JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. DARBOUX

Sur l'intégration de l'équation $dx^2 + dy^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 236-240.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__236_0>

Sur l'intégration de l'équation $dx^2 + dy^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues;

Par M. G. DARBOUX.

Euler a, comme on sait, intégré le premier l'équation

$$(1)\qquad dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

c'est-à-dire qu'il a donné en fonction d'un paramètre arbitraire les expressions les plus générales de x, y, s satisfaisant à cette équation et débarrassées de tout signe d'intégration. Je me propose d'indiquer, dans cette Note, un moyen nouveau de parvenir aux formules d'Euler et d'intégrer quelques équations du même genre que la précédente.

Remplaçons dans l'équation (1) s par $z\sqrt{-1}$, elle deviendra

$$(2)\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Si l'on y regarde x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace, l'équation (2) représente toutes les courbes gauches imaginaires dont l'arc compris entre deux points quelconques est nul. On obtient de la manière suivante les équations finies de ces courbes.

Soit

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation de leur plan osculateur. Les expressions connues de A, B, C permettent de vérifier sans peine que, pour les courbes satisfaisant à l'équation (2), on a

$$(3)\qquad A^2 + B^2 + C^2 = 0,$$

et de cette remarque résulte la solution suivante :

L'équation

$$\Phi = Ax + By + Cz + D = 0,$$

où A, B, C, D sont des fonctions d'un paramètre arbitraire, assujetties seulement à vérifier la relation (3), représente un plan variable qui enveloppe une surface développable. L'arête de rebroussement de cette développable est la courbe cherchée. On aura donc, pour tous les points de cette courbe,

$$\Phi = 0, \quad d\Phi = 0, \quad d^2\Phi = 0,$$

et de ces trois équations on déduira x, y, z en fonction de A, B,... et de leurs dérivées.

Prenons, par exemple, Φ sous la forme

$$x\cos\theta + y\sin\theta - z\sqrt{-1} + f(\theta),$$

et remplaçons $z\sqrt{-1}$ par s; nous aurons

$$\begin{aligned} x\cos\theta + y\sin\theta - s + f(\theta) &= 0, \\ -x\sin\theta + y\cos\theta + f'(\theta) &= 0, \\ -x\cos\theta - y\sin\theta + f''(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Ce sont précisément les formules d'Euler.

La méthode précédente ne s'applique pas, comme je l'avais cru d'abord, à l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

qui a été résolue d'une manière très-élégante par M. J.-A. Serret (t. XIII de ce Journal, 1re série). Nous reviendrons plus loin sur cette équation.

Soit maintenant à intégrer de la même manière l'équation différentielle

$$(4) \qquad dx^2 + dy^2 = dx_1^2 + dy_1^2,$$

c'est-à-dire qu'il s'agit de trouver deux courbes planes se correspondant point par point, de manière que les arcs correspondants soient égaux. On pourra poser

$$\begin{aligned} d(x + y\sqrt{-1}) &= e^{\omega\sqrt{-1}}d(x_1 + y_1\sqrt{-1}), \\ d(x - y\sqrt{-1}) &= e^{-\omega\sqrt{-1}}d(x_1 - y_1\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

Conservons seulement la première de ces équations en supposant ω

réel, car la seconde s'en déduira par le changement de signe de $\sqrt{-1}$. On l'intègre par les formules

$$x+y\sqrt{-1}=e^{\omega\sqrt{-1}}(x_1+y_1\sqrt{-1})+\alpha+\beta\sqrt{-1},$$
$$o=e^{\omega\sqrt{-1}}d\omega\sqrt{-1}(x_1+y_1\sqrt{-1})+d\alpha+d\beta\sqrt{-1}.$$

En séparant les parties réelles et les parties imaginaires, nous trouvons

$$x_1=\frac{d\alpha}{d\omega}\sin\omega-\frac{d\beta}{d\omega}\cos\omega,\quad x=\alpha-\frac{d\beta}{d\omega},$$
$$y_1=\frac{d\alpha}{d\omega}\cos\omega+\frac{d\beta}{d\omega}\sin\omega,\quad y=\beta+\frac{d\alpha}{d\omega}.$$

C'est la solution que fournit la théorie du déplacement d'une figure dans le plan.

