JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Note relative à la détermination du nombre des points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 212-219.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__212_0>

Note relative à la détermination du nombre des points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie;

Par M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, séance du 20 janvier 1873.)

Les équations de deux courbes, de degrés p et p', étant

$$(x^m, y^n)^p = 0 \quad \text{et} \quad (x^{m'}, y^{n'})^{p'} = 0,$$

le nombre de leurs points communs situés à distance finie est

$$pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n') - \omega \text{ [*]},$$

ω étant le nombre des points communs aux deux courbes qui se trouvent sur la droite de l'infini, autres que ceux qui, situés sur cette droite et sur les axes des coordonnées, sont représentés par les deux termes $(p-m)(p'-m')$, $(p-n)(p'-n')$. Cela résulte de ce que *le nombre total des points (réels ou imaginaires) communs à deux courbes d'ordre* p *et* p' *est toujours* pp'. En donnant une première démonstration de ce théorème par le principe de correspondance, j'ai annoncé que le même raisonnement se prêtait à une seconde démonstration. C'est celle-ci qui fait le sujet de la présente Note. Cette démonstration, extrêmement simple, repose sur une seule propriété des courbes géométriques, savoir : que le nombre des tangentes, réelles ou imaginaires, qu'on peut mener par un point à une courbe, est constant, quel que

[*] *Comptes rendus*, t. LXXV, p. 736; séance du 30 septembre 1872. — Page 739, ligne 15, *au lieu de* lequel pourra être un contact, *lisez* soit que le contact ait lieu.

soit le point; ce qui est évident, puisque la recherche de ce nombre est un problème déterminé.

Théorème. — *Le nombre des points communs à deux courbes d'ordre* p *et* p′ *est* pp′.

Démonstration. — Une droite IX, tournant autour d'un point I, rencontre la première courbe en p points α; par chacun de ces points, on mène les tangentes de la seconde courbe, qui (réelles ou imaginaires) sont en nombre constant q', ce qui fait pq' tangentes; et par leurs points de contact α', on mène pq' droites IU : ces pq' droites correspondent à la droite IX. A une droite IU correspondent pp' droites IX; car cette droite IU rencontre la seconde courbe en p' points α', et les tangentes en ces points coupent la première courbe en $p'p$ points α, par lesquels passent les $p'p$ droites IX correspondant à IU. Il existe donc $pq' + pp'$ droites IX coïncidant chacune avec une droite correspondante IU. pq' de ces droites coïncident avec les q' tangentes de la seconde courbe, qu'on peut mener par le point I; et les pp' autres sont les droites qui passent par les points d'intersection des deux courbes. Donc ces points d'intersection sont en nombre pp'. Ce qu'il fallait démontrer.

Observation. — Au lieu des tangentes, que l'on suppose menées de chaque point de la première courbe à la seconde, on peut se servir des normales : le raisonnement et la conclusion sont les mêmes. On dira : Une droite IX rencontre la première courbe en p points α, de chacun desquels on mène les normales de la seconde courbe, en nombre constant q', ce qui fait pq' normales; par leurs pieds, on mène pq' droites IU. Une droite IU, menée arbitrairement, coupe la seconde courbe en p' points, et les normales en ces points rencontrent la première courbe en $p'p$ points, par lesquels passent $p'p$ droites IX. Il existe donc $pp' + pq'$ droites IX qui coïncident chacune avec une droite correspondante IU. De ces coïncidences, pq' ont lieu sur les q' normales de la seconde courbe menées par le point I : ce sont des solutions étrangères, et chacune des pp' autres coïncidences a lieu quand une droite IX passe par un point commun aux deux courbes, car ce point est le pied d'une normale à la seconde courbe. Le théorème est donc démontré.

Il serait rare de trouver un pareil exemple de l'usage des tangentes ou des normales, indifféremment, dans une même démonstration.

On conçoit que le principe de correspondance s'applique avec la même facilité à la démonstration du théorème corrélatif, savoir : que le nombre des tangentes communes à deux courbes de la classe n, n', respectivement, est nn'.

