JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

Note au sujet du rapport précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 185-201.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__185_0>

Note au sujet du Rapport précédent;

Par M. Maximilien MARIE.

Le Rapport qu'on vient de lire est à peu près tel que je devais m'y attendre.

En exigeant en faveur du public la rectification par leurs auteurs d'erreurs maintenues pendant vingt ans, je ne devais pas compter sur leur reconnaissance.

J'ai, il y a vingt ans, ramené l'évaluation d'une intégrale prise entre des limites imaginaires à la quadrature de courbes liées, par des relations simples et remarquables, à la courbe réelle dont la fonction placée sous le signe sommatoire représentait l'ordonnée, de façon à rétablir, entre la Géométrie et l'Analyse, l'harmonie et le concours qui avaient si puissamment aidé aux progrès de l'une et de l'autre dans les deux derniers siècles, et qui venaient d'être rompus par M. Cauchy.

La théorie des intégrales doubles avait arrêté M. Cauchy et ses disciples; je l'ai établie du même coup et par des moyens aussi simples.

J'ai, peu de temps après, abordé, avec le même succès et par les mêmes moyens, la théorie des intégrales d'ordre quelconque.

En même temps que je donnais ainsi lieu de constater l'impuissance des méthodes de Cauchy, je proposais de substituer, à des énoncés d'où ne pouvait résulter que la vérification indirecte de faits déjà connus, des propositions de Géométrie pure, donnant la démonstration et l'explication de ces faits.

Par exemple, la théorie des périodes des intégrales simples résultait d'une extension du théorème d'Apollonius $\pi a'b'\sin\theta = \pi ab$ aux courbes de tous les ordres, et la théorie des périodes des intégrales doubles résultait aussi simplement d'une extension aux surfaces courbes de tous les ordres du théorème analogue relatif aux surfaces du second degré.

Le public pouvait ainsi constater que la nouvelle méthode était plus féconde que l'ancienne et fournissait des résultats plus saisissants.

La méthode de Cauchy était fondée sur une prétendue indétermination qui affecterait la marche de la fonction y dès que la variable x prendrait une valeur à laquelle pût correspondre une valeur multiple de y. J'ai montré, en 1861, dans le *Journal de Mathématiques*: 1° que, dans tous les cas, l'indétermination, si elle devait se produire, ne résulterait que du passage de y par sa valeur multiple, et non pas du passage de x par sa valeur correspondante, de sorte que, pour légitimer les précautions prises, il faudrait au moins s'assurer que la valeur de y dont on s'occupait serait devenue égale à une autre au moment où x atteindrait sa valeur critique; 2° qu'il était impossible d'admettre l'indétermination en question lorsque les dérivées des diverses valeurs égales de y se sépareraient, à un ordre plus ou moins élevé, car les valeurs de ces dérivées ne s'échangeraient pas brusquement entre elles; 3° que la prétendue indétermination n'existait pas davantage dans les autres cas, c'est-à-dire qu'on pouvait la faire disparaître en précisant davantage.

M. Cauchy et ses disciples avaient admis que la convergence de la série de Taylor serait limitée aux valeurs de la variable pour lesquelles la fonction prendrait des valeurs égales dont les dérivées se sépareraient à un certain ordre; que, par exemple,

$$y = (x - 1)\sqrt{x + 3}$$

ne pourrait se développer par la formule de Maclaurin que de $x = 0$ à $x = 1$.

J'ai montré, en 1861, dans le *Journal de Mathématiques*, que cette opinion non-seulement était erronée, car les valeurs de la dérivée, pour $x = 1$, étant différentes, il n'y avait pas à craindre qu'elles s'échangeassent, lorsqu'on dépasserait $x = 1$, mais qu'elle renversait même toute la théorie; car si la série qui représentait y de $x = 0$ à $x = 1$ devenait divergente au delà de $x = 1$, il en serait de même de la série qui représenterait $\frac{dy}{dx}$, de sorte que la fonction $\frac{dy}{dx}$ cesserait d'être développable au delà d'un point qui ne serait pas critique pour elle.