Considérons maintenant l'équation plus générale

$$(5)\qquad dx^2+dy^2+dz^2=dx_1^2+dy_1^2+dz_1^2.$$

On pourra poser

$$(6)\qquad \begin{cases} dx=a\,dx_1+a'dy_1+a''dz_1,\\ dy=b\,dx_1+b'dy_1+b''dz_1,\\ dz=c\,dx_1+c'dy_1+c''dz_1,\end{cases}$$

$a, b, c, a', \ldots$ étant des fonctions d'un paramètre t liées par les relations connues

$$(7)\qquad \begin{cases} a^2+b^2+c^2=1,\quad aa'+bb'+cc'=o,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Les équations (6) s'intègrent de la manière suivante. Posons

$$(8)\qquad \begin{cases} x=ax_1+a'y_1+a''z_1+\alpha,\\ y=bx_1+b'y_1+b''z_1+\beta,\\ z=cx_1+c'y_1+c''z_1+\gamma.\end{cases}$$

Différentions en tenant compte du système (6); nous aurons

$$(9)\qquad \begin{cases} o=x_1\,da+y_1\,da'+z_1\,da''+d\alpha,\\ o=x_1\,db+y_1\,db'+z_1\,db''+d\beta,\\ o=x_1\,dc+y_1\,dc'+z_1\,dc''+d\gamma.\end{cases}$$

Les neuf quantités a, b, c s'expriment en fonction de trois angles. Le système (9) donnera x_1, y_1, z_1 en fonction de ces angles, de α, β, γ et de leurs dérivées. Ensuite le système (8) fera connaître x, y, z. On voit que la solution contiendra six fonctions arbitraires de t et leurs dérivées du premier ordre seulement.

Le procédé précédent s'applique sans difficulté à l'équation intégrée par M. Serret

$$(10) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

On posera

$$(11) \qquad \begin{cases} x = as + \alpha, & y = bs + \beta, & z = cs + \gamma, \\ 0 = s\,da + d\alpha, & 0 = s\,db + d\beta, & 0 = s\,dc + d\gamma, \end{cases}$$

et l'on aura ainsi la solution générale de l'équation, pourvu que les fonctions a, b, c, α, β, γ satisfassent aux équations

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad \frac{d\alpha}{da} = \frac{d\beta}{db} = \frac{d\gamma}{dc}.$$

Supposons que a, b, c satisfassent à la première de ces équations et soient donnés; nous allons voir qu'on peut tirer α, β, γ des deux dernières sans employer aucun signe d'intégration.

En effet, si l'on considère a, b, c d'une part, α, β, γ de l'autre, comme les coordonnées des points correspondants de deux courbes gauches, on voit que les tangentes aux courbes en ces points devront être parallèles. Donc chacune d'elles sera l'arête de rebroussement d'une surface développable dont les plans tangents seront parallèles aux plans osculateurs de l'autre. Soit

$$\begin{aligned} \Phi = \mathrm{X}(db\,d^2c - dc\,d^2b) + \mathrm{Y}(dc\,d^2a - da\,d^2c) \\ + \mathrm{Z}(da\,d^2b - db\,d^2a) - u\,dt^3, \end{aligned}$$

u étant une fonction quelconque du paramètre variable t. Les valeurs de X, Y, Z, déduites des équations

$$\Phi = 0, \quad d\Phi = 0, \quad d^2\Phi = 0,$$

seront précisément les valeurs de α, β, γ. En les substituant dans les formules (11), on aura la solution avec trois fonctions arbitraires.

L'équation (5) peut être intégrée par un autre procédé, qui offrira, dans certains cas, de grands avantages. Posons

$$x = X + X_1, \quad y = Y + Y_1, \quad z = Z + Z_1,$$
$$x_1 = X - X_1, \quad y_1 = Y - Y_1, \quad z_1 = Z - Z_1;$$

elle prendra la forme

$$(12) \qquad dX\,dX_1 + dY\,dY_1 + dZ\,dZ_1 = 0.$$

Supposons que X_1, Y_1, Z_1 soient donnés en fonction du paramètre t, et proposons-nous de déterminer X, Y, Z. On pourra poser

$$X\,dX_1 + Y\,dY_1 + Z\,dZ_1 = U\,dt.$$

Différentions et tenons compte de l'équation (12), il restera

$$X\,d^2X_1 + Y\,d^2Y_1 + Z\,d^2Z_1 = d(U\,dt).$$

Ces deux dernières équations donnent la solution cherchée. Il est vrai qu'elles ne font pas connaître X, Y, Z; mais on prendra Z arbitrairement ou l'on écrira une relation quelconque entre X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1. On pourrait, par exemple, supposer que la courbe lieu du point (x, y, z) soit sur une surface donnée.

Considérons, en terminant, l'équation

$$f(dx, dy, dz, \ldots, dt, du) = 0,$$

où f désigne une fonction homogène des différentielles $dx, \ldots, du$, à coefficients constants ou fonctions de l'une des variables u. On pourra poser

$$dx = a\,du, \quad dy = b\,du, \quad dz = c\,du, \ldots, \quad dt = k\,du,$$

pourvu que les fonctions a, b, c, .., k satisfassent à l'équation

$$f(a, b, c, \ldots, k, 1) = 0$$

et ensuite, a, b, c, ..., k étant connus,

$$x = au + \alpha, \quad y = bu + \beta, \ldots,$$

pourvu que les nouvelles fonctions α, β satisfassent aux relations

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{d\beta}{db} = \frac{d\gamma}{dc} = \ldots.$$

On intègre ces équations par un procédé analogue à celui qui a été suivi plus haut, dans la résolution de l'équation (10).