

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. GRAINDORGE

**Sur la sommation de quelques séries, et sur quelques  
intégrales définies nouvelles**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 18 (1873), p. 129-138.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1873\\_2\\_18\\_\\_129\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__129_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur la sommation de quelques séries, et sur quelques intégrales définies nouvelles;*

**PAR J. GRAINDORGE,**

Docteur ès sciences, Répétiteur à l'Université de Liège.

1. Soit à trouver la somme de la série

$$s = \frac{\sin^2 \varphi}{1^4} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\sin^2 3\varphi}{3^4} + \dots$$

En prenant la dérivée par rapport à  $\varphi$ , on a

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 4\varphi}{2^3} + \frac{\sin 6\varphi}{3^3} + \dots$$

Or

$$\sin \varphi' + \frac{\sin 2\varphi'}{2^3} + \frac{\sin 3\varphi'}{3^3} + \dots = \frac{1}{12} \varphi' (\pi - \varphi') (2\pi - \varphi');$$

donc

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{3} \varphi (\pi - 2\varphi) (\pi - \varphi).$$

Intégrant et observant que  $s = 0$  pour  $\varphi = 0$ , on a

$$s = \frac{\pi^2 \varphi^2}{6} - \frac{\pi^2 \varphi^3}{3} + \frac{\varphi^4}{6},$$

puis

$$(1) \quad \frac{\sin^2 \varphi}{1^4} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\sin^2 3\varphi}{3^4} + \dots = \frac{\varphi^2}{6} (\pi - \varphi)^2.$$

Si, dans cette formule, nous remplaçons  $\varphi$  par  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ , il vient

$$(2) \quad \frac{\cos^2 \varphi}{1^2} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^2} + \frac{\cos^2 3\varphi}{3^2} + \frac{\sin^2 4\varphi}{4^2} + \dots = \frac{1}{6} \left( \frac{\pi^2}{4} - \varphi^2 \right)^2.$$

En retranchant la formule (1) de la formule (2), on trouve

$$\frac{\cos 2\varphi}{1^2} + \frac{\cos 6\varphi}{3^2} + \dots = \frac{\pi^4}{96} - \frac{\pi\varphi^2}{12} (3\pi - 4\varphi),$$

et, en remplaçant  $2\varphi$  par  $\varphi$ ,

$$(3) \quad \frac{\cos \varphi}{1^2} + \frac{\cos 3\varphi}{3^2} + \dots = \frac{\pi^4}{96} - \frac{\pi\varphi^2}{48} (3\pi - 2\varphi).$$

Cette dernière donne, en remplaçant  $\varphi$  par  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ,

$$(4) \quad \frac{\sin \varphi}{1^2} - \frac{\sin 3\varphi}{3^2} + \frac{\sin 5\varphi}{5^2} - \dots = \frac{\pi\varphi}{96} (3\pi^2 - 4\varphi^2).$$

Ces formules subsistent pour toutes les valeurs de  $\varphi$  comprises entre 0 et  $\pi$ ; les trois dernières sont en défaut pour  $\varphi = \pi$ .

## 2. La même méthode, appliquée à la série

$$u = \frac{\cos^2 \varphi}{1^2} + \frac{\cos^2 2\varphi}{2^2} + \frac{\cos^2 3\varphi}{3^2} + \dots,$$

donne

$$\frac{du}{d\varphi} = \pi\varphi^2 - \frac{\pi^2\varphi}{3} - \frac{2\varphi^3}{3};$$

d'où

$$u = C + \frac{\pi\varphi^3}{3} - \frac{\pi^2\varphi^2}{6} - \frac{\varphi^4}{6} = C - \frac{\varphi^2}{6} (\pi - \varphi)^2.$$

La constante se détermine en faisant  $\varphi = 0$  :

$$C = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Par conséquent,

$$(5) \quad \frac{\cos^2 \varphi}{1^4} + \frac{\cos^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\cos^2 3\varphi}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\varphi^2}{6}(\pi - \varphi)^2 \text{ [*]}.$$

En remplaçant  $\varphi$  par  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ , on obtient

$$(6) \quad \frac{\sin^2 \varphi}{1^4} + \frac{\cos^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\sin^2 3\varphi}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{1440} - \frac{\varphi^2(2\varphi^2 - \pi^2)}{12}.$$

Ces deux séries subsistent pour toutes les valeurs de  $\varphi$  comprises entre 0 et  $\pi$ . La formule (6) est en défaut pour  $\varphi = \pi$ .

