JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Note complémentaire au Mémoire précédent. - Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résulte des idées exposées au § VI

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 361-390.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__361_0>

Note complémentaire au Mémoire précédent. — Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résulte des idées exposées au § VI.

PAR M. J. BOUSSINESQ.

La théorie de la lumière que je me suis contenté d'indiquer au § VI (n° **24**), a été développée, comme je l'ai dit, dans plusieurs Mémoires des tomes XIII (1868) et XVII (1872) du *Journal de Mathématiques*. M. de Saint-Venant en a résumé les principes et les résultats, avec une grande clarté, aux n^{os} **23** à **34** de l'Étude, également citée plus haut, *Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses*. Toutefois, on voudra bien me permettre d'exposer de nouveau ces principes avec quelques développements dont je ne les avais pas encore accompagnés, dans le but de montrer qu'on ne doit pas les accuser « de substituer à l'analyse mécanique des phénomènes une sorte de symbole analytique d'une généralité telle, qu'ils y soient tous compris », mais plutôt que ce symbole, le seul qui ait pu, jusqu'à ce jour, embrasser tous les faits, est la traduction analytique de la manière la plus simple et, *a priori*, la plus vraisemblable dont on puisse se représenter le mouvement vibratoire lumineux dans les corps transparents. J'espère répondre ainsi à une objection soulevée par M. Sarrau, dans un article récent des *Annales de Chimie et de Physique* [*].

I. — Quand, en vue de comprendre la propagation de la lumière dans le vide et les circonstances d'interférence ou de diffraction qu'elle présente, on a admis l'existence, dans tous les espaces intra-stellaires, de l'éther, c'est-à-dire d'un milieu très-divisé et très-peu dense, mais

[*] Quatrième série, février 1873, t. XXVIII, p. 266 à 273. — *Observations relatives à l'analyse faite par M. de Saint-Venant des diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses.*

d'une élasticité relativement considérable qui lui permette de propager avec une énorme vitesse des ondes à petites vibrations transversales, il reste encore à expliquer, avec toutes leurs lois si variées, les phénomènes qui concernent la marche de la lumière à l'intérieur des corps transparents ou de part et d'autre de leurs surfaces de séparation. La nécessité d'obtenir, même en pareil cas, des vitesses de propagation sans comparaison plus grandes que celle du son, ne permet pas d'attribuer ces phénomènes à l'élasticité propre de la matière pondérable, et l'on est inévitablement conduit à supposer que c'est l'éther, logé à l'intérieur du corps transparent, qui vibre lorsque des rayons de lumière ou de chaleur rayonnante traversent ce dernier. La facilité que l'éther possède de pénétrer ainsi et même de circuler librement à travers les pores de la matière pondérable s'explique, si l'on admet, d'une part, que celle-ci est composée de molécules laissant entre elles des espaces beaucoup plus grands que celui qu'elles occupent, et, d'autre part, que l'éther, au lieu d'être, lui aussi, condensé en molécules, se trouve incomparablement plus divisé et par suite plus dilaté, ou à l'état d'atomes exerçant entre eux ces actions, les plus énergiques de toutes par unité de masse, qu'on appelle *atomiques* ou *chimiques*, mais dont l'intensité n'est sensible qu'à des distances au plus comparables aux dimensions d'une molécule [*]. Et l'on conçoit qu'un tel milieu puisse, plus que tout autre, se comporter comme un corps solide très-élastique, tant qu'on ne lui imprime qu'un mouvement vibratoire d'une amplitude suffisamment petite, tout en devenant un fluide d'une résistance insensible, à cause de sa faible masse, dès que ses limites d'élasticité, très-resserrées, sont dépassées, un fluide incapable, en un mot, de ralentir notablement le moindre mouvement perceptible d'un corps qui le traverse.

II. — Les molécules pondérables se trouvant ainsi disséminées dans l'éther, comme le sont, dans l'air ou dans l'eau, les poussières qui y voltigent ou y nagent, ou comme le sont encore, à la surface d'un

[*] La dispersion étant incomparablement plus grande dans les corps que dans le vide, où l'on n'a pu jusqu'à ce jour en constater l'existence, le rayon d'activité des actions moléculaires de l'éther doit même être beaucoup plus petit, vis-à-vis d'une longueur d'onde, que ne le sont les dimensions d'une molécule pondérable.

liquide, un grand nombre de petits corps flottants, il est inévitable que ces molécules se mettent à vibrer dès que l'éther interposé entre en vibration lui-même. Il peut arriver deux cas principaux, comme il a été dit au n° **24** (§ VI) du Mémoire : 1° le mouvement ainsi transmis à la matière pondérable met en jeu, entre les molécules de celle-ci, des forces élastiques qui tendent à le conserver, ou qui suffiraient à elles seules pour le continuer dès qu'il a été produit une fois, et le corps, accomplissant des vibrations d'une amplitude de plus en plus grande, se chauffe ou transforme en *chaleur interne*, qui lui devient propre, la demi-force vive empruntée à l'éther; 2° ou bien, tout au contraire, le mouvement considéré ne fait naître entre les molécules pondérables que des actions discordantes, incapables de le continuer à elles seules, et par suite de l'augmenter avec le concours des impulsions, sans cesse renouvelées, de l'éther vibrant. Dans ce second cas, les quantités de mouvement prises, suivant trois axes rectangulaires de coordonnées, par la matière pondérable, ne peuvent grandir d'un instant à l'autre qu'autant que celles de l'éther grandissent ellesmêmes : l'hypothèse la plus naturelle qu'on puisse faire, sur les rapports qu'ont entre elles les premières et les secondes de ces quantités de mouvement, consiste à admettre qu'elles sont du même ordre de grandeur. Mais alors le produit de la densité de l'éther par son déplacement vibratoire parallèle à un axe coordonné est comparable au produit de la densité de la matière pondérable par son déplacement pareil, et il en est par suite de même, si l'on remplace, dans ces produits, les déplacements par leurs dérivées premières, prises le long d'un même élément rectiligne quelconque. Or les dérivées ainsi introduites représentent, comme on sait, les déformations éprouvées par chaque espèce de matière, et sont de même ordre de grandeur que les rapports des forces élastiques mises en jeu, dans chaque milieu respectif, à un coefficient d'élasticité correspondant : on peut leur substituer ces rapports sans changer l'ordre de grandeur des produits considérés. Et si l'on observe enfin que le quotient de la densité par un coefficient d'élasticité est comparable, d'après une formule connue d'acoustique, à l'inverse du carré de la vitesse des ondes que peuvent propager, dans chaque milieu en particulier, ses forces élastiques, les produits considérés, qui devront être du même ordre de grandeur pour la matière pondérable et pour l'éther, deviendront les quotients des forces élastiques mises en jeu à travers l'unité de surface d'un élément plan, dans chacune des deux espèces de matière, divisées respectivement par le carré de la vitesse du son pour la matière pondérable et par celui de la vitesse de la lumière pour l'éther. Les forces élastiques développées entre les molécules pondérables d'un corps transparent, à travers un élément plan et pendant que ces molécules vibrent lumineusement, sont donc, en comparaison de celles qui se produisent dans l'éther à travers le même élément plan, aussi petites que l'est le carré de la vitesse du son par rapport au carré de celle de la lumière, c'est-à-dire entièrement négligeables.