Démonstration. — D'un point x d'une droite L on mène n tangentes à la première courbe; puis, de leurs points de contact, nn' tangentes à la deuxième courbe, lesquelles coupent L en nn' points u. D'un point u de L on mène n' tangentes à la deuxième courbe, lesquelles rencontrent la première courbe en $n'm$ points; les tangentes en ces points coupent L en $n'm$ points x. Il existe donc $nn' + n'm$ points x qui coïncident chacun avec un point u correspondant. $n'm$ de ces points coïncident avec les m points de la première courbe situés sur L. Les nn' autres appartiennent à nn' tangentes communes aux deux courbes. Donc, etc.

Le même raisonnement convient pour démontrer que deux courbes U_m^n, $U_{m'}^{n'}$ admettent $(m+n)(m'+n')$ normales communes; ou bien que $n(m'+n')$ tangentes de la première courbe sont normales à la seconde.

Je vais donner quelques exemples de contacts d'*ordre supérieur* en des points de l'infini, exemples que l'on ne rencontre guère, je crois, dans les Traités de Géométrie analytique, ainsi que dans les applications de la Théorie de l'Élimination, que pour des contacts simples.

La tangente au point de contact des deux courbes, supposé à l'infini, peut avoir quatre positions différentes qu'il y a lieu de distinguer. Elle sera un des axes coordonnés, ou parallèle à un de ces axes, ou aura une direction quelconque, ou enfin elle sera la droite de l'infini. Ce dernier cas se subdivise, relativement à la position du point de contact, qui peut être sur un axe coordonné ou dans une direction quelconque.

I.
$$\begin{aligned} &ax^2y + bxy + cx + ey^2x + fy^2 = 0,\\ &ax^2y + bxy + cx + e'y^2x + f'y^2 = 0. \end{aligned}$$

Faisant
$$pp' - (p-m)(p'-m') - (p-n)(p'-n') = \mathrm{N},$$

on a ici

$$N = 9 - 1 - 1 = 7.$$

Les deux courbes sont tangentes à l'axe Ox en son point de l'infini, et ont en ce point un contact du troisième ordre; donc $\omega = 3$, et $N - \omega = 4$. Ainsi les courbes ont quatre points communs à distance finie : deux de ces points coïncident en O, où les courbes sont tangentes à l'axe Oy; les deux autres sont sur la droite $(e - e')x + f - f' = 0$.

$$\text{I}'. \quad \begin{aligned} &ay^3x + cy^2x + fy^2 + bx^2y^2 + ex^2y + gxy + hx^2 = 0, \\ &ay^3x + cy^2x + fy^2 + b'x^2y^2 + e'x^2y + g'xy + h'x^2 = 0. \end{aligned}$$

$N = 16 - 1 - 4 = 11$. Les deux courbes sont tangentes à l'axe Oy à l'infini, et ont en ce point un contact du troisième ordre, ce qui leur fait trois points à l'infini, outre celui qui a été compté dans la valeur de N. Ainsi $\omega = 3$ et $N - \omega = 8$. Les courbes ont donc huit points communs à distance finie. Quatre de ces points coïncident à l'origine des coordonnées, où les deux courbes ont chacune un point double. Les quatre autres sont déterminés par une équation du quatrième degré en y, qu'on obtient ainsi : des deux équations soustraites l'une de l'autre, puis divisées par xy, on tire une expression de x en fonction de y, qui, mise dans une des équations, donne l'équation finale du quatrième degré.

$$\text{II}. \quad \begin{aligned} &ay^2x + by^2 + cy + ex^2y + fx^2 + gxy + hx = 0, \\ &a'y^2x + b'y^2 + c'y + ex^2y + fx^2 + gxy + hx = 0. \end{aligned}$$

$N = 9 - 1 - 1 = 7$. Les deux courbes ont un contact du second ordre au point de l'infini sur Ox; leur tangente en ce point est la droite $y = -\frac{f}{e}$; on a donc $\omega = 2$ et $N - \omega = 5$. Ainsi les courbes ont cinq points communs à distance finie. L'un de ces points est à l'origine des coordonnées. Les quatre autres sont déterminés par une équation finale en x ou en y, qu'on obtient sans difficulté; car des deux équations proposées on tire celle-ci :

$$(a - a')yx + (b - b')y + (c - c') = 0,$$

et la valeur de x ou de y tirée de cette équation et mise dans l'une des deux premières donne une équation du quatrième degré.