3. En faisant les mêmes calculs sur la série

$$v = \frac{\sin^3 \varphi}{1^3} + \frac{\sin^3 2\varphi}{2^3} + \frac{\sin^3 3\varphi}{3^3} + \dots,$$

on trouve

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \frac{dv}{d\varphi} &= \frac{2 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{1^2} + \frac{2 \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi}{2^2} + \dots, \\ \frac{2}{3} \frac{dv}{d\varphi} &= \frac{\sin \varphi \sin 2\varphi}{1^2} + \frac{\sin 2\varphi \sin 4\varphi}{2^2} + \dots; \end{aligned}$$

par suite

$$\frac{4}{3} \frac{dv}{d\varphi} = \frac{\cos \varphi}{1^2} + \frac{\cos 2\varphi}{2^2} + \frac{\cos 3\varphi}{3^2} + \dots - \left( \frac{\cos 3\varphi}{1^2} + \frac{\cos 6\varphi}{2^2} + \dots \right),$$

[\*] Cette série peut d'ailleurs se déduire de la formule (1) retranchée de

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

d'où

$$\frac{4}{3} \frac{d\nu}{d\varphi} = \pi\varphi - 2\varphi^3.$$

Intégrant, on a

$$\nu = \frac{\varphi^2}{8} (3\pi - 4\varphi).$$

Donc

$$(7) \quad \frac{\sin^3 \varphi}{1^3} + \frac{\sin^3 2\varphi}{2^3} + \dots = \frac{\varphi^2}{8} (3\pi - 4\varphi).$$

Cette formule a lieu pour les valeurs de  $\varphi$  comprises entre 0 et  $\pi$ ; elle est en défaut pour  $\varphi = \pi$ .

#### 4. La même méthode, appliquée à la série

$$z = \frac{\sin^4 \varphi}{1^4} + \frac{\sin^4 2\varphi}{2^4} + \dots,$$

donne facilement

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{\sin \varphi (\cos \varphi - \cos 3\varphi)}{1^3} + \frac{\sin 2\varphi (\cos 2\varphi - \cos 6\varphi)}{2^3} + \dots,$$

ou bien

$$\begin{aligned} 2 \frac{dz}{d\varphi} &= \frac{\sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 4\varphi}{2^3} + \dots - \left( \frac{\sin 4\varphi - \sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 8\varphi - \sin 4\varphi}{2^3} + \dots \right) \\ &= 2 \left( \frac{\sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 4\varphi}{2^3} + \dots \right) - \left( \frac{\sin 4\varphi}{1^3} + \frac{\sin 8\varphi}{2^3} + \dots \right); \end{aligned}$$

en vertu de la formule citée, et après quelques réductions, on a

$$\frac{dz}{d\varphi} = \pi\varphi^2 - 2\varphi^3,$$

ce qui donne par l'intégration

$$(8) \quad z = \frac{\sin^4 \varphi}{1^4} + \frac{\sin^4 2\varphi}{2^4} + \dots = \frac{\pi\varphi^3}{3} - \frac{\varphi^4}{2}.$$

Cette formule subsiste pour les valeurs de  $\varphi$  depuis 0 jusqu'à  $\pi$ , excepté pour  $\varphi = \pi$ .

5. On peut de la même manière trouver la somme

$$w = \frac{\cos^4 \varphi}{1^4} + \frac{\cos^4 2\varphi}{2^4} + \frac{\cos^4 3\varphi}{3^4} + \dots$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\varphi} &= -\frac{2 \cos^2 \varphi \sin 2\varphi}{1^3} - \frac{2 \cos^2 2\varphi \sin 4\varphi}{2^3} - \dots \\ &= -\frac{2 \sin 2\varphi}{1^3} (1 - \sin^2 \varphi) - \frac{2 \sin 4\varphi}{2^3} (1 - \sin^2 2\varphi) - \dots \\ &= -2 \left( \frac{\sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 4\varphi}{2^3} + \dots \right) + \left( \frac{2 \sin^2 \varphi \sin 2\varphi}{1^3} + \frac{2 \sin^2 2\varphi \sin 4\varphi}{2^3} + \dots \right); \end{aligned}$$

et, par suite, d'après les formules ci-dessus,

$$\frac{dw}{d\varphi} = -\frac{2}{3} \varphi (\pi - 2\varphi) (\pi - \varphi) + \pi \varphi^2 - 2\varphi^3 = 3\pi \varphi^2 - \frac{10\varphi^3}{3} - \frac{2\pi^2 \varphi}{3}.$$

En intégrant, on trouve

$$w = C + \pi \varphi^3 - \frac{5}{6} \varphi^4 - \frac{\pi^2 \varphi^2}{3}.$$

La constante se détermine en faisant  $\varphi = 0$ , ce qui donne

$$C = \frac{\pi^4}{90}.$$

Par conséquent,

$$(9) \quad \frac{\cos^4 \varphi}{1^4} + \frac{\cos^4 2\varphi}{2^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90} + \pi \varphi^3 - \frac{5}{6} \varphi^4 - \frac{\pi^2 \varphi^2}{3}.$$

Cette formule est vraie pour les valeurs de  $\varphi$  comprises entre 0 et  $\pi$ ; elle est en défaut pour  $\varphi = \pi$ .

