; il en résulte que D' engendre aussi un paraboloïde ayant avec le paraboloïde des normales une génératrice commune à l'infini et mêmes plans tangents le long de cette génératrice. Le plan de D' et de $d\delta$, qui a pour caractéristique D' et pour foyer le point de rencontre F de Δ' et de $d\delta$, est tangent à ces deux paraboloïdes et enveloppe, par conséquent, une surface développable du quatrième ordre [*]. D' engendrant un paraboloïde qui admet D pour génératrice, Δ' engendre un hyperboloïde qui contient Δ conjuguée de D, et F décrit l'intersection de cet hyperboloïde avec le paraboloïde de $d\delta$, c'est-à-dire une cubique gauche, puisque les deux surfaces ont en commun la génératrice Δ. D'où les théorèmes suivants :

« *Les tangentes aux trajectoires des différents points d'une droite forment un paraboloïde hyperbolique.*

» *Chacune de ces tangentes est la caractéristique d'un plan; tous ces plans enveloppent une surface développable du quatrième degré, et ils ont leurs foyers sur une courbe à double courbure du troisième ordre.* »

Si l'on observe que le plan de Δ et de $d\delta$ a pour foyer d et pour caractéristique la conjuguée de D' normale au plan en son foyer, c'est-à-dire Δ', que Δ' est tangente à la trajectoire du point F, et que ce point est le foyer du plan de D' et de $d\delta$, on pourra mettre les résultats précédents sous cette forme nouvelle :

---

[*] *Mémoire sur les surfaces du deuxième degré engendrées par une ligne droite*, par M. Chasles; n° 69.

« *Quand plusieurs plans passent par une même droite, leurs caractéristiques forment un hyperboloïde à une nappe.*

» *Chacune de ces droites est tangente à la trajectoire d'un de ses points; tous ces points sont situés sur une courbe à double courbure du troisième ordre, et les plans normaux à leurs trajectoires enveloppent une surface développable du quatrième degré.* »

Un quelconque de ces plans, ayant en commun avec la surface une génératrice de contact, c'est-à-dire une conique infiniment aplatie, coupe la surface suivant une autre conique. Un plan quelconque mené par un point de la courbe à double courbure, n'ayant avec cette courbe que deux autres points communs, ne coupe le cône qui a la courbe pour base et le premier point pour sommet que suivant deux génératrices. Par conséquent :

« *Tout plan tangent à la surface développable la coupe suivant une conique; et tout cône qui passe par la courbe à double courbure, et qui a son sommet en un de ses points, est du second degré.* »

15. Si la droite D est elle-même tangente à la trajectoire d'un de ses points, elle est la caractéristique d'un plan, et les tangentes aux trajectoires de ses autres points sont comprises dans ce plan. Soit f un point quelconque de D et φ le foyer du plan; la tangente à la trajectoire du point f est normale à φf, de sorte que le lieu des projections de φ sur les diverses tangentes est une droite, ce qui caractérise une parabole. Par conséquent :

« *Quand une droite est tangente à la trajectoire d'un de ses points, les tangentes aux trajectoires de ses autres points sont toutes comprises dans un même plan, et enveloppent une parabole qui a pour foyer le point que nous avons appelé le foyer du plan.* »

Les droites telles que D′ étant dans un même plan, leurs conjuguées Δ' passent par le foyer φ du plan et engendrent un cône au lieu d'un hyperboloïde. Par conséquent :

« *Quand une droite est tangente à la trajectoire d'un de ses points, les plans menés par cette droite ont leurs caractéristiques sur un cône du second degré.* »

La tangente à la trajectoire de tout point qui se dirige vers le sommet φ de ce cône est la caractéristique d'un plan. Tous ces plans contenant la tangente à la trajectoire de φ passent par une même droite, et leurs caractéristiques sont sur un cône qui ne diffère pas du précédent. Les points F, aux trajectoires desquels les génératrices du cône sont tangentes et qui sont distribués sur une courbe du troisième ordre, jouissent donc exclusivement de la propriété de se diriger au même instant vers le point φ de l'espace. Par conséquent :

« *Les points dont les trajectoires se dirigent vers un même point fixe de l'espace sont tous sur une courbe à double courbure du troisième ordre, les tangentes aux trajectoires de ces points forment un cône du second degré et les plans normaux à ces trajectoires enveloppent une développable du quatrième degré.* »

16. Soit F un point de la courbe à double courbure, φ le sommet du cône et P le plan tangent à la développable normal en F à $F\varphi$; ce plan coupe la développable suivant une conique. Menons, en un des points f de la conique, un plan tangent à la développable, il coupera le plan P suivant une droite D tangente en f à la conique, passera par un point F′ de la cubique et sera normal en ce point à la génératrice $F'\varphi$. Le plan $FF'\varphi$ coupe normalement D en un point i dont la trajectoire, à angle droit sur Fi et sur $F'i$, est précisément dirigée suivant D. Le point i appartient donc à la caractéristique du plan, et l'on en conclut, conformément au nº **15**, que :