II'. $$ax^3y + bx^2y^2 + cx^2 + ex^2y + fy^2x + gy^2 + hyx = 0,$$
$$ax^3y + bx^2y^2 + cx^2 + ex^2y + f'y^2x + g'y^2 + h'yx = 0.$$

$N = 16 - 1 - 4 = 11$. Les courbes ont à l'infini chacune un point double sur l'axe Oy, et un point simple sur l'axe Ox; donc $N = 16 - 4 - 1 = 11$. Mais ce point sur l'axe Ox est un contact du second ordre dont la tangente a pour équation $y = -\frac{c}{a}$, ce qui fait deux points de plus à l'infini. Enfin les deux courbes ont en outre un point d'intersection à l'infini dans la direction de la droite $y = -\frac{a}{b}x$. On a donc $\omega = 2 + 1 = 3$ et $N - 3 = 8$. Ainsi les deux courbes ont huit points communs à distance finie. Cinq de ces points coïncident à l'origine des coordonnées où les deux courbes ont chacune un point double, dont une branche de chacune est tangente à l'axe Ox. Les trois autres points communs aux deux courbes sont déterminés par une équation finale en x ou en y du troisième degré. En effet, des deux équations proposées, soustraites l'une de l'autre, on tire celle-ci :

$$(f - f')yx + (g - g')y + (h - h')x = 0,$$

et l'élimination de x ou de y entre cette équation et l'une des premières conduit à l'équation du troisième degré.

III. $$9x^4 - x^2y^2 - xy^2 - 3xy + y^2 = 0,$$
$$9x^4 - x^2y^2 + 9x^3 - 6x^2y - 18x^2 + 2y^2 = 0.$$

$N = 16 - 2.2 = 12$. Les deux courbes ont un contact du second ordre en un point de l'infini, situé dans la direction de la droite $y = 3x$ $\left(\text{leur tangente en ce point ayant pour équation } y = 3x - \frac{3}{2}\right)$. Donc $\omega = 3$ et $N - \omega = 9$. Ainsi les deux courbes ont neuf points communs à distance finie. Cinq coïncident à l'origine O, où les deux courbes ont chacune un point double, dont deux branches ont une tangente commune. Les quatre autres points communs aux deux courbes sont déterminés par une équation finale en x du quatrième degré, qu'on obtient en retranchant les deux équations l'une de l'autre, d'où l'on conclut $y = \frac{3x(x-2)}{(x+1)}$; cette valeur de y, mise dans une des équations, la réduit au quatrième degré en x.

III'. $$5x^3 - 6x^2y + xy^2 + 5x^2 - 4xy + y^2 + 3y = 0.$$
$$5x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$$

$N = 6$. Les deux courbes ont deux points communs à l'infini; l'un, dans la direction de la droite $y = 5x$, est un point d'intersection; et l'autre, dans la direction de la droite $y = x$, est un point de contact du second ordre, dont la tangente a pour équation $y = x + \frac{1}{2}$, ce qui fait quatre points communs à l'infini; donc $\omega = 4$ et $N - \omega = 2$. Ainsi les deux courbes ont deux points communs à distance finie. On trouve sans difficulté que ces points ont pour coordonnées $x = -\frac{3}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$, et $x = -\frac{9}{7}$, $y = -\frac{30}{7}$.

IV. $$ax^2y^2 + bxy^2 + ey^3 + cx^2y + fx^2 + gxy + hy = 0,$$
$$ax^2y^2 + bxy^2 + ey^3 + c'x^2y + f'x^2 + g'xy + h'y = 0.$$

$N = 16 - 4 - 1 = 11$. Ces courbes sont tangentes à la droite de l'infini à l'extrémité de l'axe Oy, et ont en ce point un contact du troisième ordre, ce qui leur fait trois points communs, outre celui qui se trouve compris dans la valeur de N. Ainsi $\omega = 3$, et $N - \omega = 8$. Les courbes ont donc huit points communs à distance finie. Quatre de ces points coïncident à l'origine des coordonnées où les deux courbes ont chacune un point double. Les quatre autres sont déterminés par une équation finale du quatrième degré en x, qui s'obtient sans difficulté. Les deux équations étant soustraites l'une de l'autre, il en résulte une équation où y n'entre qu'au premier degré, et dont la valeur, mise dans l'une des deux proposées, donne l'équation du quatrième degré en x.