6. On trouve, par le même procédé,

$$(10) \quad \mathcal{Y} = \frac{\sin^2 \varphi}{1^2} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^2} + \dots = \frac{\pi \varphi}{2} - \frac{\varphi^2}{2},$$

$$(11) \quad \mathcal{Y}_1 = \frac{\sin^2 \varphi}{1^2} + \frac{\sin^2 3\varphi}{3^2} + \dots = \frac{\pi}{4} \varphi,$$

$$(12) \quad \mathcal{Y}_2 = \frac{\cos^2 \varphi}{1^2} + \frac{\cos^2 2\varphi}{2^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\varphi}{2} (\pi - \varphi),$$

$$(13) \quad \mathcal{Y}_3 = \frac{\cos^2 \varphi}{1^2} + \frac{\cos^2 3\varphi}{3^2} + \dots = \frac{\pi}{8} (\pi - 2\varphi).$$

Quoique nous ayons vainement cherché ces quatre séries dans différents Traités, nous croyons cependant qu'elles ne sont pas nouvelles. Elles ont lieu pour les valeurs de  $\varphi$  comprises entre 0 et  $\pi$  : les formules (11) et (13) sont en défaut pour  $\varphi = \pi$ .

7. Ces résultats étant connus, nous aurons

$$\frac{1}{4x} l. \frac{1 - 2x \cos 2\varphi + x^2}{(1-x)^2} = \sin^2 \varphi + \frac{x}{2} \sin^2 2\varphi + \frac{x^2}{3} \sin^2 3\varphi + \dots;$$

d'où, en intégrant entre les limites 0 et 1,

$$\frac{1}{4} \int_0^1 l. \frac{1 - 2x \cos 2\varphi + x^2}{(1-x)^2} \frac{dx}{x} = \frac{\sin^2 \varphi}{1^2} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^2} + \dots = \frac{\varphi(\pi - \varphi)}{2},$$

ou, en remplaçant  $2\varphi$  par  $\varphi$ ,

$$(14) \quad \int_0^1 l. \frac{1 - 2x \cos \varphi + x^2}{(1-x)^2} \frac{dx}{x} = \varphi \left( \pi - \frac{\varphi}{2} \right).$$

8. La relation

$$-\frac{1}{4} l. [(1 - 2x \cos 2\varphi + x^2)(1-x)^2] = x \cos^2 \varphi + \frac{x^2}{2} \cos^2 2\varphi + \dots$$

nous donne de la même manière

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 L. [(1 - 2x \cos 2\varphi + x^2)(1 - x)^2] \frac{dx}{x} = \frac{\cos^2 \varphi}{1^2} + \frac{\cos^2 2\varphi}{2^2} + \dots;$$

d'où l'on déduit, en vertu de (12) et en remplaçant  $2\varphi$  par  $\varphi$ ,

$$(15) \quad \int_0^1 L. [(1 - 2x \cos \varphi + x^2)(1 - x)^2] \frac{dx}{x} = \varphi \left( \pi - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{2}{3} \pi^2.$$

En faisant  $\varphi = 0$ , on retrouve l'intégrale connue

$$\int_0^1 L. (1 - x) \frac{dx}{x} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

9. Ajoutant les intégrales (14) et (15), on a

$$\int_0^1 L. (1 - 2x \cos \varphi + x^2)^2 \frac{dx}{x} = 2\varphi \left( \pi - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{2}{3} \pi^2,$$

d'où

$$(16) \quad \int_0^1 L. (1 - 2x \cos \varphi + x^2) \frac{dx}{x} = \varphi \left( \pi - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{1}{3} \pi^2.$$