III. — Ainsi, les forces élastiques de la matière pondérable n'interviennent pas sensiblement dans les phénomènes lumineux, puisqu'elles y restent tout à fait insensibles vis-à-vis de celles de l'éther, et l'on peut étudier ces phénomènes en supposant les molécules des corps indépendantes les unes des autres, ou soumises, chacune, à la seule action du fluide éthéré environnant. Or, dans la nature, tous les mouvements dépendants de causes périodiques ne tardent pas à devenir périodiques eux-mêmes : il est par suite rationnel d'admettre que chaque molécule, abandonnée à l'impulsion de l'éther qui l'entoure, vibrera bientôt à l'unisson de cet éther, ou de manière à se retrouver dans une même position, chaque fois que l'état du fluide éthéré voisin se retrouvera le même, c'est-à-dire chaque fois que les déplacements u, v, w, suivant trois axes rectangulaires fixes, des divers atomes qui le composent, reprendront leurs valeurs premières. On sait, d'ailleurs, que les déplacements des points d'un milieu très-voisins de celui dont la position d'équilibre a les coordonnées x, y, z, sont définis ou déterminés : 1° à une première approximation, si l'on connaît les déplacements u, v, w de ce point (x, y, z); 2° à des degrés de plus en plus élevés d'approximation, si l'on connaît en outre les dérivées premières en x, y, z de u, v, w, leurs dérivées secondes, troisièmes, etc. Les déplacements u'_1, v'_1, w'_1 d'une molécule pondérable deviennent donc des fonctions de u, v, w et de leurs dérivées partielles des divers ordres, fonctions qu'on peut supposer linéaires (vu la petitesse excessive des variables) et sans termes constants, comme on le fait toujours en cas pareil, par l'emploi de la série de Taylor, quand on étudie une fonction aux environs d'un point pour lequel elle s'annule, et qu'on n'aperçoit aucune raison de supposer ses dérivées premières nulles ou discontinues en ce point. Les déplacements moyens u_1, v_1, w_1, suivant les axes, de la matière pondérable contenue à l'intérieur d'un petit volume quelconque s'obtiendront en multipliant la masse de chacune des molécules qui en font partie par son déplacement parallèle à l'axe considéré, et en divisant la somme des produits pareils par la masse totale des molécules; ces déplacements moyens seront donc aussi, à fort peu près, des fonctions linéaires, sans termes constants, des déplacements u, v, w de l'éther, en un point pris à l'intérieur du volume considéré ou tout près, et de leurs dérivées par rapport à x, y, z.

Lorsque le corps transparent n'est pas animé d'une vitesse de translation comparable à celle de la lumière, on peut supposer sensiblement fixes les positions moyennes à partir desquelles se comptent les déplacements de ses molécules, et alors les accélérations moyennes de celles-ci, correspondantes au mouvement lumineux, ont pour composantes suivant les trois axes $\frac{d^2u_1}{dt^2}$, $\frac{d^2v_1}{dt^2}$, $\frac{d^2w_1}{dt^2}$. Les produits $-\rho_1\frac{d^2u_1}{dt^2}$, $-\rho_1\frac{d^2v_1}{dt^2}$, $-\rho_1\frac{d^2w_1}{dt^2}$ de ces accélérations par la densité ρ_1, changée de signe, de la matière pondérable, représentent alors, par unité de volume, les inerties, dues au mouvement vibratoire, de la même matière, ou, ce qui revient au même, la réaction totale exercée sur l'unité de volume d'éther par les molécules du corps, puisque celles-ci ne sont soumises à chaque instant qu'aux impulsions du fluide qui les environne. Et les trois équations du mouvement de l'éther, dont ρ désignera la densité, s'obtiendront enfin en égalant sa force motrice par unité de volume et suivant chaque axe, $\rho\frac{d^2u}{dt^2}$, $\rho\frac{d^2v}{dt^2}$, $\rho\frac{d^2w}{dt^2}$, à la somme des forces de même sens qui lui sont appliquées et qui se composent, d'abord, d'une action élastique exercée sur l'unité de volume de la particule considérée d'éther par ses voisines, en deuxième lieu, d'une des trois composantes, $-\rho_1\frac{d^2u_1}{dt^2}$, $-\rho_1\frac{d^2v_1}{dt^2}$, $-\rho_1\frac{d^2w_1}{dt^2}$, de la réaction de la matière pondérable.

Je ne m'arrêterai pas ici à démontrer les expressions, un peu moins simples, que prennent, dans ces équations, les accélérations vibratoires de la matière pondérable, quand le corps transparent est animé d'un mouvement rapide de translation. Je renverrai le lecteur qui désirerait étudier cette intéressante question, au § III de l'*Addition au Mémoire intitulé* : « *Théorie nouvelle des ondes lumineuses.* » (*Journal de M. Liouville*, fin du tome XIII, 1868.)

IV. — On voit que les formules auxquelles nous avons été conduits pour représenter l'action dynamique de la matière pondérable sur l'éther, dans les phénomènes lumineux, résultent d'une série d'hypothèses vraisemblables, dont chacune paraît même presque inévitable. Il est vrai qu'on pourrait aller plus loin et demander comment une résistance ayant cette expression peut être produite par des forces exercées d'atome à atome et dépendant, pour chaque couple de deux atomes, de leur distance *et de celles des atomes voisins*. Malheureusement un calcul de ce genre est au-dessus de la puissance de l'analyse actuelle, même dans le cas le plus simple que l'on puisse se poser, c'est-à-dire quand il s'agit d'un corps animé d'un mouvement rectiligne et uniforme à travers un fluide en repos. Il y a donc peu de chance qu'on puisse de longtemps l'aborder dans le cas bien plus complexe d'un corps battu par un milieu qui l'entoure et qui est soumis à des mouvements périodiques, comme il arrive, au sein de l'éther, pour chaque molécule pondérable. Cauchy, il est vrai, a essayé d'étudier les vibrations simultanées de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement; mais il admet que la distance de deux points matériels agissant l'un sur l'autre n'y varie, aux diverses périodes du mouvement, que de quantités très-petites par rapport à sa valeur moyenne : ce qui lui permet de développer les actions moléculaires, en séries très-convergentes, suivant les puissances ascendantes des petites parties variables de toutes les distances pareilles. Or une telle hypothèse ne me paraît pas plus permise quand on étudie la réaction exercée sur l'éther vibrant par une molécule d'un corps transparent, que lorsqu'il s'agit de la résistance opposée par l'air au mouvement d'un projectile qui le traverse. Dans un cas autant que dans l'autre, les actions mutuelles doivent être en effet exercées entre la couche superficielle de la molécule ou du projectile et les particules adjacentes du fluide, particules qui se renouvellent sans cesse et dont chacune ne doit être active en un même endroit que pendant un instant très-court : les distances dont dépendent les actions élémentaires qui constituent, par leur résultante, la force totale à évaluer, ne varient donc pas entre d'étroites limites, de part et d'autre de leurs valeurs moyennes; il serait plus exact de supposer chacune d'elles, au moment où elle intervient, d'abord décroissante de ∞ à sa valeur minimum, et puis croissante de cette valeur à ∞.