M. Cauchy et ses disciples, qui ne représentaient que la variable et n'avaient aucun moyen de suivre la marche de la fonction, avaient admis que le développement de la fonction serait arrêté par le point critique le plus proche du point origine. J'ai montré, en 1861, dans ce Journal, que cette opinion, inadmissible en principe, car toutes les fonctions qui présenteraient les mêmes points critiques se comporteraient assurément de façons différentes, était fausse en fait; car, pour qu'une valeur de x fût critique relativement à l'une des formes de la fonction y, il faudrait que cette forme de y pût atteindre la valeur critique de la fonction y, considérée dans l'ensemble de ses formes diverses, en même temps que x atteindrait sa valeur correspondante et sans que x eût dépassé cette valeur.

La question de la détermination du point d'arrêt, parmi les points critiques, se trouvant ainsi posée, je la résolvais, dans la même année 1861, relativement à divers exemples, dont l'un

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

comporte deux points critiques réels et deux imaginaires; ce à quoi nul n'avait songé dans l'école de Cauchy. Je résolvais d'ailleurs ces questions à l'aide d'une méthode pour suivre la marche de la fonction qui manquait jusque-là entièrement, M. Puiseux n'ayant proposé d'autre moyen pour traiter la question que de se servir de la série de Taylor elle-même, ce qui constituait à la fois un cercle vicieux, quant à la théorie, et une impossibilité quant à la pratique.

MM. Briot et Bouquet avaient tranché en quelques mots (un peu plus d'une page de leur livre) la question de la convergence du développement d'une fonction de plusieurs variables par la formule de Taylor, et proposé cette solution :

« Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables imaginaires x, y, z, finie, continue, monodrome et monogène, *quand* CHACUNE *des variables reste comprise dans une certaine portion du plan*. Donnons à x, y, z des accroissements h, k, l; la fonction $f(x+h, y+k, z+l)$ est finie, continue, monodrome et monogène, tant que les variables h, k, l restent comprises *respectivement* dans des cercles de rayons R, R′, R″ décrits des points x, y, z comme centres. On a donc

$$f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + \sum_1^\infty \frac{(h\,D_x f + k\,D_y f + l\,D_z f)^n}{1.2\ldots n},$$

série ordonnée suivant les puissances croissantes de h, k, l, et convergente dans les cercles de rayons R, R', R''. »

C'est-à-dire qu'il y aurait un cercle de convergence pour h, un cercle de convergence pour k, et un cercle de convergence pour l.

J'ai montré, en 1861, dans le *Journal de Mathématiques*, que cette théorie était inadmissible; qu'avant de traiter la question il eût fallu au moins la poser, car le même développement pourrait être convergent ou divergent, selon la manière dont on en grouperait les termes; que, si l'on considérait le développement d'une fonction de deux variables comme une série composée des groupes de termes homogènes par rapport à $(x - x_0)$ et à $(y - y_0)$, la question, déterminée dans ce cas, que semblaient avoir voulu envisager MM. Briot et Bouquet, n'admettrait pas, bien entendu, leur solution, qui d'ailleurs ne conviendrait à aucun autre; que la limite de la région de convergence dépendrait du rapport $\frac{y - y_0}{x - x_0}$; que, par exemple,

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

se développerait sans limites, pour x et y, par la formule de Maclaurin, si x et y étaient assujettis à la condition $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\sqrt{-1}$; enfin, que le lieu des points correspondant aux systèmes de valeurs de x et de y qui limiteraient la convergence ne serait autre que l'une des branches du contour apparent, par rapport au plan des x, y de la surface dont z serait la troisième coordonnée, branche qui d'ailleurs ne serait pas plus obligatoirement la plus voisine du point origine, que le point d'arrêt du développement d'une fonction d'une seule variable n'était le point critique le plus proche du point origine.

L'impuissance de l'école de Cauchy à aborder les questions relatives aux fonctions de plusieurs variables résultait déjà suffisamment d'un silence de vingt-cinq années; mais toutes les théories sont naturellement transformables les unes dans les autres, et celle que j'avais donnée des intégrales doubles et de leurs périodes pouvait être exploitée par un adversaire. Il fallait éviter ce danger. Je me décidai à effectuer moi-même la transformation.

Ce nouveau travail, qui parut en 1872 dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* me donna lieu d'abord de proposer, à la place de la démonstration donnée par Cauchy et fondée sur le calcul des variations, de ce principe que l'intégrale $\int_{x_0}^{x} y\,dx$ est généralement indépendante de la marche suivie par x de x_0 à x, une démonstration élémentaire capable de s'étendre à une intégrale d'ordre quelconque $\sum_n \mathrm{F}\,dx,\,dy,\,dz,\ldots$, condition que ne remplissait pas celle de Cauchy; en second lieu, de constater, dans la théorie de Cauchy, ce nouveau vice de méthode.

