JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DELAUNAY

BONNET

JAMIN

DE SAINT-VENANT

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. Boussinesq, présenté le 19 avril 1869, avec additions du 29 novembre, et relatif à la théorie des ondes liquides périodiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 16 (1871), p. 21-30.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1871_2_16__21_0>

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. Boussinesq, *présenté le* 19 *avril* 1869, *avec additions du* 29 *novembre, et relatif à la théorie des ondes liquides périodiques;* par MM. Delaunay, Bonnet, Jamin, de Saint-Venant rapporteur.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, séance du 7 février 1870.)

La formation et la propagation des ondes à la surface des eaux, ainsi que dans l'intérieur de leurs masses, ont occupé de tous temps les physiciens et les géomètres.

Et, depuis que d'Alembert et Euler ont donné des équations différentielles exprimant d'une manière générale les mouvements des fluides, au moins quand on néglige les frottements qui se développent entre leurs couches et contre les parois qui les contiennent, les plus illustres de leurs successeurs ont cherché à déterminer par l'analyse les lois de ce phénomène intéressant. On sait qu'en se bornant à considérer des oscillations très-petites, ce qui est à peu près nécessaire pour pouvoir arriver à des résultats dignes de remarque, Laplace est parvenu, il y a bientôt un siècle [*], à exprimer ce que devient successivement un liquide pesant dont la surface, sans recevoir aucune impulsion, aurait été amenée initialement à prendre la forme de la courbe serpentante dont les ordonnées sont les cosinus d'arcs proportionnels aux abscisses; que Lagrange [**] a trouvé, lorsque l'eau est

[*] A l'article XXXVII et dernier de ses *Recherches sur plusieurs points du système du monde* (*Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1776, p. 542).

[**] *Académie de Berlin*, 1786; et ensuite, *Mécanique analytique*, 2e Partie, Section XI, art. 35 et suivants.

contenue dans un canal prismatique rectangulaire très-peu profond, une expression simple ($\sqrt{gh}$, ou la vitesse qu'acquiert librement un corps pesant tombant de la moitié de la profondeur h) pour la vitesse de propagation de cette intumescence aujourd'hui appelée *onde solitaire,* et qui est provoquée par un petit ébranlement longitudinal supposé s'étendre à toute la hauteur d'une section transversale; formule qui a été confirmée, depuis, par diverses expériences [*], et qui pourrait être démontrée élémentairement dans le cours de physique de la même manière très-simple dont M. Babinet est parvenu, en 1826, à démontrer la formule plus connue de la vitesse du son [**]. On sait que Poisson, après avoir très-bien fait voir que l'on ne pouvait nullement, en bornant la profondeur supposée des agitations, étendre cette formule, comme le pensait Lagrange, à ce qui se passe dans une eau profonde [***], a donné une formule générale pour les états successifs d'une masse d'eau de profondeur constante quelconque, dont la surface supérieure aurait eu une forme initiale aussi quelconque et donnée. Cette formule revient à la somme d'un nombre infini d'expressions comme celle qu'on peut tirer de l'analyse de Laplace, et qui jouerait ainsi, dans la théorie des ondes, le même rôle que la formule pendulaire de Taylor dans celle des cordes vibrantes. Et Poisson, en

---

[*] Entre autres celles de Scott Russel (*Annales des Ponts et Chaussées*, vers 1836), de qui est la dénomination que nous venons de rapporter; celles de M. Bazin (*Comptes rendus*, t. LV, p. 353, et t. LVII, p. 302), qui a reconnu la nécessité d'ajouter à l'expression $\sqrt{gh}$ de Lagrange la vitesse propre de l'eau quand elle est courante, et de prendre pour h la profondeur d'équilibre, plus celle de l'intumescence; et celles de M. de Caligny, qui a prouvé que, pour un ébranlement peu profond, l'onde solitaire prend cette vitesse seulement lorsque le mouvement a eu le temps de s'étendre à toute la profondeur du canal.

[**] *Exercices de physique, ou Recueil de questions de composition écrite*, par I. (Isidore) Pierre, 196^{e} exercice, p. 155 de l'édition de 1862. On peut voir aussi le *Mémoire sur le choc longitudinal de deux barres élastiques*, au tome XII, 1867, 2^{e} série, du *Journal de M. Liouville*, note du n° 16. L'auteur de ce Mémoire croyait être le premier à donner cette démonstration, dont il se plaît à reconnaître que la priorité appartient à M. Babinet.