L'impossibilité où l'on s'est trouvé jusqu'ici, faute de moyens analytiques assez puissants et faute aussi de données expérimentales suffisantes, d'introduire, dans la plupart des théories physiques, les actions élémentaires exercées d'atome en atome à des distances imperceptibles, n'empêche pas ces théories de satisfaire l'esprit, quand elles sont basées d'ailleurs sur des hypothèses simples et vraisemblables, telles, en un mot, que l'observation même des faits conduit à les poser. C'est ainsi, par exemple, que, dans la théorie analytique de la chaleur, étude de la distribution des températures (supposées assez peu variables) aux divers points d'un corps athermane, on se dispense de calculer les travaux individuels, correspondants aux vibrations calorifiques, des actions moléculaires exercées à travers un élément plan quelconque, bien que la somme de ces travaux constitue une quantité, appelée *flux de chaleur*, que l'on ne peut se dispenser d'évaluer; mais, s'appuyant simplement sur ce fait que le flux dont il s'agit, fini par unité de surface et dans l'unité de temps, dépend de la distribution des températures dans une très-petite étendue autour de l'élément plan et s'annule quand ces températures deviennent égales, on se contente d'observer qu'il doit être une fonction linéaire, sans terme constant, des trois petites dérivées partielles, par rapport à x, y, z, de la température en un point de l'étendue considérée; car ces dérivées, jointes à la température produite au même point, définissent suffisamment l'état calorifique dans un petit espace tout autour. De même, quand on étudie les frottements intérieurs d'un fluide, c'est-à-dire d'un corps très-facile à déformer, ou qui a une grande aptitude à passer d'un état d'équilibre stable à un autre très-voisin, on évite le calcul des actions individuelles des molécules, en observant que les résistances opposées par le fluide à ses déformations doivent être d'autant plus grandes qu'est plus grand lui-même le nombre des états moléculaires distincts, ou d'équilibre stable, par lesquels il passe dans l'unité de temps, et en égalant par suite ces résistances à des fonctions des dérivées premières en x, y, z des trois composantes de la vitesse au point considéré, dérivées qui y caractérisent la rapidité actuelle des déformations. Ces fonctions peuvent même être supposées linéaires, lorsque les vitesses varient graduellement d'un point à l'autre et sont ainsi peu différentes pour deux points voisins. La théorie de l'élasticité, étude des déformations très-petites qui n'altèrent pas la contexture des corps, mais qui, laissant constamment les mêmes molécules en présence les unes des autres, ne modifient que légèrement leurs rapports, semble se prêter beaucoup plus aux calculs d'actions moléculaires, et, de fait, on les y a souvent employés : on aurait dû cependant n'en faire usage qu'avec une extrême réserve; car ces calculs ne peuvent guère s'effectuer qu'en négligeant le mouvement vibratoire calorifique, ou en raisonnant comme si toutes les molécules occupaient à chaque instant leurs situations relatives moyennes, ce qui ne me paraît suffisamment exact qu'à des températures voisines du zéro absolu ou tout au moins très-distantes, pour chaque corps solide, de son point de fusion : le mieux est peut-être encore d'observer que les forces élastiques dépendent des petites déformations éprouvées par le corps et doivent en être par suite des fonctions linéaires. On a pareillement recours à un principe spécial très-simple, vraisemblable *a priori* et confirmé par l'expérience, dans toute partie de la mécanique où l'on traite d'autres mouvements que de ceux d'un système de points matériels situés, dans le vide, à des distances finies les uns des autres : telles sont, par exemple, l'étude de la résistance opposée par un milieu au mouvement d'un projectile, celle du frottement mutuel de deux solides, la *plasticodynamique*, recherche, inaugurée depuis peu, des lois de la déformation, assez lente, mais continue, des corps ductiles, et même la théorie des corps dits *rigides*, et celle des liquides et des gaz dans les circonstances où la fluidité parfaite est approximativement admissible. Toutefois, dans ces derniers cas, la considération directe des actions moléculaires peut servir à expliquer plusieurs faits et, s'il s'agit des gaz, à établir diverses lois de simple proportionnalité, comme on a vu aux §§ VIII et IX du Mémoire précédent; mais chaque formule contient encore, pour le moins, un coefficient dont il faut demander la valeur à l'expérience, et qu'il ne serait pas facile de calculer, alors même que l'expression exacte de l'action de deux molécules se trouverait entièrement connue.

Toutes les branches de la philosophie naturelle, à part la théorie du mouvement des astres assimilés à de simples points, ont donc été édifiées jusqu'à ce jour sur quelques principes éminemment simples, propres à chacune, au moyen desquels on est dispensé de remonter jusqu'au calcul des actions individuelles des molécules très-voisines, et qui, combinés avec la grande loi de la continuité des fonctions et avec les théorèmes généraux de la conservation des quantités de mouvement, des moments ou des forces vives, suffisent pour établir rationnellement les lois plus ou moins approchées reconnues par les physiciens et bien d'autres encore sur lesquelles l'expérience n'a pas été consultée. On peut regretter sans doute que toutes ces belles lois, au lieu de nous révéler en détail les mystères du monde des atomes, ou infiniment petits de la nature, sur lequel elles semblaient devoir nous éclairer, ne soient que la traduction, sous mille formes différentes, de quelques faits simples, qu'un premier coup d'œil jeté sur le monde rend en quelque sorte évidents, et qui ne concernent que l'action totale de particules matérielles dont chacune contient un nombre immense de molécules; mais, d'un autre côté, le géomètre ne saurait être fâché de voir l'analyse mathématique lui dérouler les magnifiques conséquences des idées les plus simples et les plus communes. La vue de la richesse de ces idées, dont l'épanouissement constitue une si grande partie de la science humaine, vaut peut-être plus que la connaissance détaillée de toutes les forces individuelles qu'elles négligent pour embrasser leur effet général; car la simplicité, qui seule nous les rend intelligibles et intéressantes, tient probablement à ce que nous observons des effets moyens où les discordances individuelles disparaissent et se neutralisent en vertu de la *loi des grands nombres*. S'il nous était donné, au contraire, de voir les détails, nous serions tentés peut-être, à cause des bornes actuelles de notre esprit, de ne trouver que désordre et incohérence dans le monde des infiniment petits, pareillement à ce qui arrive quand nous nous perdons dans la multiplicité des phénomènes que nous offre le monde plus grand placé à notre portée [*].

V. — Quoi qu'il en soit, et pour revenir à notre sujet particulier, la théorie de la lumière n'est pas plus tenue que les autres parties de la mécanique de déduire dès à présent, d'actions d'atome à atome simples fonctions des distances, toutes les formules dont elle a besoin, et notamment les expressions, relatives à la réaction de la matière pondérable sur l'éther, que des considérations simples et naturelles lui indiquent comme les plus vraisemblables. Il suffit, pour que ces expressions soient acceptables, qu'elles se prêtent aisément à l'explication de tous les phénomènes lumineux, et elles le seront surtout tant que des faits importants, comme ceux dont je parlerai à la fin de ces pages, resteront en dehors de toutes les autres théories connues.