J'ai déjà dit que Cauchy et ses disciples posent avant tout en principe que les valeurs critiques doivent être interdites à la variable indépendante, sous peine, pour la fonction, de devenir indéterminée; c'est de cette nécessité que résultait pour Cauchy la convenance de ces petites évolutions autour des points critiques, qui feront peut-être encore quelque temps la joie des analystes, mais qui resteront éternellement ridicules aux yeux des géomètres.

Soient $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ le chemin suivi par x. Admettons avec Cauchy que la courbe $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ ne doive passer par aucun point critique.

Puisque β est devenu une fonction déterminée de α, la seule variable indépendante sera α; de sorte que, si $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, l'intégrale $\int y\,dx$ ne sera autre que

$$\sum (\alpha' + \beta'\sqrt{-1})\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)d\alpha,$$

ou

$$\int \alpha'\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)d\alpha + \sqrt{-1}\int \beta'\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)d\alpha,$$

α' et β' étant deux fonctions de α, définies par les trois équations

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0,$$
$$\varphi(\alpha, \beta) = 0;$$

mais, par malheur, les deux intégrales

$$\int \alpha'\left(1+\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)d\alpha \quad \text{et} \quad \int \beta'\left(1+\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)d\alpha,$$

prises le long d'un chemin fermé, propre à donner une période, seraient identiquement nulles séparément si $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ et $\frac{d\beta'}{d\alpha}$ ne prenaient pas, le long de ce chemin, des valeurs infinies, c'est-à-dire si α ne passait pas par quelques-unes de ses valeurs critiques.

De sorte que les précautions prises pour éviter une seule difficulté aboutissaient à la reproduire avec multiplication, mais en fermant alors les yeux pour ne plus l'apercevoir.

C'est dans ces conditions, c'est après avoir infligé cette série d'échecs à la méthode de mes adversaires, que j'allais me trouver en présence du principal d'entre eux au sujet de mon Mémoire de 1865, brûlé en 1870 chez M. Bertrand et refondu en 1872.

Je ne pouvais m'attendre à plus que de la justice.

Mais ai-je obtenu justice? Je ne le pense pas. Le public prononcera.

Toutefois, avant de répondre, je crois devoir extraire du Rapport les conclusions qui doivent avoir une influence utile, immédiatement réalisable, sur l'enseignement pratique.

Le Rapport consacre enfin cette affirmation, que j'ai produite il y a bientôt vingt ans, que les points multiples d'un lieu

$$f(x,y)=0,$$

où les dérivées de y, par rapport à x, finissent par se séparer, sans devenir infinies, ne sauraient arrêter le développement de la fonction y en série, suivant la formule de Taylor.

L'opinion contraire, professée depuis vingt-six ans, allait, il est vrai, recevoir une consécration officielle, déjà formulée dans une première édition du Rapport, mais enfin j'ai pu, avec l'aide d'un des Commissaires, faire rectifier l'erreur.

La consécration de ce premier point a une grande importance, parce que la théorie élémentaire de la série de Taylor pourra maintenant être ramenée à un degré extrême de simplicité et d'évidence, tandis que la démonstration de Cauchy, à cause des incohérences par-dessus lesquelles il fallait passer, présentait à l'esprit des difficultés vraiment infranchissables.

En effet, on ne pouvait admettre que la convergence de la série pût être arrêtée en un point multiple où les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, par exemple, seraient différentes, sans faire violence à la notion la plus élémentaire de la continuité; pour qu'une fonction varie d'une manière continue, il ne suffit pas, en effet, que ses valeurs n'éprouvent pas de variations brusques, il faut encore que toutes les dérivées de cette fonction, par rapport à la variable indépendante, varient aussi d'une manière continue.

Il n'y a pas continuité entre les branches de la courbe

$$y = x\sqrt{\frac{x-a}{x+a}},$$

qui se croisent à l'origine.

Il n'y a pas continuité entre deux arcs d'un cercle et d'une ellipse qui se raccordent par une tangente commune.

Il n'y a pas continuité entre deux arcs d'une ellipse et d'une parabole qui se raccordent par une tangente commune et une courbure commune au point commun.

