# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



BESGE


**Sur une équation différentielle**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 18 (1873), p. 139-141.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__139_0>

# SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

*Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville*

**PAR M. BESGE.**

---

L'équation différentielle

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2py^2, \tag{1}$$

où $p$ est une fonction donnée de la variable indépendante $x$, peut être ramenée à une forme beaucoup plus simple.

Pour essayer de l'intégrer par la méthode ordinaire, on doit poser d'abord

$$y = e^{\int t\,dx},$$

ce qui donne, pour déterminer la nouvelle inconnue $t$, l'équation

$$\frac{dt}{dx} + t^2 = \frac{1}{2}t^2 + 2p,$$

ou bien

$$\frac{dt}{dx} + \frac{1}{2}t^2 = 2p.$$

Or, en faisant

$$t = 2\sigma,$$

et divisant par 2, cela donne

$$\frac{d\sigma}{dx} + \sigma^2 = p.$$

C'est précisément l'équation à laquelle on serait conduit si, partant de l'équation linéaire

$$\frac{d^2u}{dx^2} = pu, \tag{2}$$

on posait

$$u = e^{\int \sigma\, dx}.$$

Réciproquement donc, si vous intégrez l'équation (2), vous en conclurez la valeur de $\sigma$, qui est égale à

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx},$$

d'où celle de $t$, qui est le double, puis enfin celle de $y$ qu'on se proposait d'obtenir, et votre problème sera ainsi résolu.

Comme exemple, on peut prendre toute fonction $p$ pour laquelle l'intégrale complète de l'équation (2) soit connue, et l'on sait qu'il suffit d'avoir une seule intégrale particulière de l'équation (2) pour former cette intégrale complète. Le cas de

$$p = gx^m$$

est un des plus simples qu'on puisse choisir. Il répond à l'équation connue de Riccati, ou plutôt l'équation

$$\frac{d\sigma}{dx} + \sigma^2 = p$$

n'est alors que l'équation même de Riccati.

Je crois inutile d'entrer ici dans les détails du calcul.

*Post-scriptum.* Je remarque à l'instant qu'en différentiant l'équation (1) on obtient ce résultat remarquable

$$y\frac{d^3y}{dx^3} = 4py\frac{dy}{dx} + 2p'y^2,$$

en posant pour abréger

$$\frac{dp}{dx} = p'.$$

En divisant donc par $y$, on aura

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 4p\frac{dy}{dx} + 2p'y, \tag{3}$$

équation linéaire dont l'intégrale dépend aussi, par conséquent, de celle de l'équation (2). Mais je crois que cela ne vous surprendra pas; car je crois me souvenir que vous avez, dans un de vos anciens Mémoires, rencontré cette même équation (3) en considérant le produit de deux intégrales particulières (égales ou inégales) de l'équation (2), de sorte que, si l'intégrale de l'équation (2) est, avec deux constantes arbitraires $a$, $b$,

$$u = au_1 + bu_2,$$

l'intégrale de l'équation (3) sera

$$y = Au_1^2 + Bu_1u_2 + Cu_2^2,$$

A, B, C étant aussi trois constantes arbitraires. Il n'y a donc au fond rien de nouveau dans ma Lettre, que pourtant je ne supprime pas; vous en ferez ce que vous voudrez.

*Note de M. Liouville.* Il est très-certain que je me suis jadis occupé de l'équation

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 4p\frac{dy}{dx} + 2p'y, \tag{3}$$

et que j'ai fait connaître comment elle dépend de l'équation (2); mais il y a si longtemps de cela que, pour la plupart de nos lecteurs, la Lettre de M. Besge pourra ne pas être sans quelque intérêt. Je l'envoie donc à tout hasard à l'impression.