« *Chacun des plans coupe la développable suivant une parabole qui a son foyer sur la courbe à double courbure.* »

Les caractéristiques des plans P, P′,... étant les conjuguées des génératrices $F\varphi$, $F'\varphi$,... qui passent par le point fixe φ, il en résulte que :

« *Les caractéristiques de ces plans sont toutes comprises dans un même plan, qui est celui qui a pour foyer le point fixe.* »

La droite FF′ qui joint les foyers des plans P et P′ menés par D est la conjuguée de cette droite; elle est d'ailleurs la caractéristique du plan $FF'\varphi$, puisqu'elle a les trajectoires de deux de ses points dirigées dans ce plan. Par conséquent :

« *Toute droite qui s'appuie en deux points sur la courbe à double* *courbure est tangente à la trajectoire d'un de ses points, et la droite d'intersection de deux plans tangents à la développable est aussi tangente à la trajectoire d'un de ses points.* »

Si l'on observe que les tangentes aux trajectoires des points de la caractéristique d'un plan sont les seules droites de ce plan pouvant jouer le rôle de caractéristiques, qu'une droite tangente à la trajectoire d'un de ses points n'est la caractéristique que d'un seul plan et n'a qu'une conjuguée normale au plan en son foyer, on pourra énoncer la réciproque suivante :

« *Les plans qui ont leurs caractéristiques situées dans un même plan fixe enveloppent une développable du quatrième degré, leurs foyers sont situés sur une courbe à double courbure du troisième ordre et les normales à ces plans, menées par leurs foyers, forment un cône du second degré. Les plans dont ces normales sont les caractéristiques passent tous par une même droite, qui est tangente à la trajectoire du foyer du plan fixe.* »

17. Le plan $FF'\varphi$, pivotant autour du point φ, coupe la courbe du troisième ordre en deux points F et F' qui déterminent sa caractéristique FF', et le point à la trajectoire duquel cette caractéristique est tangente décrit une surface dont le degré égale le nombre de ses points de rencontre avec la droite FF'. Tous les points de cette droite ayant leurs trajectoires dirigées dans le plan $FF'\varphi$, et les droites φF, FF', $F'\varphi$ étant, dans ce plan, les seules qui s'appuient en deux points sur la cubique, la droite FF' ne coupe la surface qu'en trois points. Par conséquent :

« *Quand des plans passent par un même point, leurs caractéristiques s'appuient toutes sur une même courbe à double courbure du troisième ordre et les points où ces droites sont tangentes à leurs trajectoires sont situés sur une surface du troisième degré.* »

18. Menons les tangentes aux trajectoires de tous les points d'un plan P, les plans qui auront ces tangentes pour caractéristiques seront tangents à une surface. Mais les points aux trajectoires desquels les caractéristiques des plans menés par une même droite L sont tangentes appartiennent, comme on l'a vu au n° **14**, à une cubique gauche; le plan P n'étant coupé qu'en trois points par cette cubique, la surface n'admet que trois plans tangents issus de L. Par conséquent :

« *Si l'on mène les tangentes aux trajectoires de tous les points d'un plan, ces droites seront les caractéristiques d'autant de plans, et tous ces plans envelopperont une surface courbe jouissant de la propriété que par une même droite quelconque on ne peut lui mener que trois plans tangents.* »

SUR LE MOUVEMENT D'UNE SURFACE COURBE.

19. A chaque point f d'une surface courbe mobile S correspond un plan normal à la trajectoire de f, qui touche en φ une deuxième surface Σ. Prenons sur S trois points infiniment voisins de f, le point de rencontre des plans normaux aux trajectoires de ces trois points sera le foyer du plan tangent à S en f et appartiendra à Σ. Il sera d'ailleurs le point de contact du plan normal à la trajectoire de f avec Σ, c'est-à-dire qu'il ne différera pas de φ. Le foyer du plan tangent à S en f étant en φ sur Σ, ce plan est normal à la trajectoire du point φ entraîné dans le mouvement de S, « de sorte que les deux surfaces jouissent de propriétés réciproques l'une par rapport à l'autre. » Ainsi :

« *Quand une surface courbe éprouve un mouvement infiniment petit, les plans normaux aux trajectoires de ses points enveloppent une deuxième surface courbe qui jouit de cette propriété, que, si elle était primitivement tracée et qu'elle participât au mouvement de la première surface, les plans normaux aux trajectoires de ses points envelopperaient cette première surface.* »

« On peut encore dire que *la deuxième surface est le lieu des foyers des plans tangents à la première,* et que *celle-ci est le lieu des foyers des plans tangents à la deuxième.* »

Si la surface S est géométrique et du $m^{ième}$ degré, une droite quelconque la rencontrera en m points réels ou imaginaires, et à chacun de ces points correspondra un plan tangent à la surface Σ qui passera par la conjuguée de la droite. La surface Σ est donc telle qu'on peut lui mener par une droite quelconque m plans tangents réels ou imaginaires, c'est-à-dire qu'elle est géométrique et de la $m^{ième}$ classe. D'où les théorèmes suivants :