Il n'y a pas continuité entre deux arcs de courbes distinctes qui ont même ellipse osculatrice au point où elles se raccordent, etc.

La démonstration de Cauchy était fondée sur cette observation que, si la série pouvait rester convergente au delà d'un point multiple, elle devrait fournir les ordonnées des différents arcs de la courbe qui émergeraient de ce point multiple. Mais la série n'aurait été astreinte à fournir ces diverses ordonnées que s'il y avait eu continuité entre elles, ce qui n'était pas.

Cauchy ni ses disciples ne s'étaient pas même fait cette objection bien simple, et qui eût dû les confondre, que si la série devenait divergente pour ne pas représenter les ordonnées des diverses branches de la courbe qui, partant du point multiple, s'éloigneraient du point origine, elle n'en aurait pas moins accompli auparavant le tour de force de fournir les ordonnées des branches qui seraient allées concourir à ce point multiple.

D'un autre côté, le mot *divergente* prenait un sens tout nouveau, il devenait synonyme de *capricante*.

La solution que j'ai donnée, en 1861, de ces difficultés, dans le *Journal de Mathématiques*, est bien simple : les valeurs supposées distinctes de la dérivée de la fonction ne pouvant pas s'échanger au delà du point multiple, les valeurs de la fonction ne s'échangeront pas non plus, et chaque valeur de la fonction ressortira sous le coefficient différentiel sous lequel elle sera entrée.

Ce principe étant enfin consacré, la théorie élémentaire de la série de Taylor pourra maintenant se réduire à ces quelques énoncés, assez évidents pour n'exiger aucune démonstration en règle.

1. Une série à termes imaginaires est la somme de la série des parties réelles de ses termes et du produit par $\sqrt{-1}$ de la série de leurs parties affectées du signe imaginaire.

Pour que la série proposée soit convergente, il faut que les deux séries qui la composent soient elles-mêmes convergentes.

2. Si le terme général de la série proposée est $a_n + b_n\sqrt{-1}$, il faut, pour que la série soit convergente, que a_n et b_n tendent séparément vers zéro, ce qui s'exprime par cette condition, en apparence simple, mais double en réalité, que $\sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$ tende vers zéro.

3. Si $\frac{a_n}{a_{n-p}}$ et $\frac{b_n}{b_{n-q}}$, p et q étant constants ou variables, mais finis, ont séparément des limites moindres que 1 en valeur absolue, la série est convergente; si l'une seulement des limites des rapports précédents dépasse 1 en valeur absolue, la série est divergente. Si l'un des rapports précédents a pour limite 1, la convergence est douteuse.

4. Si la série est ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable x, le module du terme général dépend du module de x, et tend vers zéro ou vers l'infini, suivant que le module de x est inférieur ou supérieur au module de la valeur de x qui satisfait à l'équation

$$\lim \frac{(a_n)^2 + (b_n)^2}{(a_{n-p})^2 + (b_{n-q})^2} = 1.$$

5. Le cas où la convergence est douteuse étant écarté, on obtiendrait, par rapport à x, l'intervalle dans lequel la série est convergente en résolvant l'équation

$$\lim \frac{(a_n)^2 + (b_n)^2}{(a_{n-p})^2 + (b_{n-q})^2} = 1.$$

Les valeurs de x, dont le module serait moindre que celui de la valeur trouvée, seront celles pour lesquelles la série sera convergente. La question, en ce qui concerne le développement d'une fonction implicite, est de trouver dans la discussion de l'équation $f(x,y) = 0$, qui définit cette fonction, les éléments de la détermination, par rapport à x, de la limite en question.

6. Si x_0 et y_0 sont les valeurs initiales de x et de y, et que y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$, ..., soient finies, y se confond, dans une étendue plus ou moins grande, avec

$$y_0 + \left(\frac{dx}{dy}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{12} + \ldots,$$

en ce sens que les deux lieux

$$f(x,y) = 0$$

et

$$y = y_0 + \left(\frac{dx}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \ldots$$

ont en $(x_0 y_0)$ un contact d'ordre infini, à l'intimité duquel aucune autre condition nouvelle ne saurait être ajoutée.

7. Si la valeur de y, que représentait la série lorsqu'elle était convergente, doit devenir infinie pour une certaine valeur x_1 de x, la série, pour continuer de représenter cette valeur de y, doit prendre des valeurs de plus en plus grandes lorsque x se rapproche de x_1, devenir infinie pour $x = x_1$, et être divergente pour toute valeur de x, telle que le module de $x - x_0$ surpasse celui de $x_1 - x_0$.