10. De la même manière, la relation

$$\frac{1}{8} L. \left[ \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2 \frac{1 - 2x \cos 2\varphi + x^2}{1 + 2x \cos 2\varphi + x^2} \right] = x \sin^2 \varphi + \frac{x^3}{3} \sin^2 3\varphi + \dots$$

conduit à celle-ci :

$$\frac{1}{8} \int_0^1 L. \left[ \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2 \frac{1 - 2x \cos 2\varphi + x^2}{1 + 2x \cos 2\varphi + x^2} \right] \frac{dx}{x} = \frac{\sin^2 \varphi}{1^2} + \frac{\sin^2 3\varphi}{3^2} + \dots;$$

d'où, à cause de la formule (11),

$$\int_0^1 L. \left[ \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2 \frac{1 - 2x \cos 2\varphi + x^2}{1 + 2x \cos 2\varphi + x^2} \right] \frac{dx}{x} = 2\pi\varphi,$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(17) \quad \int_0^1 l. \left[ \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2 \frac{1-2x \cos \varphi + x^2}{1+2x \cos \varphi + x^2} \right] \frac{dx}{x} = \pi \varphi.$$

**11.** Si, dans cette formule, nous faisons  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , il vient

$$(18) \quad \int_0^1 l. \left[ \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2 \frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2} \right] \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

**12.** La combinaison de la formule

$$\frac{1}{8} l. \left[ \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2 \frac{1+2x \cos 2\varphi + x^2}{1-2x \cos 2\varphi + x^2} \right] = x \cos^2 \varphi + \frac{x^3}{3} \cos^2 3\varphi + \dots$$

avec la formule (13) nous donne

$$\int_0^1 l. \left[ \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2 \frac{1+2x \cos 2\varphi + x^2}{1-2x \cos 2\varphi + x^2} \right] \frac{dx}{x} = \pi(\pi - 2\varphi),$$

ou bien

$$(19) \quad \int_0^1 l. \left[ \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2 \frac{1+2x \cos \varphi + x^2}{1-2x \cos \varphi + x^2} \right] \frac{dx}{x} = \pi(\pi - \varphi).$$

**13.** Pour  $\varphi = 0$ , cette dernière égalité devient

$$(20) \quad \int_0^1 l. \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{4},$$

formule connue; et, pour  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,

$$(21) \quad \int_0^1 l. \left[ \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2 \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} \right] \frac{dx}{x} = \frac{3\pi^2}{4}.$$

14. En combinant les formules (19) et (20), on trouve

$$(22) \quad \int_0^1 l. \left( \frac{1 + 2x \cos \varphi + x^2}{1 - 2x \cos \varphi + x^2} \right) \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{2} - \pi \varphi,$$

que l'on peut aussi déduire de l'intégrale (17).

15. Si nous ajoutons les formules (15) et (19), nous aurons

$$(23) \quad \int_0^1 l. [(1+x)^2 (1+2x \cos \varphi + x^2)] \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} \pi^2 - \frac{\varphi^2}{2};$$

ce qui donne, pour  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,

$$(24) \quad \int_0^1 l. (1+x)^2 [(1+x\sqrt{2}+x^2)] \frac{dx}{x} = \frac{29\pi^2}{96}.$$

16. En remplaçant  $\varphi$  par  $\frac{\pi}{4}$  dans (22), on trouve

$$(25) \quad \int_0^1 l. \left( \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} \right) \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{4},$$

et, en retranchant l'intégrale (20),

$$(26) \quad \int_0^1 l. \left( \frac{1-x}{1+x} \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} \right) \frac{dx}{x} = 0.$$

17. Ajoutant (16) et (22), on a

$$(27) \quad \int_0^1 l. (1+2x \cos \varphi + x^2) \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\varphi^2}{2},$$

et, pour  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,

$$(28) \quad \int_0^1 l. (1+x\sqrt{2}+x^2) \frac{dx}{x} = \frac{13\pi^2}{96}.$$

18. A cause de

$$\frac{1}{4} l. \left( \frac{1 + 2x \sin \varphi + x^2}{1 - 2x \sin \varphi + x^2} \right) = x \sin \varphi - \frac{x^3}{3} \sin 3\varphi + \dots$$

et de

$$\frac{\sin \varphi}{1^2} - \frac{\sin 3\varphi}{3^2} + \frac{\sin 5\varphi}{5^2} - \dots = \frac{\pi \varphi}{4},$$

on a

$$(29) \quad \int_0^1 l. \left( \frac{1 + 2x \sin \varphi + x^2}{1 - 2x \sin \varphi + x^2} \right) \frac{dx}{x} = \pi \varphi,$$

résultat que l'on peut déduire de (22) en changeant  $\varphi$  en  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ .

19. Enfin, si l'on retranche membre à membre les relations (17), (29), on obtient

$$(30) \quad \int_0^1 l. \left[ \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2 \frac{1 - 2x \cos \varphi + x^2}{1 + 2x \cos \varphi + x^2} \frac{1 - 2x \sin \varphi + x^2}{1 + 2x \sin \varphi + x^2} \right] \frac{dx}{x} = 0.$$