IV'. $$ay^2x^2 + byx^2 + cx^3 + ey^2x + fy^2 + gyx + hx^2 = 0,$$
$$ay^2x + byx + cx^2 + g'y + h'x = 0.$$

$N = 12 - 1 - 2 = 9$. Les deux courbes sont tangentes à la droite de l'infini à l'extrémité de l'axe Ox, et ont en ce point un contact du troisième ordre; ce qui leur fait trois points communs, outre celui qui entre dans la valeur de N : ainsi $\omega = 3$ et $N - \omega = 6$. Les courbes ont donc six points communs à distance finie. Deux de ces points sont à l'origine des coordonnées, où la première courbe a un point double. Les quatre autres se peuvent déterminer par une équation du quatrième degré en $\left(\frac{y}{x}\right)$, dont les racines α exprimeront les directions des droites $y = \alpha x$, qui, partant de l'origine O, passent par les quatre points. En effet, la seconde équation étant multipliée par x et soustraite de la première, on a

$$ey^2x + fy^2 + (g - g')xy + (h - h')x^2,$$
$$e\frac{y^2}{x^2}x + f\frac{y^2}{x^2} + (g - g')\frac{y}{x} + (h - h') = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{x} = -\frac{e\frac{y^2}{x^2}}{f\frac{y^2}{x^2} + (g - g')\frac{y}{x} + (h - h')}.$$

Cette valeur de $\frac{1}{x}$, mise dans la première équation, divisée d'abord par x^4 et écrite ainsi :

$$a\frac{y^2}{x^2} + \left(e\frac{y^2}{x^2} + b\frac{y}{x} + c\right)\frac{1}{x} + \left(f\frac{y^2}{x^2} + g\frac{y}{x} + h\right)\frac{1}{x^2} = 0,$$

la transforme en une équation du quatrième degré en $\frac{y}{x}$, dont les racines déterminent les quatre points communs aux deux courbes

V. $$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dx^2 + exy + fx + gy = 0,$$
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f' = 0,$$

où l'on a

$$b^2 - 4ac^2 = 0.$$

$N = 6$. Les deux courbes ont un point commun à l'infini, dans la direction de la droite $y = -\frac{b}{2c}x$; elles sont tangentes en ce point à la droite de l'infini, et ont entre elles un contact du troisième ordre; donc $\omega = 4$ et $N - \omega = 2$. Ainsi les courbes ont deux points communs à distance finie. Et, en effet, ces points sont accusés par l'équation

$$(f - f')x + gy = 0,$$

qu'on tire des deux proposées.

V'. $$\begin{aligned} x^3 + 2x^2y + xy^2 - x^2 - 4xy - 2x - 3y &= 0, \\ x^3 + 2x^2y + xy^2 - x^2 - 4xy - 3x - y &= 0. \end{aligned}$$

$N = 9 - 1 = 8$. Ces deux courbes sont tangentes, à la droite de l'infini, au point situé dans la direction $y = x$, et ont en ce point un contact du troisième ordre. En outre, elles sont tangentes à l'axe Oy au point de l'infini; on a donc $\omega = 4 + 1 = 5$ et $N = 8 - 5 = 3$. Ainsi les deux courbes ont trois points communs à distance finie. L'un de ces points est à l'origine des coordonnées, les deux autres sont sur la droite $2y - 5x = 0$.

Observation. — On facilite les calculs relatifs à des contacts d'ordre supérieur en des points de l'infini, en les ramenant à des contacts de même ordre à des distances finies, par une transformation homographique. Les formules les plus simples sont celles-ci :

$$x = \frac{1}{y'}, \quad y = \frac{x'}{y'}, \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'},$$

par lesquelles la droite de l'infini devient un des axes coordonnés.