8. Mais il n'est pas nécessaire que la fonction y, représentée par la

série, doive devenir infinie pour une valeur x_1 de x pour que la série devienne divergente dès que le module de $x - x_0$ surpasserait celui de $x_1 - x_0$.

En effet une série, ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - x_0$, est convergente ou divergente en même temps que toutes ses dérivées et intégrales, puisque le rapport du module d'un terme au module du terme précédent ne change, dans la série dérivée ou dans la série intégrale, que dans le rapport des rangs de deux termes consécutifs, lequel tend vers 1.

9. La série doit donc être divergente pour toute valeur de x telle, que le module de $x - x_0$ surpasse celui de la différence entre x_0 et une valeur x_1, telle que l'une des dérivées de la fonction devienne infinie.

10. Une valeur de la variable, qui rend infinie une des valeurs de la fonction qui en dépend, rend en même temps infinies toutes les dérivées de cette forme de la fonction; mais les dérivées d'une fonction peuvent ne devenir infinies qu'à partir d'un ordre plus ou moins élevé.

11. Toutefois, comme la dérivée d'une fonction ne peut devenir infinie qu'autant que cette fonction prenne au moins deux valeurs égales, on obtiendra tous les points qui pourraient arrêter la convergence de la série en résolvant le système des deux équations

$$f(x, y) = 0,$$
$$\frac{df}{dy} = 0.$$

12. Pour reconnaître si une valeur de x, à laquelle correspondent p valeurs égales de y, peut être ou non considérée comme pouvant éventuellement former la limite de la région de convergence de la série, il faudra prendre les dérivées des p valeurs de y. Si ces p valeurs sont finies et inégales, la valeur de x ne sera pas critique. Si $p - q$, valeurs de $\frac{dy}{dx}$ se trouvent confondues, il faudra prendre les $p - q$ valeurs correspondantes de $\frac{d^2y}{dx^2}$; si ces $p - q$ valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont toutes finies et inégales, la valeur de x ne sera pas critique. Si $p - q - r$ valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ restent confondues, il faudra prendre les $p - q - r$ valeurs correspondantes de $\frac{d^3y}{dx^3}$; si ces $p - q - r$ valeurs de $\frac{d^3y}{dx^3}$ sont toutes finies et inégales, la valeur de x ne sera pas critique, et ainsi de suite. Si $p - q - r \ldots - t$ valeurs de $\frac{d^ny}{dx^n}$ deviennent infinies, les formes correspondantes de y ne seront pas développables au delà de la valeur considérée de x; mais celles dont les dérivées se seront déjà séparées le resteront. Quant à celles dont les dérivées de l'ordre n ne seraient pas devenues infinies, mais ne se seraient pas encore séparées, il faudra les dériver de nouveau, jusqu'à ce que l'on tombe finalement sur des dérivées distinctes ou infinies.

Tel est le degré de simplicité auquel peut être ramenée maintenant la théorie de la série de Taylor, en tant du moins qu'on écarte provisoirement la question de la détermination du point d'arrêt.

Avant d'aller plus loin, je rappellerai, à l'occasion de ce qui précède, ce que j'ai déjà dit, il y a douze ans, dans ce Journal, après avoir été averti du fait par M. Liouville, que MM. Lamarle et Tchebychef, envers qui les disciples de Cauchy n'ont pas été plus justes qu'envers moi, si du moins ils les avaient compris, m'avaient devancé dans mes observations relatives aux points multiples : M. Lamarle, en observant que, pour qu'un point dit *critique* pût être point d'arrêt, il faudrait au moins que les valeurs de y qui s'y confondraient pussent s'échanger dans un rayon infiniment petit; M. Tchebychef, en démontrant en quatre mots que la série ne pouvait devenir divergente qu'au delà d'un point où l'une des dérivées de la fonction deviendrait infinie.

Je prie maintenant qu'on me permette quelques observations sur le Rapport lui-même.

On a sans doute remarqué la démonstration, extraite de son propre Mémoire, que M. Puiseux donne dans ce Rapport, de ce fait que les points multiples du lieu $f(x, y) = 0$ où les dérivées des y par rapport à x finissent par se séparer, sans devenir infinies, ne doivent plus être considérés comme critiques.