[***] *Mémoire sur les ondes*, déposé le 28 août, lu le 2 octobre 1815 (*Société Philomathique*, 1815 et 1817, p. 163 et 85) et imprimé au tome I^{er} (1826) de ceux de l'Institut.

transformant, comme Fourier, une pareille somme en une intégrale double ou quadruple, a montré comment on pourrait supposer discontinue la courbe de l'état initial de la surface. Mais il n'a pu en tirer des lois distinctes qu'en supposant l'eau infiniment profonde, et les ondes provoquées par l'émersion brusque d'un corps solide paraboloïdal, qui préalablement y aurait été très-peu immergé. La loi principale est toujours très-complexe, car l'illustre géomètre trouve qu'il se propage, tout autour, une première série d'ondes dont le rayon augmente proportionnellement au carré du temps, mais à laquelle vient bientôt se superposer une série d'ondes plus importantes et plus larges, dont chacune a plus de hauteur que la suivante et marche avec une vitesse qui dépend des dimensions horizontales du corps immergé.

On connaît aussi, sur le même sujet, les recherches étendues de Cauchy [*], qui a pris occasion de la question des ondes pour donner d'importants théorèmes d'hydrodynamique et d'analyse, et qui est arrivé à des résultats plus généraux pour les ondes provoquées par une brusque rupture de l'équilibre dans une portion peu étendue de la surface du fluide, en ajoutant ce qui arrive dans le cas d'une impulsion qu'on lui aurait imprimée. Des additions à son Mémoire de 1816 ont été faites postérieurement à la publication, par Fourier, d'une Note sur le même sujet, au *Bulletin de la Société Philomathique*.

L'auteur du Mémoire dont nous avons à rendre compte s'est proposé d'étudier un phénomène qui, malgré quelques analogies, est essentiellement différent, et dont les lois sont plus simples. Il considère une masse fluide d'une profondeur finie, où il suppose qu'un ébranlement périodique est produit dans un espace limité soit en tous sens, soit dans un ou deux sens; et il détermine les mouvements, nécessairement de même période, qui en résultent dans tout le reste de la masse, spécialement aux points situés au delà d'une certaine distance de ceux où l'ébranlement a été provoqué; mouvements qui, au lieu de s'éteindre graduellement, comme dans les questions traitées par les grands géomètres cités, conservent une amplitude qui ne

---

[*] Mémoire qui a remporté le prix en 1816 et qui a été imprimé au tome Ier (1827) des *Savants étrangers*.

varie pas avec le temps, vu que la cause productrice est supposée ne pas cesser d'agir.

Pour cela M. Boussinesq commence par établir, d'une manière nouvelle, des équations différentielles générales du mouvement, où figurent les trois composantes rectangulaires, non pas des *vitesses* des molécules fluides comme dans celles d'Euler, mais des *déplacements* qu'elles ont éprouvés, et auxquels il suppose d'abord des grandeurs quelconques. A cet effet, il exprime les trois conditions de l'équilibre de translation d'un élément parallélépipède ayant *actuellement* ses côtés parallèles aux trois axes coordonnés fixes et rectangles, après avoir déterminé, en résolvant successivement trois groupes de trois équations du premier degré, quelles étaient les coordonnées *primitives*, ou avant les déplacements éprouvés, de quatre des huit sommets de ce petit solide initialement obliquangle. Ce sont, en effet, les neuf différences deux à deux de ces coordonnées primitives, c'est-à-dire les neuf excès, sur celles (x, y, z) d'un des sommets, de celles de trois autres, qui doivent entrer dans les équations d'équilibre, et y affecter les neuf dérivées des composantes de pressions sur les faces de l'élément; composantes qui sont censées exprimées en fonction des coordonnées initiales et non des coordonnées ultérieures. On n'aurait évidemment que des équations d'équilibre non rigoureuses ni complètes si, au lieu de cela, l'on ne faisait entrer dans les premiers membres de chacune, que trois des neuf dérivées des composantes de pression, en les affectant des trois dimensions actuelles de l'élément devenu rectangulaire.