« *Si la première surface est géométrique, la deuxième le sera aussi, mais, en général, d'un degré différent.*

» *Le nombre des plans tangents, réels ou imaginaires, qu'on pourra mener à chaque surface par une même ligne droite, sera égal au nombre de points, réels ou imaginaires, dans lesquels l'autre surface sera rencontrée par une même ligne droite.*

» Il suit de là que, si la première surface est du second degré, la deuxième sera aussi du second degré. Ainsi :

» *Quand une surface du second degré éprouve un mouvement infiniment petit, les plans normaux aux trajectoires de ses points enveloppent une deuxième surface du second degré; et si celle-ci était tracée primitivement et participait au mouvement de la première, les plans normaux aux trajectoires de ses points envelopperaient cette première surface.* »

Si la surface se réduit à une conique, les plans normaux aux trajectoires de ses points passent par le foyer du plan qui les contient. Donc :

« *Quand une section conique éprouve un mouvement infiniment petit dans l'espace, les plans normaux aux trajectoires de ses points enveloppent un cône du second degré qui a son sommet en un point du plan de cette courbe.* »

Si la surface se réduit à un cône, les plans normaux aux trajectoires des points d'une même génératrice passent par sa conjuguée. Or les conjuguées des diverses génératrices sont toutes dans le plan normal à la trajectoire du sommet du cône. Donc :

« Réciproquement, *quand un cône du second degré éprouve un déplacement infiniment petit, les plans normaux aux trajectoires de ses points sont tous tangents à une conique dont le plan passe par le sommet du cône.* »

RELATIONS MÉTRIQUES RELATIVES AU MOUVEMENT INFINIMENT PETIT D'UN CORPS.

20. Soient F et Φ les pieds de la plus courte distance de deux droites conjuguées D, Δ, et O le point où cette plus courte distance rencontre à angle droit l'axe du déplacement X. F étant le foyer du plan déterminé par Δ et par O, et OF étant dans ce plan la normale à Δ issue du pied de l'axe X, l'angle (Δ, X) est celui qu'on a désigné par θ dans la *fig.* 1. De telle sorte que la relation établie au n° **3** devient, en y remplaçant OF par r,

$$r = h\,\frac{\cot(\Delta, X)}{2\pi},$$

ou

$$r \tang(\Delta, X) = \frac{h}{2\pi}.$$

En substituant au rapport $\frac{h}{2\pi}$ celui d'une ordonnée quelconque e décrite dans le mouvement héliçoidal à l'abscisse curviligne v correspondante, on a cette proposition :

« *Soient* v *la rotation du corps autour de l'axe* X, *et* e *la translation de cet axe dans sa propre direction, c'est-à-dire l'espace décrit par chacun de ses points. Soient* r *la plus courte distance d'une droite* D *à l'axe* X, *et* ρ *la plus courte distance de la droite conjuguée* Δ *au même axe; ces deux lignes* r *et* ρ *se mesurent sur une même droite, comme il a été dit précédemment. Désignons par* (D, X) *et* (Δ, X) *les angles que les deux droites conjuguées font avec l'axe* X; *on aura, entre ces angles et les distances des deux droites à cet axe, les relations*

$$r \tang(\Delta, X) = \rho \tang(D, X) = \frac{e}{v}.$$

» Les deux droites D, Δ sont deux axes conjugués de rotation, c'est-à-dire deux axes autour desquels on peut donner au corps deux rotations simultanées pour opérer son déplacement. Nous pouvons donc dire qu'*un premier axe de rotation étant pris à volonté, l'incli-*

naison du deuxième axe sur l'axe central X *ne dépendra que de la distance du premier axe à cet axe central.* »

Si la droite D est tangente à la trajectoire d'un de ses points, sa conjuguée Δ sera à angle droit sur elle, et comme D, Δ et X sont parallèles à un même plan, les angles (D, X) et (Δ, X) seront complémentaires. Par conséquent :

« *Si la droite* D *est dirigée suivant la trajectoire d'un de ses points, la droite* Δ *sera dans le plan normal à cette trajectoire, et l'on aura*

$$\operatorname{tang} D \operatorname{tang} \Delta = 1;$$

d'où, » en remplaçant tang D et tang Δ par leurs valeurs $\frac{e}{\nu\rho}$ et $\frac{e}{\nu r}$,

$$« \ r\rho = \frac{e^2}{\nu^2} = \textit{constante.} »$$

21. Soient F et Φ les pieds de la plus courte distance de deux droites conjuguées D, Δ. Si l'on amène Δ et par suite Φ dans leurs nouvelles positions au moyen d'une rotation Ω autour de D, FΦ se déplacera normalement à D et Φ décrira un arc de cercle infiniment petit ΦΦ' ayant pour valeur

$$(r+\rho)\,\Omega.$$

Si l'on donne à Φ un mouvement héliçoïdal, l'arc d'hélice infiniment petit ΦΦ' sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés e et $\nu\rho$, et aura pour valeur

$$\sqrt{e^2+\nu^2\rho^2}.$$

On déduit de là

$$(1) \qquad (r+\rho)^2\,\Omega^2 = e^2+\nu^2\rho^2,$$

et, par un raisonnement identique appliqué à Δ,

$$(2) \qquad (r+\rho)^2\,\omega^2 = e^2+\nu^2 r^2,$$

en désignant par ω la rotation autour de cette droite.