Je connaissais cette contradiction, mais j'en avais tiré autrefois une conclusion bien différente de celle que la citation rétrospective que je signale semblerait destinée à suggérer : sachant que les valeurs d'une fonction qui pouvaient se permuter dans un rayon infiniment petit autour d'un point multiple étaient seulement celles dont les dérivées devenaient infinies au même ordre, j'en avais conclu que M. Puiseux s'était peut-être inutilement donné la peine d'établir la théorie de ces permutations, les groupes de racines qui devaient se permuter circulairement étant d'avance connus.

J'ai écrit, en effet, dans le tome VI, 2^e Série, du *Journal de Mathématiques :*

« Ainsi les formes de la fonction qui peuvent se permuter entre elles autour d'un point multiple sont celles dont les dérivées deviennent infinies au même ordre, après être restées confondues jusqu'à l'ordre précédent.

» Ce sont là sans doute les groupes circulaires que le calcul direct avait révélés à M. Puiseux ; en les définissant comme on vient de le faire, il devient superflu de les déterminer à l'avance : on les retrouvera toujours sans difficulté. »

Je passe à la seconde partie du Rapport.

Voici d'abord les termes dont je me suis servi dans le préambule de mon Mémoire :

« J'ai établi en même temps l'inexactitude de la règle donnée par Cauchy et adoptée depuis *explicitement* ou *implicitement* par tous les géomètres qui ont écrit sur la matière, d'après laquelle le cercle de convergence passerait par le point critique le plus voisin du point origine. »

Il semble que non-seulement cette assertion n'avait rien de blessant pour personne, mais que même j'étais resté dans les limites d'une extrême circonspection en ne désignant en particulier aucun des géomètres qui m'avaient précédé, comme s'étant exprimé sur le point en question d'une façon absolument explicite. D'ailleurs je ne faisais que rappeler un fait de notoriété publique et qui n'eût donné lieu de ma part à aucune insistance, si le Rapport n'avait pas jeté un certain doute sur leur exactitude.

Mais, puisqu'on m'y oblige, j'apporterai les preuves de ce que j'ai avancé. Elles m'étaient bien connues, puisque j'ai pu citer de mémoire les textes à M. Puiseux avant de les lui montrer imprimés.

M. Puiseux dit, à la page 378 du tome XV, 1850, du *Journal de Mathématiques* :

« L'existence de ce développement une fois démontrée, on pourra en calculer les coefficients par le théorème de Taylor, qui donnera

$$\varphi(\gamma) = \varphi(c) + \frac{\varphi'(c)}{1}(\gamma - c) + \frac{\varphi''(c)}{1.2}(\gamma - c)^2 + \ldots.$$

On a, dans cette équation,

$$\varphi(c) = b_1.$$

Si, de plus, on appelle $F_1(u, z)$, $F_2(u, z)$,... les valeurs de $1\,\frac{du}{dz}$, $1.2\,\frac{d^2u}{dz^2}$,..., tirées des équations

$$\frac{df}{du}\,\frac{du}{dz} + \frac{df}{dz} = 0,$$

$$\frac{df}{du}\,\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2f}{du^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + 2\,\frac{d^2f}{du\,dz}\,\frac{du}{dz} + \frac{d^2f}{dz^2} + \ldots = 0,$$

les quantités $\frac{\varphi'(c)}{1}$, $\frac{\varphi''(c)}{1.2}$,... auront pour valeurs $F_1(b_1, c)$, $F_2(b_1, c)$,..., et il en résultera

$$\text{(F)} \qquad \varphi(\gamma) = b_1 + F_1(b_1, c)(\gamma - c) + F_2(b_1, c)(\gamma - c)^2 + \ldots.$$

» On voit clairement, par ce qui précède, quelle est celle des racines de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

dont la formule (F) donne le développement ; la série qui en est le second membre fournit la valeur pour $z = \gamma$ de celle des racines qui, se réduisant à b_1 pour $z = c$, varie d'une manière continue avec z, en supposant que le point Z aille de C en Γ, sans sortir du cercle σ, c'est-à-dire en supposant que la distance CZ reste toujours moindre que la plus petite des distances CA, CA′, CA″,....