En introduisant ensuite la supposition que non-seulement les côtés de l'élément, mais même les déplacements éprouvés, ont été très-petits, les équations se modifient, mais conservent une forme très-générale bien adaptée à la solution des problèmes d'ondes et de vibrations. Elles donnent la propagation du son à travers le liquide si l'on y néglige les termes affectés de la pesanteur, en mettant, à la place de la partie dynamique de la pression, le produit de la très-petite compression de l'unité de volume par un coefficient d'élasticité très-considérable; et elles donnent les ondes liquides proprement dites en conservant dans chacune, sans une pareille transformation, cette pression qui plus tard sera éliminée, et en regardant comme nulle, par rapport à chacun des trois termes qui composent son expression, la compression de volume, bien que l'existence de cette compression puisse seule expliquer physiquement la pression et ses différences. De pareilles équations, laissées avec tous leurs termes, l'on ne retirerait pas forcément cette conséquence paradoxale et physiquement fausse, fournie, suivant Poisson, par les équations ordinaires et incomplètes : « que les ébranlements provoqués quelque part dans les liquides se transmettent *instantanément* dans toute leur masse. »

Dans les équations ainsi établies, M. Boussinesq a introduit de suite, conformément à son objet, la condition ou la restriction que les déplacements soient périodiques et de même période dans toute la masse. Il en résulte que le potentiel du déplacement d'une molécule quelconque, ou la fonction (φ) qui, différentiée par rapport à ses trois coordonnées, donne les trois projections (u, v, w) de ce déplacement sur les coordonnées respectives (x, y, z), n'est autre chose qu'une quantité proportionnelle à la fois au carré du temps d'une période et à la partie dynamique de la pression. Cette quantité est nécessairement périodique, et a pour grandeur le produit d'une fonction positive des coordonnées, mesurant l'amplitude de ses variations, par le cosinus d'un arc proportionnel au temps diminué d'une autre fonction des coordonnées; fonction qui, lorsqu'on l'égale à une constante, donne l'équation des ondes, c'est-à-dire des surfaces formées par un ensemble de points de la masse fluide, dont les vibrations sont au même instant à une même phase de leurs évolutions autour de la situation moyenne de chacun.

Ces deux fonctions sont astreintes à satisfaire à deux équations différentielles indéfinies, et à des conditions définies relatives à la surface et au fond.

Avant de les résoudre pour des mouvements propagés à partir d'un centre ou d'une surface quelconque d'ébranlement, l'auteur montre qu'on y satisfait par des ondes planes, verticales et parallèles, d'une vitesse de propagation constante, mais d'une amplitude variable de la surface au fond. Il trouve que cette amplitude doit être le produit d'une constante par le *cosinus hyperbolique* du nombre de fois que la distance au fond contient le rayon d'une circonférence mesurant la *longueur d'onde* (en appelant ainsi, comme dans d'autres théories, l'espace qui serait parcouru pendant le temps d'une période en vertu de la vitesse de propagation des ondes). Et, en exprimant la condition relative à la surface, il reconnaît que la vitesse de propagation est racine d'une équation exprimant que la tangente hyperbolique du nombre dont on vient de parler, particularisé pour les points de la surface supérieure, est à ce nombre lui-même, comme le carré de la vitesse inconnue est au carré de celle qu'acquerrait un corps pesant en tombant librement d'une hauteur égale à la moitié de la profondeur de la masse liquide. Cette équation transcendante, comme le démontre ingénieusement l'auteur, n'a jamais qu'une seule racine positive ou qui convienne à la question. On voit que, lorsque l'eau est assez peu profonde et le nombre des vibrations imprimées dans un temps donné assez peu considérable pour que la profondeur d'eau soit bien plus petite que la longueur d'onde, en sorte que la tangente hyperbolique soit sensiblement égale à son arc ou module, alors petit, l'on a pour la vitesse de propagation l'expression trouvée par Lagrange relativement à l'onde solitaire; mais que quand la profondeur, au contraire, est grande et les périodes courtes, en sorte que la même tangente hyperbolique devient sensiblement égale à l'unité, la vitesse de propagation a pour valeur très-approchée, en mètres, 1 fois, 5612 $\left(\frac{g}{2\pi}\text{ fois}\right)$ le temps de la période en secondes.

