JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui se rattachent à certaines formes quadratiques (premier article)

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 142-144.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__142_0>

Sur quelques formules générales qui se rattachent à certaines formes quadratiques;

PAR M. J. LIOUVILLE.

(PREMIER ARTICLE.)

Je me propose de faire connaître dans une série d'articles quelques formules générales, qui se rattachent à certaines formes quadratiques binaires, et dont je vais donner, dans ce premier article, un exemple très-simple et pourtant digne d'attention.

Soit m un entier impair donné. Posons, de toutes les manières possibles, d'une part

$$m = \alpha^2 + 3\beta^2, \tag{1}$$

α, β étant des entiers indifféremment pairs ou impairs, positifs, négatifs ou zéro; puis, d'autre part,

$$4m = i^2 + 3i'^2, \tag{2}$$

i, i' désignant cette fois des entiers essentiellement impairs et positifs. Soit, d'ailleurs, $f(x, y)$ une fonction de deux variables x, y, paire tant par rapport à x que par rapport à y, c'est-à-dire telle que l'on ait

$$f(-x, y) = f(x, -y) = f(-x, -y) = f(x, y).$$

Au moyen de cette fonction et des équations (1) et (2) nous pourrons former les deux sommes suivantes :

$$\Sigma f(\alpha + 3\beta, \alpha - \beta) \tag{A}$$

et

$$\Sigma f(i, i') \tag{B}$$

où le signe Σ porte respectivement sur l'ensemble des solutions des équations (1) et (2). Cela posé, notre théorème consiste en ce que la première somme (A) est toujours double de la seconde (B), en sorte que l'on a

$$\text{(I)} \qquad \Sigma f(\alpha + 3\beta, \alpha - \beta) = 2\Sigma f(i, i').$$

Faisons, par exemple, $m = 1 = (\pm 1)^2 + 3.0^2$, ce qui donnera pour l'équation (1) deux groupes de solutions $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$, d'où, pour le premier membre de notre équation, la valeur

$$f(1, 1) + f(-1, -1),$$

ou simplement

$$2f(1, 1),$$

puisque la fonction f est paire. Il nous viendra d'autre part, dans ce cas,

$$4.1 = 1^2 + 3.1^2,$$

ce qui, comparé à l'équation (2), donnera ce seul système $i = 1$, $i' = 1$, et aussi $2f(1, 1)$ pour le second membre.

Soit ensuite $m = 3$. L'équation (1) deviendra alors

$$3 = 0^2 + 3.(\pm 1)^2,$$

d'où $\alpha = 0$, $\beta = 1$, et $\alpha = 0$, $\beta = -1$. Quant à l'équation (2), elle sera ici

$$4.3 = 3^2 + 3.1^2.$$

Et les deux membres de l'équation (I) seront, par conséquent,

$$f(3, -1) + f(-3, 1) \quad \text{et} \quad 2f(3, 1),$$

c'est-à-dire égaux entre eux.

Il est inutile d'essayer le nombre $m = 5$, pour lequel aucune de nos équations n'a lieu. Passons donc à l'entier $m = 7$, pour lequel on a respectivement

$$7 = (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2$$

et

$$4.7 = 1^2 + 3.3^2 = 5^2 + 3.1^2;$$

on trouvera cette fois encore que l'équation (I) est vérifiée, et l'on aura toujours une telle vérification, si loin qu'on veuille aller.