Rien ne s'oppose donc à ce qu'on admette pour composantes, suivant les axes, de l'action exercée par la matière pondérable sur l'unité

---

[*] Il me paraît de même probable qu'en égalant, dans les phénomènes chimiques, toute modification réalisée durant un instant infiniment petit dt, et rapportée à l'unité de temps, à une simple fonction linéaire de chacune en particulier des causes, d'une intensité évaluable et modérée, qui interviennent dans sa production, on réussira un jour, sans connaître d'ailleurs les détails intimes des décompositions et des combinaisons, à représenter analytiquement, avec une approximation suffisante, la marche des réactions qui s'effectuent dans des circonstances déterminées; c'est en entrant dans cette voie qu'on peut espérer soumettre aux lois du nombre, dans tous les cas où les chimistes trouveront assez de simplicité pour démêler en effet des lois, l'état dynamique, à chaque instant variable, d'un milieu où la composition des molécules n'a pas encore atteint cet équilibre plus ou moins stable vers lequel elle tend et que l'on a étudié jusqu'ici d'une manière à peu près exclusive.

Il a paru sur ce sujet, au t. XVII des *Annales de Chimie et de Physique* (4e série, novembre 1872, p. 289 à 371), un Mémoire très-intéressant de M. Georges Lemoine sur la *Théorie des réactions simples limitées par l'action inverse*, avec applications aux transformations successives : 1° d'un mélange gazeux d'iode et d'hydrogène; 2° d'une masse donnée de carbonate de chaux calcinée en vase clos; 3° d'un mélange de phosphore rouge en poudre et de phosphore ordinaire en vapeur. M. Lemoine essaye d'y rendre compte de phénomènes dans lesquels, à une température maintenue constante, on admet qu'il se produit : 1° grâce à un apport suffisant de chaleur, une décomposition spontanée qui s'effectue, à chaque instant et dans chaque petit élément de volume, indépendamment des circonstances extérieures à cet élément de volume et même des autres phénomènes dont il peut être le théâtre, mais simplement d'après de volume d'éther, les quantités $-\rho_1\frac{d^2u_1}{dt^2}$, $-\rho_1\frac{d^2v_1}{dt^2}$, $-\rho_1\frac{d^2w_1}{dt^2}$, où ρ_1 désigne la densité de cette matière et u_1, v_1, w_1 ses déplacements, supposés fonctions de l'état de l'éther environnant, c'est-à-dire, ainsi qu'il a été dit, des déplacements u, v, w d'un atome de cet éther et aussi, à des degrés d'approximation de plus en plus élevés, des dérivées successives de u, v, w en x, y, z. Toutefois l'état dynamique d'un milieu à un moment donné est caractérisé, comme nous avons vu au § I du Mémoire, non-seulement par les positions relatives actuelles de ses divers points, mais encore par leurs vitesses, et il n'y a pas d'invraisemblance à faire dépendre aussi u_1, v_1, w_1, fonctions de l'état dynamique de l'éther, des vitesses $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$. Des considérations de symétrie rendront, il est vrai, cette introduction des vitesses de l'éther dans les expressions de u_1, v_1, w_1 impossible pour la plu-

---

cette loi vraisemblable qu'il y a, durant un instant très-court dt, un nombre d'autant plus grand de molécules atteintes par la décomposition qu'il y a plus de molécules susceptibles de l'éprouver, ce qui revient à supposer la vitesse de la décomposition simplement proportionnelle à la densité de la matière qui la subit ou même, quand celle-ci est solide, comme le carbonate de chaux, et éprouve surtout la décomposition dans ses couches superficielles, sensiblement constante par unité de surface, toutes choses égales d'ailleurs; 2° la combinaison de deux éléments, tous les deux fluides et mêlés, ou l'un fluide et l'autre, solide, ayant ses couches superficielles en rapport avec le premier, combinaison dont la vitesse, dans chaque petit volume où elle se produit, est encore supposée indépendante des circonstances extérieures à ce volume et même du phénomène de décomposition qui s'y effectue en même temps, de manière à être simplement proportionnelle au produit des densités des deux éléments, s'ils sont fluides, et, dans le cas contraire, par unité de surface du solide, au produit de la densité de l'élément fluide par un coefficient dépendant du degré de compacité de l'élément solide, ou, ce qui revient au même quand celui-ci est à l'état de poudre, par unité de volume, au produit de la densité de l'élément fluide par celle de l'élément solide dans le milieu, et par un coefficient, dépendant à la fois du degré de compacité et du degré de division de la poudre considérée, dont les variations d'un instant à l'autre pourront être supposées proportionnelles à la cause qui fera changer ces deux qualités physiques. M. Lemoine s'est borné au cas où deux corps simples, en partie mélangés, en partie combinés, se trouvent seuls actifs, de manière que les effets des deux phénomènes de décomposition et de combinaison dont il s'agit soient inverses et se neutralisent même exactement dans un état limite d'équilibre mobile vers lequel tend le système.

part des corps transparents, et il n'y aura guère que ceux que l'on placera entre les deux pôles d'un aimant puissant qui acquièrent un genre particulier de dissymétrie avec lequel elle soit compatible; mais, dans ce cas, on ne voit pas quel empêchement il pourrait y avoir à l'accepter, si elle permet d'expliquer simplement la rotation du plan de polarisation par le magnétisme, phénomène dont aucune autre théorie exacte (à ma connaissance) n'a pu encore être donnée.

VI. — Les expressions linéaires de u_1, v_1, w_1 en fonction de u, v, w, de leurs dérivées en x, y, z, ou aussi, plus généralement, des dérivées de toutes ces quantités par rapport à t, devront être particularisées de forme, dans chaque cas, d'après le genre spécial de symétrie ou de dissymétrie qu'offriront les corps considérés. Elles devront être, en outre, compatibles avec la transparence, ou telles, que des ondes planes puissent se propager sans subir de diminution appréciable. En effet, les corps transparents, parmi ceux qui le sont un peu et qu'on étudie dans l'optique expérimentale, n'ont qu'un pouvoir absorbant tout à fait insensible sous une épaisseur comparable à une longueur d'onde ou à un demi-millième de millimètre environ, épaisseur suffisante pour que la phase de la vibration y reçoive à chaque instant toutes ses valeurs : les termes qui correspondraient, dans les équations différentielles des mouvements, à l'imperceptible diminution d'intensité provenant de cette cause, ne peuvent qu'être excessivement petits et négligeables, par rapport aux termes principaux qui déterminent les circonstances de phase ou de polarisation des vibrations aux divers points et aux divers instants successifs. Il suffit donc qu'un corps soit translucide, sous une épaisseur d'un millimètre, par exemple, pour qu'on puisse le supposer parfaitement transparent, en tout ce qui dépend de la propagation des ondes dans de petites étendues à son intérieur, et par conséquent en tout ce qui touche aux questions concernant la vitesse de la lumière, la direction et la polarisation des rayons réfléchis ou réfractés, leur intensité de part et d'autre de la surface de séparation de deux milieux, etc. Dans tous ces cas, les expressions de u_1, v_1, w_1 relatives à un corps donné devront rendre possibles des systèmes d'ondes planes d'intensité constante, ou *non-évanescentes*, sans quoi le corps appartiendrait à la catégorie nombreuse des corps opaques, et ne serait pas de ceux que l'on se propose d'étudier.