Des relations

$$r \operatorname{tang}(\Delta, X) = \rho \operatorname{tang}(D, X) = \frac{e}{v}$$

on déduit

$$e^2 + v^2 r^2 = \frac{e^2}{\sin^2(\Delta, X)}, \quad e^2 + v^2 \rho^2 = \frac{e^2}{\sin^2(D, X)},$$

$$(r + \rho^2) = \frac{[vr \sin(D, X) + e \cos(D, X)]^2}{v^2 \sin^2(D, X)},$$

et, en remplaçant dans les équations (1) et (2),

$$« \frac{\Omega}{\omega} = \frac{\sin(\Delta, X)}{\sin(D, X)}, »$$

$$« \Omega^2 = \frac{e^2 v^2}{[vr \sin(D, X) + e \cos(D, X)]^2}, \quad \omega^2 = \frac{v^2 (e^2 + v^2 r^2) \sin^2(D, X)}{[vr \sin(D, X) + e \cos(D, X)]^2}; »$$

de sorte que les valeurs de Ω et de ω sont exprimées « en fonction de la position de la première droite. »

Les équations (1) et (2) donnent encore, en y remplaçant les seconds membres par leurs valeurs écrites plus haut,

$$(r + \rho)\Omega = \frac{e}{\sin(D, X)}, \quad (r + \rho)\omega = \frac{e}{\sin(\Delta, X)},$$

d'où l'on tire

$$(r + \rho)^2 \Omega\omega = \frac{e^2}{\sin(D, X)\sin(\Delta, X)},$$

et comme

$$\cos(D, \Delta) = \cos(D, X)\cos(\Delta, X) - \sin(D, X)\sin(\Delta, X),$$

il en résulte

$$2(r + \rho)^2 \Omega\omega \cos(D, \Delta) = \frac{2e^2}{\operatorname{tang}(D, X)\operatorname{tang}(\Delta, X)} - 2e^2.$$

Remplaçons $\operatorname{tang}(D, X)$ et $\operatorname{tang}(\Delta, X)$ par leurs valeurs, cette équation deviendra

$$2(r + \rho)^2 \Omega\omega \cos(D, \Delta) = 2v^2 r\rho - 2e^2,$$

et, en l'ajoutant membre à membre avec les équations (1) et (2),

$$(r+\rho)^2\left[\Omega^2+\omega^2+2\Omega\omega\cos(\mathrm{D},\Delta)\right]=v^2(r+\rho)^2,$$

ou, en divisant par $(r+\rho)^2$,

$$\text{«}\ \ \Omega^2+\omega^2+2\Omega\omega\cos(\mathrm{D},\Delta)=v^2.\ \ \text{»}$$

Revenons enfin à la relation

$$(r+\rho)^2\Omega\omega=\frac{e^2}{\sin(\mathrm{D},\mathrm{X})\sin(\Delta,\mathrm{X})},$$

et multiplions-la membre à membre avec celle-ci

$$\sin(\mathrm{D},\Delta)=\sin(\mathrm{D},\mathrm{X})\cos(\Delta,\mathrm{X})+\cos(\mathrm{D},\mathrm{X})\sin(\Delta,\mathrm{X}),$$

nous aurons

$$(r+\rho)^2\Omega\omega\sin(\mathrm{D},\Delta)=e^2\left[\frac{1}{\operatorname{tang}(\Delta,\mathrm{X})}+\frac{1}{\operatorname{tang}(\mathrm{D},\mathrm{X})}\right].$$

Remplaçons tang(Δ, X) et tang(D, X) par leurs valeurs, cette équation deviendra

$$(r+\rho)^2\Omega\omega\sin(\mathrm{D},\Delta)=e^2\left(\frac{v\rho}{e}+\frac{vr}{e}\right)=ev(r+\rho),$$

ou, en divisant par $r+\rho$,

$$\text{«}\ \ (r+\rho)\Omega\omega\sin(\mathrm{D},\Delta)=ev.\ \ \text{»}$$

« La première équation

$$\frac{\Omega}{\omega}=\frac{\sin(\Delta,\mathrm{X})}{\sin(\mathrm{D},\mathrm{X})}$$

prouve que, *si par un point on mène deux droites parallèles aux deux axes conjugués* D, Δ, *et proportionnelles aux rotations du corps autour de ces deux axes, la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux droites sera parallèle à l'axe central de rotation* X », puisque D, Δ et X sont parallèles à un même plan.