Or M. Boussinesq montre que le mouvement par ondes planes se réalise très-approximativement lorsqu'on se borne à considérer des points assez éloignés des centres d'ébranlement. Le coefficient traité ci-dessus comme constant, qui, dans l'expression de l'amplitude, multiplie le cosinus hyperbolique d'un nombre proportionnel à la hauteur au-dessus du fond, se trouve remplacé par une fonction des coordonnées, mais extrêmement peu variable sur une même verticale, et ne variant que lentement d'une verticale à l'autre. Il reconnaît que les molécules décrivent, autour de leurs positions d'équilibre, de petites ellipses dans des plans verticaux, normaux aux ondes. Chacune de ces ellipses a son plus grand axe horizontal. Infiniment aplaties auprès du fond aussi horizontal sur lequel la masse liquide repose, ces ellipses, si les vibrations ne sont pas trop lentes, approchent, vers la surface, de la forme circulaire, sans toutefois que la distance focale s'annule; car, pour toutes les molécules situées sur une même verticale, cette distance est constante, et égale par conséquent à la petite course rectiligne des molécules du fond. Chaque ellipse est décrite de manière que la molécule, en parcourant la moitié supérieure de sa trajectoire, s'éloigne de l'endroit du fluide où l'ébranlement a été provoqué, tandis qu'elle s'en approche en parcourant la moitié inférieure. Le mouvement par ondes rigoureusement planes, et représenté par deux coordonnées seulement, aura lieu dans un canal horizontal prismatique à section rectangle, si l'ébranlement périodique est provoqué dans un plan vertical et transversal. L'analyse donne, comme on voit, des résultats en rapport avec ce qui a été observé par M. de Caligny dans ses expériences, où, cependant, les oscillations n'étaient pas très-petites [*].

Du reste, dans le cas le plus général, ces ondes, qui dans des portions peu étendues peuvent être regardées comme planes, sont, par le fait, des cylindres ayant tous, à très-peu près, les mêmes normales, et, par suite, les mêmes centres principaux de courbure. L'une d'elles étant donnée, toute autre s'obtient en menant à celle-ci une infinité de normales d'égale longueur, grande ou petite, et en faisant passer une surface par leurs extrémités. L'amplitude varie le long d'une même normale en raison inverse de la racine carrée de la distance au centre de courbure correspondant. D'une normale à l'autre, elle peut varier arbitrairement, et la fonction arbitraire ainsi introduite dépend du mode particulier de production des ébranlements. Il en est de même de la première surface d'onde considérée, c'est-à-dire de celle qui est la plus voisine des centres d'ébranlement parmi celles auxquelles s'applique la théorie exposée : sa forme change évidemment, suivant que le fluide est directement agité dans un petit espace autour d'un point, ou sur toute l'étendue d'une surface de longueur indéfinie.

Ces lois s'observent pourvu que la vitesse de propagation des ondes soit, à très-peu près, constante. Or elle l'est dès que la distance aux points d'ébranlement contient un nombre assez grand de fois la longueur d'onde. Les variations fort petites de la vitesse sont alors, sui-

---

[*] *Société Philomathique*, 1842, et *Comptes rendus*, 26 avril 1869, t. LXVIII, p. 980.

vant une même normale aux ondes, en raison inverse du carré de la distance au centre de courbure correspondant.

M. Boussinesq applique ces résultats au cas où les ébranlements ne sont directement produits que dans un espace très-petit autour de l'origine, et où, par suite, les ondes sont des cylindres circulaires concentriques.

Ensuite, il y ramène le cas plus général où la première des surfaces d'onde considérées est un cylindre vertical à base quelconque. Il emploie pour cela des considérations géométriques délicates, qui ont de l'analogie avec celles dont s'est servi Fresnel dans ses explications de la réflexion et de la réfraction de la lumière; car il regarde chaque élément d'un certain cylindre construit à une petite distance constante en arrière de la première onde donnée, comme un centre ou un axe d'ébranlement qui engendre et propage, tout autour, des ondes à base circulaire. En considérant un point quelconque de l'onde donnée, il fait voir que la propagation des petites ondes circulaires dont on vient de parler y enverra des mouvements en partie discordants, et se détruisant les uns les autres, à l'exception de ceux qui émanent d'éléments verticaux fort proches du pied de la normale menée du point considéré au cylindre. Or, si l'on admet que les mouvements élémentaires envoyés suivant cette normale se trouvent, en arrivant au point considéré, en avance d'un huitième de vibration sur ceux qui y sont effectivement produits, la somme des mouvements élémentaires envoyés par les éléments verticaux voisins du pied de la normale équivaudra, au point considéré, comme l'auteur le démontre simplement, aux mouvements effectifs. Cette somme, vérifiant d'ailleurs les équations différentielles des ondes liquides périodiques, constitue, par conséquent, la solution cherchée.