VII. — Il ne suffit pas d'avoir obtenu, en fonction des déplacements u, v, w de l'éther et de leurs dérivées, des expressions de la réaction dynamique exercée en un point de ce milieu par la matière pondérable; il faut encore, pour être en état d'établir les lois des phénomènes lumineux, connaître la constitution de l'éther à l'intérieur des corps, ou avoir, du moins, certaines données sur son élasticité et sur sa densité. L'analogie montre quelle est, sous ce rapport, l'hypothèse la plus vraisemblable et en même temps la plus simple que l'on puisse faire. Un fluide pondérable contenant, disséminées à son intérieur, un grand nombre de particules solides à l'état de poussière, un liquide dont la surface est parsemée d'une multitude de petits flotteurs, de dimensions très-petites par rapport à leurs distances mutuelles, telles sont les deux images que nous choisissons volontiers, dans la sphère des choses observables, pour nous représenter l'éther à l'intérieur des corps, et qui conviennent en effet, si les molécules pondérables sont très-petites par rapport aux espaces intermoléculaires environnants et si, en outre, le rayon d'activité des actions exercées par l'éther ou sur l'éther est tout au plus comparable aux dimensions d'une molécule. Or, dans ces deux cas, la constitution du fluide n'est pas sensiblement modifiée par la présence des particules solides qui y nagent ou y flottent, à l'exception d'une couche extrêmement mince, adhérente à chacune de ces particules, et dont on peut faire abstraction parce qu'elle est négligeable vis à vis du reste. On est donc conduit à supposer l'éther des corps sensiblement pareil à l'éther du vide, pour l'élasticité aussi bien que pour la densité, et à n'attribuer ce qu'il y a de particulier dans sa manière de vibrer lumineusement, qu'aux résistances produites par l'inertie des masses de matière pondérable interposées, relativement énormes, qu'il est obligé de mouvoir à chaque instant.

Des considérations d'un autre genre permettent d'établir la réalité de cette hypothèse comme un fait à peu près incontestable. Tout le monde admet, quand il s'agit de calculer les quantités de lumière réfléchies et réfractées à la surface de séparation de deux corps transparents, des relations spéciales, que Cauchy a appelées *conditions de continuité*, et qui reviennent à dire que, non-seulement les déplacements u, v, w de l'éther, mais encore leurs dérivées premières suivant la normale à la surface de séparation, ont les mêmes valeurs en deux points voisins pris respectivement à l'intérieur de chacun des deux milieux, autant du moins que l'épaisseur totale des couches superficielles de constitution optique rapidement variable est très-petite vis à vis d'une longueur d'onde. Or ces conditions résultent, quand l'élasticité de l'éther est supposée la même dans les corps que dans le vide, de l'égalité des deux pressions exercées à chaque instant sur les deux faces de la couche mince d'éther qui sépare les deux milieux : elles ne sont en un mot, comme on peut le voir au § VIII de la *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, qu'une application particulière des conditions à la surface employées dans tous les problèmes de Mécanique où il y a des pressions à considérer (sauf de petites perturbations lorsque le phénomène se rattache à la capillarité). Mais il en serait autrement si tous les éthers n'avaient pas la même élasticité, et il y aurait même alors incompatibilité absolue entre l'égalité des pressions dont il vient d'être parlé et les conditions de continuité que l'expérience confirme. Il faut donc attribuer à l'éther d'un corps transparent quelconque la même élasticité et, par suite, la même isotropie qu'à l'éther libre. Et comme on ne conçoit guère un milieu dont l'élasticité resterait invariable, tandis que sa densité pourrait recevoir un grand nombre de valeurs différentes, il est bien permis de regarder la constance de densité de l'éther comme une conséquence naturelle de sa constance d'élasticité.

Enfin, la nouvelle théorie explique facilement, jusque dans les circonstances les plus délicates que l'observation ait révélées [*], la propagation de la lumière à travers les corps animés d'une translation rapide. Une seule hypothèse spéciale, la plus simple qu'il soit possible d'imaginer et qui résulte d'ailleurs des idées déjà exposées sur la constitution de l'éther et sur celle de la matière pondérable, lui suffit pour cela : cette hypothèse consiste à admettre qu'un corps en mouvement traverse l'éther comme le ferait un filet à mailles très-larges,

---

[*] *Voir* l'article ci-après, extrait des *Comptes rendus* (t. LXXIV; 24 juin 1872).

c'est-à-dire sans l'entraîner sensiblement. Donc l'éther d'un corps ne doit pas différer d'une manière appréciable de l'éther libre, ou de ce qu'il devient à l'instant quand le corps l'abandonne et se transporte ailleurs.

VIII. — Si l'on désigne par λ, μ et ρ les deux coefficients d'élasticité et la densité de l'éther libre, par θ la dilatation cubique $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$ et par Δ_2 l'expression symbolique $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$, les trois composantes, suivant les axes, de l'action élastique totale exercée sur l'unité de volume de l'éther d'un corps vaudront donc

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta_2 u, \quad (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dy} + \mu\Delta_2 v, \quad (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\Delta_2 w \text{ [*]},$$

et les équations de mouvement qui régissent les variations de u, v, w d'un instant à l'autre s'obtiendront en égalant les sommes respectives de ces expressions et de celles des réactions suivant les axes, $-\rho_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2}$, $-\rho_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2}$, $-\rho_1 \frac{d^2 w_1}{dt^2}$, de la matière pondérable, aux trois composantes $\rho \frac{d^2 u}{dt^2}$, $\rho \frac{d^2 v}{dt^2}$, $\rho \frac{d^2 w}{dt^2}$, de la force motrice de l'éther.

A une première approximation, c'est-à-dire en négligeant les pouvoirs dispersif et rotatoire, u_1, v_1, w_1 sont des fonctions linéaires de u, v, w, à coefficients constants si le milieu est homogène. Les lois approchées qui résultent alors des équations, au moins quand on admet l'hypothèse, toujours réalisée, d'une faible biréfringence, sont un peu plus compliquées que celles de Fresnel, comme on peut le voir dans un Mémoire du t. XVII (1872) de ce Journal. Mais elles s'y réduisent, à cela près que la vibration fait généralement un petit angle avec le plan de l'onde, chez les cristaux des cinq premiers systèmes, qui ont un axe minéralogique perpendiculaire au plan des autres. Quant aux cristaux transparents du sixième système et aux corps homogènes, également transparents, de la contexture la plus générale qu'on puisse imaginer, ils ne peuvent avoir, comme les précécents, que deux axes

[*] *Voir* la sixième des *Leçons sur l'élasticité*, de Lamé, § 26, form. 5.

optiques, et les rayons lumineux peu inclinés sur le plan de ces axes obéissent encore, sauf erreur négligeable, aux lois de Fresnel; mais il n'en est plus ainsi des rayons notablement inclinés sur le même plan. La constatation, qui est, je crois, encore à faire, de ce résultat du calcul pourrait fournir le sujet d'une expérience intéressante.

Quelque grand que soit le pouvoir biréfringent, la nouvelle théorie montre que les cristaux des cinq premiers systèmes continuent à se comporter, au point de vue optique, comme s'ils avaient trois plans rectangulaires de symétrie de contexture [*]. Mais la surface des ondes n'y est plus en général celle de Fresnel. Elle le devient toutefois, et en toute rigueur, quand on pose $\lambda + 2\mu = 0$, hypothèse revenant à admettre la nullité de la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans l'éther libre; de plus, la vibration, tout en restant, comme le voulait Fresnel, perpendiculaire au plan de polarisation, devient alors normale au rayon lumineux [**], ainsi que paraît l'exiger un calcul exact de la réflexion cristalline. Cette dernière considération est de nature à prouver que l'on a bien en effet $\lambda + 2\mu = 0$, ou plutôt $\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} =$ une quantité peu différente de zéro, relation à laquelle conduit d'ailleurs le calcul des phénomènes de la réflexion vitreuse ordinaire.