« La deuxième équation

$$\Omega^2 + \omega^2 + 2\Omega\omega\cos(D, \Delta) = v^2$$

prouve que *cette diagonale sera proportionnelle à la rotation du corps autour de cet axe* X.

» Enfin la troisième équation

$$(r+\rho)\Omega\omega\sin(D, \Delta) = ev$$

prouve que, *si sur les deux droites* D, Δ *on porte deux segments proportionnels aux rotations du corps autour de ces droites, le tétraèdre construit sur ces deux segments pris pour arêtes opposées aura un volume constant.* »

Soient en effet AB et CD deux arêtes opposées d'un tétraèdre ABCD. La longueur CD se déplaçant sur la droite CD, la base BCD et la hauteur du tétraèdre restent invariables; d'où il résulte que son volume dépend des longueurs portées sur les arêtes opposées, et est indépendant de la région qu'elles y occupent. Prenons alors pour BC la plus courte distance de ces arêtes; AB et CD étant respectivement égaux à ω et à Ω, nous aurons

$$\text{surf. BCD} = \tfrac{1}{2}(r+\rho)\omega.$$

L'angle ABC étant droit, le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet A du tétraèdre sur le plan de la base sera sur une parallèle à CD menée par B, et cette perpendiculaire aura pour valeur

$$\Omega\sin(D, \Delta),$$

ce qui conduit bien, pour le volume du tétraèdre, à l'expression écrite plus haut.

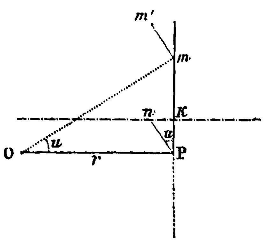
22. La trajectoire d'un point du corps est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont l'un parallèle et l'autre perpendiculaire à l'axe X du déplacement. La projection, sur une droite D, de la trajectoire d'un de ses points peut donc s'obtenir en faisant la somme algébrique des projections de ces côtés. Le premier e, commun en grandeur et en direction à tous les points de la droite, a pour projection

$$e \cos(\mathrm{D}, \mathrm{X}).$$

Le second, variable avec la position du point, a aussi sur la droite une projection constante.

Prenons en effet pour plan horizontal de projection le plan normal à X mené par la plus courte distance de cette droite à D. L'axe X (*fig.* 3) se projettera en O, la droite D suivant Pm, l'un quelconque M de ses points en m, et la plus courte distance r de X à D sera la perpendiculaire OP abaissée de O sur Pm. L'arc de cercle décrit par le

Fig. 3.



point M, dans la rotation du corps autour de X, se projettera horizontalement en vraie grandeur suivant une perpendiculaire mm' à Om, et aura pour valeur $v.\mathrm{O}m$. Toutes les droites telles que Pn, menées par le point P, égales et parallèles aux déplacements mm', auront leurs extrémités n sur une perpendiculaire nk à Pm; car des égalités

$$\mathrm{P}n = v.\mathrm{O}m = v\frac{r}{\cos u},$$

on déduit

$$\mathrm{P}k = \mathrm{P}n.\cos u = vr = \text{const}.$$

On projettera donc à la fois sur D toutes les droites telles que Pn en menant par nk un plan perpendiculaire à D. Par conséquent :

« *Si l'on projette sur une droite* D *les trajectoires de ses différents points, les projections seront égales entre elles.* »

Pour avoir leur valeur commune p, nous projetterons sur D la trajectoire du point P, ce qui donnera

$$p = e\cos(\mathrm{D}, \mathrm{X}) + rv\sin(\mathrm{D}, \mathrm{X}),$$

et, en remplaçant le second membre par sa valeur en Ω trouvée plus haut,

$$p = \frac{ev}{\Omega};$$

d'où

$$\text{« } \Omega . p = ve. \text{ »}$$

Ainsi, « *la longueur commune de ces projections est en raison inverse de la rotation du corps autour de cette droite.* »

« La projection p exprime la quantité dont chaque point de la droite D s'est déplacé dans le sens de la direction de cette droite; de sorte qu'on peut dire que c'est le mouvement de la droite estimé dans sa propre direction. L'équation exprime donc que *la rotation du corps autour d'une droite quelconque est en raison inverse du mouvement de cette droite estimé dans sa propre direction.*

» Cela établit une relation assez remarquable entre la rotation et la translation, ces deux mouvements dont se compose tout déplacement d'un corps. »

Si p est la projection de la trajectoire MM′ d'un point M sur une droite passant par ce point et si N est le point de rencontre de cette droite avec le plan perpendiculaire à MM′ en M′, on aura, dans le triangle rectangle MM′N,

$$\overline{\mathrm{MM}'}^2 = p.\mathrm{MN},$$

ou, en remplaçant p par sa valeur,

$$\overline{\mathrm{MM}'}^2 = \frac{ev}{\Omega}\mathrm{MN},$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{MN} = \frac{\overline{\mathrm{MM}'}^2}{ev}\Omega.$$