Mais le même procédé géométrique et en quelque sorte élémentaire lui permet d'aborder aussitôt en peu de lignes un cas encore plus général, et d'en indiquer la solution complète. C'est le cas où la surface cylindrique, sur toute l'étendue de laquelle l'amplitude des mouvements est supposée connue, couperait les ondes et ne serait plus, par conséquent, l'une de celles-ci. On devrait donner alors, en même temps, sur chaque verticale de cette surface, la direction de la surface d'onde qui y passe. On construira toujours, en arrière du cylindre proposé, un autre cylindre, lieu des axes des ondes circulaires fictives, alors obliques à l'un comme à l'autre; mais l'amplitude des éléments fictifs qu'envoie chacun des éléments verticaux de celui-ci, au lieu d'être proportionnelle à la largeur de l'élément, ne l'est plus qu'à la projection de cette largeur sur l'onde effective voisine.

Déjà, dans un Mémoire sur les vibrations transversales de l'éther et sur la diffraction de la lumière, imprimé en 1868 (*Journal de Mathématiques*), M. Boussinesq s'était livré à des considérations semblables, susceptibles d'une utile généralisation.

Il applique aussi sa théorie à un phénomène de *diffraction* des ondes liquides qui serait produit si une plaque verticale solide, plongée dans le fluide ébranlé, venait à intercepter une partie des ondes produites. Nous n'analyserons pas cette partie de son travail, dont les divers résultats sont établis analytiquement sans faire appel aux méthodes d'approximation. L'une des conclusions est qu'il se formera à la surface, au delà de l'obstacle, des franges ou rides hyperboliques.

Nous ne le suivrons pas non plus dans les diverses parties d'une première Note finale, où il tient compte de termes de l'ordre des carrés et des produits des déplacements, c'est-à-dire supposés tels qu'on ne puisse plus les envisager comme très petits. Les mouvements périodiques longitudinaux dans un canal, par exemple, ne peuvent alors être *pendulaires* que lorsqu'on suppose la profondeur infinie. Les centres des trajectoires des molécules diffèrent légèrement de leurs positions d'équilibre; et, dans ce même cas, comme le mouvement moléculaire *au fond* doit être nul, l'excentricité, égale pour tous les points d'une même verticale, comme on a dit, est nécessairement zéro partout, et les trajectoires sont toutes circulaires. Cela est conforme à une Note de M. Reech, insérée au *Compte rendu* du 10 mai 1869 (t. LXVIII, p. 1099), où ce cas est considéré. On voit que le travail de l'éminent Directeur de l'École du Génie maritime ne contredit nullement celui de M. Boussinesq.

Nous dirons peu de choses aussi de ce que contient une dernière Note, intéressante cependant par son sujet, qui est relatif à l'action du frottement intérieur des liquides dans le phénomène des ondes périodiques. Si le coefficient de ce frottement n'est que ce qu'il a été dans les mouvements *réguliers* qui avaient lieu dans les expériences de

M. Poiseuille, cette force ne change sensiblement rien aux équations différentielles *indéfinies* relatives aux points de l'intérieur de la masse; elle ne modifie que les conditions aux limites. Mais, à cause de sa petitesse, elle agit secondairement et tout au plus à la manière des forces appelées *perturbatrices* dans des phénomènes d'un autre ordre.

Vos Commissaires pensent, en résumé, que M. Boussinesq a traité à un nouveau point de vue, et d'une manière aussi exacte que féconde, le problème intéressant des ondes liquides; qu'il a montré, dans son Mémoire, un remarquable esprit d'invention secondé constamment par l'habileté analytique, et ils vous proposent d'ordonner l'impression de ce travail dans le *Recueil des Savants étrangers*.

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.