Je pense donc qu'il faut supposer nulle la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans l'éther libre : cette hypothèse serait peu acceptable si les actions intérieures de l'éther étaient analogues aux

---

[*] Les considérations qui le démontrent se trouvent à la fin du Mémoire cité, inséré au t. XVII du *Journal de Mathématiques :* elles s'appliqueraient à la question analogue concernant la propagation de la chaleur à l'intérieur des cristaux athermanes [*voir* une Étude sur les surfaces isothermes et sur les courants de chaleur, au t. XIV (1869) du même Recueil, et un article du *Compte rendu*, t. LXIX, p. 329, 2 août 1869]; les cristaux du sixième système sont donc, dans la théorie analytique de la chaleur, les seuls non-symétriques, les seuls qui ne paraissent pas devoir se comporter comme s'ils avaient trois plans rectangulaires de symétrie de contexture, ou trois axes principaux de conductibilité, suivant l'expression de Duhamel; pour ceux des cinq premiers systèmes, l'ellipsoïde des conductibilités linéaires n'est pas distinct de l'ellipsoïde principal, et la chaleur s'y répand en ligne droite tout autour d'un point chauffé.

[**] C'est ce que M. Sarrau a reconnu le premier, dans un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques* (t. XIII, p. 37; 1868).

forces, exercées de molécule à molécule, qui constituent l'élasticité de la matière pondérable; mais elle est admissible dès que l'on regarde les actions dont il s'agit comme étant d'une tout autre nature et plutôt analogues aux forces chimiques ou atomiques. Toutefois il ne faudrait pas donner pour preuve de sa réalité la nécessité d'obtenir la surface d'onde de Fresnel, car tous les cristaux connus sont assez peu biréfringents pour qu'on puisse, avec une exactitude comparable à celle des expériences, leur appliquer les calculs de première approximation dont cette forme d'onde est une conséquence, quelle que soit la valeur de $\lambda + 2\mu$.

IX. — Je n'entrerai pas ici dans le détail des explications que contiennent les Mémoires cités. M. Sarrau est d'avis que ces explications sont toujours simples et qu'elles s'étendent à la totalité des phénomènes dont doit rendre compte une théorie mathématique de la lumière. Je me contenterai d'ajouter deux réflexions.

La première est relative à la clairvoyance de Fresnel, qui a bien pu se tromper, mais de manière que ses erreurs même, ou du moins ce qui paraît tel au point de vue de la théorie actuelle, soient en quelque sorte des pressentiments de la vérité : par exemple, Fresnel a reconnu [*] que l'examen des phénomènes de réflexion et de réfraction conduit à admettre l'égale élasticité de tous les éthers, et il a cherché à expliquer leurs différentes manières de se comporter en leur attribuant des densités différentes, dont la plus faible serait celle de l'éther libre. Or cette hypothèse, difficile à accepter quand on la prend dans son sens absolu, à cause de la difficulté d'admettre l'existence d'un corps dont l'élasticité ne soit pas fonction de sa densité, est néanmoins irréprochable dans ses conséquences analytiques, c'est-à-dire dans les équations qui en résultent pour représenter le mouvement lumineux. En effet, si l'on néglige la dispersion et la polarisation rotatoire, et que l'on se borne d'abord à l'étude d'un corps transparent isotrope, l'expression de chacun des déplacements u_1, v_1, w_1 de

[*] Dans son Mémoire *Sur les modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée*, postérieur au Mémoire *Sur la double réfraction* et où l'illustre physicien a probablement consigné ses idées définitives.

la matière pondérable se réduit au produit d'une même constante positive A par le déplacement correspondant u, v, w de l'éther; par suite, l'inertie de la matière pondérable entraînée par l'éther, inertie qui s'ajoute, dans les équations, à celle de ce dernier, produit le même effet mécanique qu'une augmentation $\rho_1 A$ de la densité ρ de l'éther lui-même, et le mouvement vibratoire se propage comme si les molécules pondérables restaient fixes, mais avaient préalablement condensé de l'éther dans leur voisinage, de manière à y porter la densité de ce milieu de ρ à $\rho + \rho_1 A$. Peut-être Fresnel entrevoyait-il que la supposition d'une densité de l'éther plus grande à l'intérieur des corps que dans le vide n'était qu'une manière de tenir compte de la participation de la matière pondérable au mouvement. En suivant cet ordre d'idées, il aurait pu expliquer aisément la double réfraction, au moins dans les cristaux des cinq premiers systèmes, pour lesquels des considérations de symétrie prouvent l'existence de trois axes de coordonnées rectangulaires permettant de réduire u_1, v_1, w_1 aux formes simples Au, Bv, Cw; alors la densité de l'éther, au lieu d'être fictivement augmentée, par l'inertie de la matière pondérable, de la même quantité dans les trois équations de mouvement, serait portée de ρ à $\rho + \rho_1 A$ dans la première, à $\rho + \rho_1 B$ dans la deuxième, à $\rho + \rho_1 C$ dans la troisième; ces différences, suite naturelle de ce que les molécules intégrantes du corps considéré auraient des formes ne leur permettant pas de se laisser entraîner par l'éther avec la même facilité dans tous les sens, amèneraient les caractères observés qui distinguent la double réfraction de la réfraction simple. Une autre hypothèse de Fresnel, peu explicable dans son sens naturel, consiste à admettre qu'un corps animé d'un mouvement rapide de translation laisse immobile une portion de son éther de même densité que l'éther libre, tout en emportant avec lui le reste. Or une telle hypothèse se conçoit aisément, si l'excédant fictif d'éther dont il s'agit ne représente pas autre chose que le corps lui-même, en tant qu'il prend part au mouvement vibratoire. Il est vrai que toutes ces suppositions d'éthers de densités fictives inégales deviennent inutiles, mais elles montrent que la théorie nouvelle, loin d'être en contradiction avec les vraies idées de Fresnel, confirme plutôt les sublimes pressentiments au moyen desquels son génie intuitif devinait les faits, bien au delà de ce qui pouvait être clairement démontré à une époque où la théorie de l'élasticité n'était pas encore constituée.

La seconde réflexion que je désire soumettre au lecteur a pour but de faire remarquer que la théorie nouvelle permet, sans compliquer les formules, de mettre en compte, dans les calculs, la partie principale de la dispersion, au moins quand le corps est presque isotrope symétrique (comme le sont tous les corps transparents), et que l'on étudie des radiations simples ne donnant naissance qu'à des déplacements vibratoires pendulaires d'une période déterminée τ. Alors la dérivée seconde, par rapport au temps, d'une fonction linéaire quelconque de ces déplacements ou de leurs dérivées, égale le produit du facteur constant $-\frac{4\pi^2}{\tau^2}$ par la fonction considérée, et il suffit de jeter les yeux sur la formule (6) du Mémoire intitulé : *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, pour reconnaître que les principaux des termes auxquels est due la dispersion ont simplement pour effet de diminuer chacun des deux coefficients d'élasticité de l'éther libre, λ et μ, d'une petite quantité proportionnelle à l'inverse de τ^2. Les équations du mouvement restent donc homogènes du second ordre, et l'on peut traiter, par exemple, le problème des intensités des lumières réfléchie et réfractée à la surface de séparation de deux milieux, aussi facilement en tenant compte de l'influence perturbatrice de la dispersion qu'en la négligeant.