Le premier facteur, dans le second membre, étant indépendant de la droite issue du point M, on en conclut que :

« *Si, sur différentes droites passant par un même point, on porte, à partir de ce point, des segments proportionnels aux rotations du corps autour de ces droites, les extrémités de ces segments seront sur un plan perpendiculaire à la trajectoire du point.*

» Il en résulte que *la rotation minimum aura lieu autour de la trajectoire même du point.* » En remplaçant alors, dans la formule précédente, MN par MM′, elle devient

$$\Omega \, . \, \mathrm{MM}' = ev,$$

et exprime que « *cette rotation, multipliée par la trajectoire du point, forme un produit constant, quel que soit le point.*

» Supposons, par exemple, qu'un point ait une étendue infiniment petite, que ce soit un petit globule ; il aura une rotation autour de sa trajectoire, en même temps qu'il décrira cet élément rectiligne ; il aura donc deux mouvements, l'un de rotation et l'autre de translation ; *le produit de ces deux mouvements est constant pour tous les points du corps.* »

Soient D, D′,... des droites d'un plan, Δ, Δ′,... leurs conjuguées qui passent par le foyer F de ce plan. Une rotation du corps autour de D amènera Δ et par suite F dans sa nouvelle position F′, et de même pour les autres droites. Or le foyer, dans tous ces mouvements, décrit la même trajectoire FF′ ; donc, en appelant δ, δ',... les distances du foyer aux droites D, D′,... et Ω, Ω′,... les rotations autour de ces droites,

$$\Omega\,\delta = \Omega'\delta' = \ldots,$$

ce qui peut s'énoncer ainsi :

« *Quand plusieurs droites sont situées dans un même plan, les rotations du corps autour de ces droites sont en raison inverse de leurs distances au foyer du plan.* »

23. « Soit un plan P faisant partie du corps en mouvement ; il y a à considérer, relativement à ce plan, son foyer, sa caractéristique, sa rotation autour de cette droite, et sa rotation sur lui-même autour de son foyer. Soit Π la distance du foyer à l'axe X, ϖ la distance de la caractéristique à cet axe, P l'angle que le plan fait avec un plan perpendiculaire à l'axe X »; il est facile de voir, en se reportant au n° **3**, que ces quantités ne sont autres que OF, $m'\mu$ et le complément de θ. On aura donc, en remplaçant $\frac{h}{2\pi}$ par $\frac{e}{\nu}$,

$$« \ \Pi = \frac{e}{\nu}\operatorname{tang}P, \quad \varpi = \frac{e}{\nu}\frac{1}{\operatorname{tang}P} \ »,$$

d'où

$$« \ \Pi\varpi = \frac{e^2}{\nu^2} = \text{const.},$$

et

$$\frac{\Pi}{\varpi} = \operatorname{tang}^2 P. \ »$$

Si deux plans font avec un plan perpendiculaire à X des angles complémentaires, auquel cas

$$\operatorname{tang}P \,.\, \operatorname{tang}P' = 1,$$

on a

$$\Pi\Pi' = \varpi\varpi' = \frac{e^2}{\nu^2} = \text{const.},$$

d'où l'on conclut que :

« *Si deux plans font avec l'axe de rotation des angles complémentaires, les distances de leurs foyers à l'axe de rotation ont leur produit constant, et les distances de leurs caractéristiques au même axe ont aussi leur produit constant.*

» Soient Ω la rotation du plan P sur lui-même autour de son foyer, et ω sa rotation autour de sa caractéristique. » La conjuguée de la caractéristique d'un plan étant normale au plan en son foyer, reprenons les formules

$$(r+\rho)\Omega = \frac{e}{\sin(D,X)}, \quad (r+\rho)\omega = \frac{e}{\sin(\Delta,X)},$$

et remplaçons-y $r+\rho$ par $\Pi+\varpi$, $\sin(D,X)$ par $\sin P$ et $\sin(\Delta,X)$

par $\cos P$. Nous aurons, en observant que

$$\Pi = \varpi = \frac{e}{v}\,\frac{1}{\sin P \cos P},$$

les deux relations

$$\text{« } \Omega = v \cos P, \quad \omega = v \sin P;$$

d'où

$$\Omega^2 + \omega^2 = v^2 = \text{const.}$$

Ainsi, *la somme des carrés des deux rotations d'un plan est constante.* »

Si deux plans font avec un plan perpendiculaire à X des angles complémentaires, auquel cas

$$\cos^2 P + \cos^2 P' = \sin^2 P + \sin^2 P' = 1,$$

on a

$$\Omega^2 + \Omega'^2 = \omega^2 + \omega'^2 = v^2 = \text{const.};$$

d'où l'on conclut que :

« *Si deux plans font avec l'axe de rotation des angles complémentaires, la somme des carrés de leurs rotations sur eux-mêmes est constante, et la somme des carrés de leurs rotations autour de leurs caractéristiques est aussi constante.* »