» *La formule ne peut s'appliquer qu'aux valeurs de γ telles, que le* *module de $\gamma - c$ soit inférieur à cette plus petite distance; la notation $\varphi(\gamma)$ n'a même un sens déterminé qu'à cette condition.* »

J'aime trop la justice pour ne pas proclamer moi-même que tout ce passage est écrit d'un style ferme, net, clair, correct, précis, élégant même, et qu'il faudrait être mal intentionné pour y trouver le moindre vice de rédaction.

Quant à l'exemple auquel M. Puiseux fait allusion, le voici :

Il s'agit de la fonction y définie par l'équation

$$y^3 - 3y + x = 0$$

avec la valeur initiale $y_0 = -2$ correspondant à $x_0 = +2$. M. Puiseux dit que la fonction y pourra se développer de $x = +2$ à $x = -2$.

Cet exemple ne prouve rien, parce que, la valeur initiale de la variable étant une valeur critique et la valeur correspondante de la fonction une valeur finie et simple, il était certain d'avance que, si la variable revenait à sa valeur critique initiale, sans avoir atteint et dépassé l'autre valeur critique, la fonction reviendrait à sa valeur initiale.

Si la valeur initiale choisie avait été infiniment peu différente de la valeur critique considérée, M. Puiseux, en vertu du théorème général qu'il avait établi, aurait dû conclure à un rayon de convergence infiniment petit. Cette conclusion eût sans doute été absurde comme contraire à la notion de continuité; mais qu'y puis-je faire? M. Puiseux, en admettant les points multiples au nombre des points critiques, n'avait-il pas déjà démontré que la notion de continuité n'a rien à voir avec les théories de Cauchy?

Quant à MM. Briot et Bouquet, voici l'énoncé qu'ils donnent, page 26 de leur Ouvrage, du théorème de Cauchy.

« Pour qu'une fonction soit développable en une série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de la variable, et convergente dans un cercle décrit de l'origine comme centre, *il est nécessaire* et il suffit que la fonction soit synectique, c'est-à-dire soit finie, continue, monodrome et monogène, dans ce même cercle. »

Pour rendre leur idée encore plus claire, MM. Briot et Bouquet ajoutent, page 29 :

« Soit la fonction irrationnelle

$$\sqrt{1+z}$$

comptée à partir de $z = 0$ avec la valeur initiale $+1$. Nous avons vu que cette fonction cesse d'être monodrome quand on tourne autour du point $z = -1$; elle sera donc développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de z, dans le cercle décrit de l'origine comme centre, avec un rayon égal à l'unité.

» Il en sera de même d'une fonction implicite u définie par une équation algébrique entre u et z et comptée à partir du point z (probablement z_0) avec la valeur initiale u_0. Si du point z_0 comme centre, *avec un rayon égal à la distance au point le plus proche pour lequel l'équation a des racines égales, et la fonction cesse d'être monodrome*, on décrit un cercle, la fonction sera développable dans ce cercle en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $z - z_0$. »

Le sens de ce passage est bien clair : MM. Briot et Bouquet ont voulu dire que la fonction qui partirait de la valeur u_0 correspondant à z_0 serait développable dans le cercle dont la circonférence passerait par le point critique du lieu le plus proche du point z_0. C'est là évidemment ce que tout le monde comprendra en lisant leur énoncé, et, en fait, ce que tout le monde a compris jusqu'à ce jour.

Mais MM. Briot et Bouquet veulent que ce ne soit pas là le sens de leur énoncé. Ils disent : ce que nous appelons la *fonction*, aussi bien dans la première partie de l'énoncé que dans la seconde, c'est la valeur de la fonction multiple u qui est partie de la valeur u_0 correspondant à $z = z_0$, et qui a varié d'une manière continue avec z.

Mais, d'abord, il est évident que, dans l'hypothèse qu'ils veulent faire admettre, MM. Briot et Bouquet eussent formulé leur première phrase en ces termes : pour qu'une fonction soit développable, etc., il est nécessaire et il suffit que *cette* fonction, etc.; ils n'auraient pas dit : il est nécessaire et il suffit que *la* fonction, etc.

En second lieu, comment MM. Briot et Bouquet interpréteraient-ils, dans la même hypothèse, les mots : si du point z_0 comme centre, avec un rayon égal à la distance au point le plus proche *pour lequel l'équa-*

tion a des racines égales, etc.? Il ne s'agit plus là de la valeur de la fonction qui est partie de la valeur u_0.