X. — Tels sont, exposés sans calcul, les principes et quelques résultats de la théorie de la lumière que je regarde comme corrélative à celle de la chaleur contenue dans les *Recherches* précédentes. Il ne m'appartient pas de la comparer à d'autres théories intéressantes, dont on s'est servi pour expliquer un certain nombre de phénomènes, et dans l'exposition desquelles M. Briot et M. Sarrau notamment ont su déployer toute la puissance de l'Analyse. Ces théories, applicables principalement aux corps cristallisés, sont basées en grande partie sur l'hypothèse, faite par Cauchy, que l'éther vibre seul à l'intérieur de ces corps et s'y trouve périodiquement homogène, c'est-à-dire constitué différemment aux divers points de chaque molécule intégrante du cristal, mais pareillement aux points homologues de toutes les molécules. M. Sarrau surtout a montré, dans son second

Mémoire (*Journal de Mathématiques*, t. XIII, 1868), tout le parti qu'on pouvait tirer de cette idée, puisque, en supposant l'élasticité de l'éther constante aux divers points d'un cristal et la densité seule périodiquement variable, il a pu rendre compte, non-seulement de la dispersion et de la polarisation rotatoire à l'intérieur de ces corps, mais encore de la double réfraction, pour laquelle il est conduit à peu près, dans le cas où il existe trois plans rectangulaires de symétrie de contexture et où la biréfringence est faible, aux mêmes formules que moi. Il serait assurément injuste d'exiger des théories dont je parle, qui emploient la méthode de Cauchy pour l'intégration des équations aux dérivées partielles et à coefficients périodiques, la même simplicité que de la précédente; mais on doit leur demander d'expliquer, sans suppositions contradictoires, la totalité ou la presque totalité des phénomènes lumineux, car elles ne seront vraiment acceptables que le jour où l'on aura reconnu qu'elles régissent l'ensemble des faits compris dans leur domaine; or, on n'a pas encore obtenu par leur moyen, à ma connaissance du moins :

1° La loi très-simple sur la puissance réfractive et sur le pouvoir rotatoire des mélanges;

2° L'explication de deux faits consistant, le premier en ce que tous les cristaux, même ceux du sixième système, chez lesquels il n'y a aucun plan de symétrie de contexture, n'ont que deux axes optiques, et le second en ce que les cristaux des cinq premiers systèmes, y compris ceux du cinquième sur lesquels il a été fait des observations précises, obéissent aux lois de Fresnel ou se comportent comme s'ils avaient trois plans rectangulaires de symétrie de contexture;

3° L'explication de la rotation du plan de polarisation par le magnétisme;

4° Celle de la loi de Fresnel sur la vitesse de la lumière dans les corps en mouvement, en y substituant à la période réelle de vibration sa valeur apparente, conformément à ce qu'indiquent des observations de M. Mascart;

5° Les conditions aux surfaces limites dites de *continuité*, en tant que conciliables avec l'égalité des pressions exercées de part et d'autre de la surface de séparation de deux milieux; ou, si l'on admet, comme le fait M. Sarrau dans son second Mémoire, l'égale élasticité de tous les éthers (ce qui rend évidentes ces conditions), la démonstration, par quelque analogie plausible, de la possibilité pour un milieu d'avoir une élasticité constante, quelle que soit sa densité;

6° Une explication claire de la dispersion dans le cas le plus simple, qui est celui d'un corps isotrope symétrique, comme le verre. On conçoit, quand il est question d'un cristal, c'est-à-dire d'un milieu divisé, par hypothèse, en cellules égales et pareillement orientées, que chaque déplacement u, v, w se règle de manière à se composer, aux divers points d'une cellule et à un instant quelconque, non-seulement de sa *valeur moyenne locale*, ou moyenne des valeurs qu'il acquiert dans toute l'étendue de la cellule, mais encore d'une autre partie, à valeur moyenne nulle, qui se reproduise périodiquement d'une cellule à la cellule contiguë, en vertu d'une extension bien naturelle, aux effets de causes périodiques dans l'espace, du principe de Laplace relatif aux effets de causes périodiques dans le temps : alors, si, dans les trois équations de mouvement, dont chaque terme est supposé le produit d'un coefficient périodique par une dérivée de u, v ou w, on substitue à ce coefficient et à la dérivée considérée leurs valeurs moyennes locales augmentées des parties variables, et qu'après avoir développé les résultats on prenne les moyennes des équations analogues relatives aux divers éléments de volume d'une cellule, les produits des parties variables des coefficients par celles des dérivées des déplacements qui sont affectées de la même périodicité n'en disparaîtront pas généralement; car la solidarité qui lie leurs deux facteurs rend en général ces produits plus souvent positifs que négatifs ou réciproquement. On obtiendra donc, entre les dérivées des parties moyennes des déplacements u, v, w, d'autres équations que celles qu'on aurait eues si l'on avait réduit de prime abord, dans celles du mouvement, les coefficients et les fonctions u, v, w à leurs valeurs moyennes locales. Mais il semble qu'il ne doit plus en être de même *quand le milieu est isotrope*. Dans ce cas, en effet, nulle périodicité régulière n'existe à l'intérieur du milieu, et il est invraisemblable qu'il s'établisse la moindre concordance entre les parties variables, distribuées sans ordre au-dessus et au-dessous des valeurs moyennes locales, soit, d'une part, des coefficients qui entrent dans les équations, soit, d'autre part, des dérivées partielles des déplacements. On ne voit donc pas de raison pour que les produits respectifs de ces parties se trouvent, en moyenne, plutôt positifs que négatifs, et les équations que l'on obtient en prenant les moyennes des équations vraies de mouvement dans tout l'intérieur d'un petit volume ne doivent pas différer de celles qu'on aurait eues si l'on avait substitué simplement dans celles-ci, aux coefficients et à u, v, w, leurs valeurs moyennes locales. Ainsi l'hypothèse de la rapide variabilité des coefficients ne paraît pas conduire, dans le cas d'un corps isotrope, à d'autres conséquences que celle des coefficients constants : s'il en est ainsi, elle n'est pas propre à établir en particulier, comme il le faudrait pour expliquer la dispersion, que les valeurs moyennes locales des déplacements sont régies par des équations aux dérivées partielles du quatrième ordre en x, y, z et à coefficients constants, tandis que les déplacements eux-mêmes le seraient par des équations du second ordre à coefficients variables.