Par le point de rencontre de la caractéristique d'un plan avec une droite D du plan, menons une parallèle à X et appelons (ω, D) l'angle de la caractéristique et de D. Le plan de X et de la caractéristique est normal au plan donné (4), et l'angle de X et de cette caractéristique, précédemment désigné par θ, n'est autre que le complément de P. On a donc, en appliquant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique,

$$\cos(D, X) = \cos(\omega, D) \sin P,$$

et, en multipliant membre à membre cette égalité avec la suivante

$$v \sin P = \omega,$$

on en conclut ce théorème :

« *Que dans le plan* P *on mène une droite quelconque* D, *on aura*

$$\omega \cos(\omega, D) = \nu \cos(D, X),$$

ω *étant la rotation autour de la caractéristique, et* (ω, D) *l'angle que cette caractéristique fait avec la droite* D; *de sorte que, pour chaque plan mené par une même droite* D, *on a*

$$\omega \cos(\omega, D) = \text{const.} \text{ »}$$

CONSTRUCTION DE L'AXE DE ROTATION X QUAND ON CONNAÎT LES DIRECTIONS DES TRAJECTOIRES DE TROIS POINTS DU CORPS.

« Soient a, b, c les trois points du corps. Les plans menés par les points a, b, perpendiculairement aux trajectoires de ces points, se couperont suivant une droite qui sera la conjuguée de la droite ab. On cherchera la droite qui mesure la plus courte distance de ces deux droites; elle s'appuiera sur l'axe cherché X, et elle lui sera perpendiculaire. On déterminera de même, avec les deux points a, c ou b, c, une autre droite jouissant des mêmes propriétés; l'axe X sera donc déterminé. »

PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

« Deux systèmes de deux droites conjuguées D, Δ et D', Δ' forment quatre génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe. Réciproquement, quatre génératrices d'un hyperboloïde peuvent être prises deux à deux et être regardées comme formant deux systèmes de deux droites conjuguées relativement au mouvement infiniment petit d'un corps solide. Il résulte de là que les propriétés des systèmes de deux droites conjuguées donnent lieu à des propriétés nouvelles de l'hyperboloïde à une nappe, propriétés dont la démonstration directe ne serait peut-être pas sans quelque difficulté.

» Soit donc un hyperboloïde à une nappe, et ne considérons que les génératrices d'un même mode de génération. Que, dans un plan transversal mené arbitrairement, on mène par un point des sécantes dont chacune rencontrera deux génératices; ces génératrices, ainsi conjuguées deux à deux, jouiront de toutes les propriétés de deux axes conjugués de rotation d'un corps. Par exemple, tout autre plan transversal rencontrera deux génératrices conjuguées en deux points qui seront en ligne droite avec un certain point de ce plan. La droite qui mesurera la plus courte distance de deux génératrices conjuguées passera par un même axe, auquel elle sera perpendiculaire; et les tangentes des angles que les deux génératrices feront avec cet axe seront entre elles comme les distances de ces deux droites à cet axe, etc. »

ANALOGIES ENTRE LES ROTATIONS D'UN CORPS AUTOUR DE DIVERS AXES ET LES SYSTÈMES DE FORCES.

24. Soit ω l'angle dont un point M tourne autour d'un axe Z dont il est distant de r; il décrit un élément rectiligne perpendiculaire au plan MZ et ayant pour valeur ωr. Si le déplacement du point M résulte de plusieurs rotations simultanées autour de différents axes, c'est en composant tous les éléments rectilignes issus de M qu'on aura l'élément rectiligne définitivement parcouru. Portons sur l'axe Z une longueur $k\omega$, k désignant une constante, et supposons le corps sollicité par la force $k\omega$; le moment de cette force, par rapport au point M, sera $k\omega r$. Élevons en M une perpendiculaire au plan MZ et portons sur cette perpendiculaire, dans le sens du déplacement du point M et à partir de ce point, une longueur égale à $k\omega r$. En composant tous les moments ainsi obtenus pour les différents axes, nous aurons le moment principal des forces relatif au point M, et il est clair que ce moment sera au déplacement total du point M comme k est à 1. Ainsi :

« *Quand un corps éprouve un déplacement infiniment petit, résultant de plusieurs rotations simultanées autour de plusieurs axes, si l'on porte sur ces axes des lignes proportionnelles à ces rotations respectivement, et qu'on considère ces lignes comme autant de forces qui solliciteraient le corps, l'élément rectiligne décrit par chaque point du corps, en vertu de ce système de rotations simultanées, sera proportionnel au moment principal des forces relatif à ce point.*

» Il suit de là que toutes les propriétés relatives aux rotations d'un corps autour de diverses droites, et aux espaces rectilignes décrits par les points du corps, donnent lieu à autant de propriétés d'un système de forces, relatives à ces forces elles-mêmes et à leurs moments par rapport aux différents points de l'espace.