Mais ces contradictions ne sont rien encore : dans l'hypothèse que voudraient faire admettre MM. Briot et Bouquet, leur énoncé n'aurait plus que ce sens : « Dès que la fonction qui est partie de la valeur u_0 aura pu prendre deux valeurs distinctes, elle ne sera plus représentée par la série, qui n'en a qu'une ». MM. Briot et Bouquet auraient-ils écrit vingt-neuf pages pour aboutir à ce résultat?

Enfin quel non-sens n'eût-ce pas été, en 1859, de parler du premier point où la fonction partie de u_0 aurait pu prendre deux valeurs, quand on ne pouvait suivre les variations de cette fonction, dans un intervalle si restreint qu'on le supposât.

Je passe à la troisième partie du Rapport.

Je ne m'arrête pas à cette phrase : « On voit aisément que le problème se ramène à celui-ci : Etant donnés deux points A et B, etc. ». Je remercie M. Puiseux de vouloir bien constater que j'ai démontré le fait assez clairement pour m'être fait comprendre.

Je laisse aussi de côté cette insinuation, que je ne me serais attaqué qu'à *des équations d'une simplicité exceptionnelle.* L'équation du folium $y^3 - 3axy + x^3 = 0$ suffisait amplement pour montrer que la méthode proposée par moi existait réellement, et il faudrait avoir beaucoup de temps à perdre pour s'amuser à en traiter de plus compliquées.

Je ne dirai rien non plus de cette opinion du rapporteur, que la solution du problème dépasse les forces actuelles de l'Analyse, alors qu'elle a été ramenée à la discussion de courbes algébriques.

J'arrive à la plus grave des questions que soulève le Rapport.

C'est en 1861 que j'ai développé, dans le *Journal de Mathématiques,* ma méthode pour déterminer le point d'arrêt parmi les points critiques. C'est en 1861 que j'ai appliqué cette méthode à l'équation du folium. Depuis 1861, MM. Briot et Bouquet, c'était leur droit, ont essayé de résoudre la même question; ils y ont réussi, à ce qu'il paraît. La solution qu'ils vont proposer est déjà imprimée, en ce sens qu'ils l'ont en *épreuves;* elle sera exacte, je l'admets sans difficulté. Sera-t-elle meilleure que la mienne? C'est ce que le public pourra voir quand elle lui sera offerte; mais devait-elle être mise en parallèle avec la mienne? Le rapporteur de la Commission chargée d'examiner mon Mémoire ne devait-il pas se borner à constater le progrès accompli par moi.

M. Puiseux dit : « Pour justifier notre manière de voir, il faudrait entrer dans des développements qui donneraient à ce Rapport une étendue exagérée ». L'Académie pensera, je n'en doute pas, qu'*avant de lui soumettre les conclusions de son Rapport, M. Puiseux eût dû poser la question dans des termes moins équivoques, et qu'il eût peut-être bien fait de s'abstenir provisoirement de développements qui trouveront mieux leur emploi lorsque MM. Briot et Bouquet auront publié la méthode qu'ils ont imaginée.*

Quant à l'aide du mode de représentation ordinaire de la variable x prétendue, on comprendra parfaitement que, pour résoudre une question de l'ordre de celle dont il s'agit, il faut une méthode, et que cette méthode ne peut pas plus consister à porter $b\sqrt{-1}$ perpendiculairement à a, qu'à le porter à la suite, ou sous toute autre inclinaison; en d'autres termes, qu'un mode de représentation ne constitue pas un moyen de solution.

Il n'existait jusqu'ici que deux méthodes pour suivre la marche continue d'une fonction : celle qu'on peut tirer de la proposition faite autrefois par M. Puiseux, de se servir pour cela du développement même de la fonction par la série de Taylor, et celle que j'avais adaptée à la recherche du point d'arrêt, laquelle était soumise à l'Académie.

Il en existe maintenant paraît-il une troisième, celle que MM. Briot et Bouquet vont publier.

M. Puiseux s'est fait expliquer cette troisième méthode, il en avait sans doute le droit, mais devait-il la faire entrer en balance? devait-il proposer à la sanction de l'Académie un jugement contradictoire entre les deux méthodes? devait-il laisser ignorer à l'Académie qu'il visait *in petto* une méthode encore inconnue? devait-il enfin laisser supposer que, pour faire ce que j'avais fait, il pût suffire de *l'aide du mode de représentation ordinaire de la variable x?*

Je crois que l'Académie informée ne le pensera pas.