» Ainsi les différentes propriétés relatives à deux axes conjugués de rotation, que nous avons appelés D et Δ, s'appliqueront aux systèmes de deux forces pouvant remplacer un autre système quelconque de forces. A l'axe X de rotation du corps correspondra cet axe que l'illustre auteur de la *Théorie des couples* a appelé l'*axe central des moments;* de sorte que, par exemple, nous pourrons dire que *la droite qui mesure la plus courte distance des deux forces qui remplacent un système de forces données rencontre toujours l'axe central des moments, et lui est perpendiculaire, quel que soit le système de ces deux forces,* etc..... »

SUR LE PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES. DIVERSES AUTRES ÉQUATIONS ANALOGUES, EXPRIMANT LES CONDITIONS D'ÉQUILIBRE, SOIT D'UN SYSTÈME DE FORCES, SOIT D'UN SYSTÈME DE ROTATIONS.

25. « L'analogie qui a lieu entre un système de forces sollicitant un corps solide libre et les rotations qui produisent un déplacement infiniment petit du corps conduit naturellement à une démonstration du principe des vitesses virtuelles qui montre comment la considération du mouvement et de l'infini dans ce principe correspond à des considérations purement statiques.

» Soient P, P',... les forces qui sollicitent un corps solide libre et qui se font équilibre. Soient Q, Q',... d'autres forces quelconques. Considérons chaque force P et chaque force Q comme arêtes opposées d'un tétraèdre, et représentons par Σtétr.(P, Q) la somme des volumes de ces tétraèdres. Cette somme conservera la même valeur si, à chacun des deux systèmes P, P',... et Q, Q',..., on substitue un autre système de forces équivalent; et par conséquent cette somme sera nulle, car les forces P, P',... peuvent être remplacées par deux forces égales et directement opposées qui donneront lieu à deux sommes de tétraèdres égales et de signes contraires. Réciproquement, si la somme des tétr. (P, Q) est nulle, quel que soit le système des forces Q, Q′,..., on voit aisément que nécessairement les forces P, P′, . . . se font équilibre.

» Ainsi, la condition d'équilibre des forces P, P′,... s'exprime par

$$\Sigma\,\text{tétr.}\,(P, Q) = 0,$$

Q, Q′, . . . formant un système de forces pris arbitrairement. Soit r la plus courte distance des deux forces P, Q; l'équation devient

$$\Sigma\, PQr\sin(P, Q) = 0.$$

» Supposons que toutes les forces Q, Q′, . . . aient été remplacées par deux seules, dont l'une dirigée suivant la force P; et soit q l'autre force. La somme des tétraèdres où entre P sera égale simplement à tétr.(P, q), ou $Pqr\sin(P, q)$. Or $qr\sin(P, q)$ est la projection sur un plan perpendiculaire à la force P, du moment de la force q par rapport à un point de la force P. Si donc on suppose que les forces Q, Q′, . . . soient en direction les axes de rotations proportionnelles à ces forces, le moment relatif à un point de la force P sera égal à l'élément rectiligne que ces rotations feront décrire à ce point. Soit p cet élément rectiligne; la somme des tétraèdres où entre la force P sera donc égale à $Pp\cos(P, p)$. Pour chacune des autres forces P′, . . . on aura une somme semblable; de sorte que l'équation d'équilibre deviendra

$$\Sigma\, Pp\cos(P, p) = 0.$$

C'est l'équation des vitesses virtuelles.

» Ainsi, dans ce principe des vitesses virtuelles, les éléments rectilignes qu'on appelle les *vitesses virtuelles* expriment les moments principaux d'un autre système des forces par rapport aux points d'application des forces proposées. »

26. « Si l'on conçoit que le corps auquel sont appliquées les forces P, P′,..., qui se font équilibre, éprouve un mouvement infiniment petit, il aura une certaine rotation autour de chacune des forces;

cette rotation sera en raison inverse de la projection de la trajectoire d'un point de cette force sur cette force. Soient donc θ, θ',... les rotations autour des forces P, P',...; l'équation des vitesses virtuelles s'exprimera par l'équation $\sum \frac{P}{\theta} = 0$. Ainsi nous dirons que

» *Quand plusieurs forces qui sont appliquées à un corps solide libre se font équilibre, si l'on donne au corps un mouvement infiniment petit, par suite duquel il éprouvera une rotation autour de chacune des forces, la somme de ces forces divisées par ces rotations, respectivement, est nulle; et réciproquement, si cette somme est nulle quel que soit le mouvement infiniment petit du corps, les forces se feront équilibre.*

» Ainsi, l'équilibre d'un système de forces s'exprime par la considération des rotations du corps autour de ces forces, de même que par la considération des éléments rectilignes décrits par des points de ces forces.

» On peut exprimer de deux manières semblables l'équilibre d'un système de rotations qui solliciteraient un corps; car ces rotations se feront équilibre si des forces dirigées suivant leurs axes et proportionnelles à ces rotations se font elles-mêmes équilibre. »