Il faut remarquer encore que la méthode même d'intégration, par laquelle on déduit d'équations linéaires du second ordre en u, v, w et à coefficients périodiques des équations d'ordre supérieur, à coefficients constants, dans lesquelles il ne reste plus d'autres fonctions que les valeurs moyennes locales de u, v, w, aurait besoin d'être examinée de plus près qu'on ne l'a fait jusqu'ici. Ce procédé constitue peut-être une des belles et des plus hardies conceptions de Cauchy; car, s'il est exact, il réalise la transformation la plus étonnante, ce me semble, qu'ait jamais opérée l'analyse mathématique; mais certaines difficultés, signalées par M. de Saint-Venant au n° 21 de l'Étude déjà citée, prouvent qu'il serait nécessaire d'établir, avant de l'employer, sa parfaite légitimité. Les géomètres accueilleront donc avec plaisir le Mémoire que M. Sarrau promet de publier prochainement et où il se propose de démontrer tout au moins, ce qui me paraît difficile, que cette méthode ne donne pas des résultats contradictoires, quand on l'applique au calcul des petits mouvements d'un corps isotrope et d'élasticité constante, mais de densité périodiquement variable, suivant qu'on laisse, dans les équations, la densité ρ en coefficient aux accélérations $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, $\frac{d^2w}{dt^2}$, ou suivant qu'on divise préalablement par ρ.

Enfin, même après avoir prouvé, si c'est possible, l'exactitude de la méthode de Cauchy, il serait encore bien à désirer qu'on pût établir les équations différentielles, d'ordre supérieur au second, qui régissent les valeurs moyennes locales de u, v, w, non-seulement dans la supposition d'ondes planes, à laquelle s'est borné jusqu'ici M. Sarrau, mais encore pour le cas plus général d'ondes ayant une courbure sensible, qu'il est souvent nécessaire de considérer.

Sur le calcul de la vitesse de la lumière dans les corps en mouvement [*].

Le résultat principal d'une analyse développée au § III d'une *Addition* à la *Théorie nouvelle des ondes lumineuses* (*Journal de Mathématiques*, t. XIII, 1868) consiste en ce que les équations qui régissent un système d'ondes lumineuses propagées à travers un corps en mouvement peuvent se déduire de celles qui représentent un système d'ondes de même direction et de même période vibratoire dans ce corps supposé immobile, en substituant simplement à la vitesse de propagation ω, relative au cas du repos, celle ω' qui convient au cas du mouvement, et à la densité ρ_1 de la matière pondérable le produit $\rho_1\left(1-\frac{V'}{\omega'}\right)^2$, où V' désigne la vitesse translatoire du corps, estimée dans le sens suivant lequel progressent les ondes.

J'ai montré que ce principe conduit, pour le cas où le rapport de V' à ω' est une petite quantité, et où l'on peut négliger, vis-à-vis de l'unité, le produit de ce rapport par chacun des trois pouvoirs dispersif, biréfringent, rotatoire, à la formule de Fresnel

$$(1)\qquad \omega' = \omega + \left(1-\frac{1}{N^2}\right)V',$$

ordinairement suffisante, et dans laquelle N représente l'indice de réfraction du corps; mais certaines observations de M. Mascart ont atteint un tel degré de précision, qu'il devient nécessaire de reprendre les calculs en comptant les plus influents des termes ainsi négligés, c'est-à-dire (si l'on se borne au cas d'un milieu isotrope symétrique

[*] Note présentée à l'Académie des Sciences, le 24 juin 1872; *Comptes rendus*, t. LXXIV, p. 1573.

comme le verre) ceux qui sont comparables au produit de V' par le pouvoir dispersif.

D'après une expression de ω^2 donnée après les relations (6) du Mémoire intitulé : *Théorie nouvelle des ondes lumineuses* (*Journal de Mathématiques*, même t. XIII), on a

$$(2) \qquad \omega^2 = \frac{\mu}{\rho + \rho_1 A}\left(1 + \frac{4D\pi^2\rho_1}{\mu}\frac{1}{\tau^2}\right),$$

μ et ρ désignant le coefficient d'élasticité et la densité de l'éther, A un coefficient positif et constant dépendant de la nature du corps transparent considéré, τ la durée de la vibration, enfin D une petite quantité, caractéristique du pouvoir dispersif, dont la partie principale est constante, mais qui égale plus exactement (*voir* § IV du même Mémoire) une série très-rapidement convergente ordonnée suivant les puissances négatives de $\tau^2\omega^2$. Cette série, par la substitution de valeurs de plus en plus approchées de ω^2, tirées successivement de (2), prend la forme

$$(3) \qquad D = D_0 + \frac{D_1}{\tau^2} + \frac{D_2}{\tau^4} + \frac{D_3}{\tau^6} + \ldots.$$

Lorsque le corps est en mouvement, l'application du principe énoncé ci-dessus conduit à changer la formule (2) en celle-ci :

$$(4) \qquad \omega'^2 = \frac{\mu}{\rho + \rho_1\left(1 - \frac{V'}{\omega'}\right)^2 A}\left[1 + \frac{4D\pi^2}{\mu}\rho_1\left(1 - \frac{V'}{\omega'}\right)^2\frac{1}{\tau^2}\right];$$

quant à la série D, ordonnée suivant les puissances négatives de $\tau^2\omega^2$, la substitution de ω' à ω n'y introduit que des variations négligeables, c'est-à-dire beaucoup plus petites que le produit de son terme principal et constant D_0 par le rapport de V' à ω'. On peut lui conserver la valeur (3) et y substituer même, à l'inverse de τ, l'expression très-peu différente

$$(5) \qquad \frac{1}{T} = \left(1 - \frac{V'}{\omega'}\right)\frac{1}{\tau} = \frac{\omega' - V'}{\tau\omega'}.$$

Les formules (3) et (4) deviennent ainsi

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} D &= D_0 + \frac{D_1}{T^2} + \frac{D_2}{T^4} + \ldots, \\ \omega'^2 &= \frac{\mu}{\rho + \rho_1 A}\left(1 + \frac{4D\pi^2\rho_1}{\mu}\frac{1}{T^2}\right)\left[1 - \frac{\rho_1 A}{\rho + \rho_1 A}\left(2\frac{V'}{\omega'} - \frac{V'^2}{\omega'^2}\right)\right]^{-1} \end{aligned}\right.$$

La seconde équation (6) donne, à une deuxième approximation, c'est-à-dire en y négligeant des termes de l'ordre de V'^2,

$$(7)\qquad \omega' = \sqrt{\frac{\mu}{\rho + \rho_1 A}\left(1 + \frac{4D\pi^2\rho_1}{\mu}\frac{1}{T^2}\right)} + \frac{\rho_1 A}{\rho + \rho_1 A} V'.$$

Le premier terme du second membre de l'expression (7) est la valeur de la vitesse avec laquelle se propageraient, à travers le corps supposé immobile, des ondes pour lesquelles la période de vibration, au lieu d'être τ, serait T : je le représenterai par $F\left(\frac{1}{T^2}\right)\cdot$ Cette valeur, en négligeant la dispersion, ou, ce qui revient au même, en y faisant T un peu grand, se réduit à $\sqrt{\frac{\mu}{\rho + \rho_1 A}}$, et son rapport à la vitesse $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ de la lumière dans l'éther libre, rapport égal à $\sqrt{\frac{\rho}{\rho + \rho_1 A}}$, est l'inverse de l'indice N de réfraction du corps, abstraction faite de la dispersion. Il en résulte que la relation (7) peut s'écrire

$$(8)\qquad \omega' = F\left(\frac{1}{T^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{N^2}\right) V'.$$

Il ne reste plus, pour la traduire en langage ordinaire, qu'à chercher ce que représente la quantité T définie par la formule (5). Concevons, pour cela, un observateur qui participerait au mouvement du corps transparent, et par rapport auquel les ondes seraient par suite animées d'une vitesse de propagation égale à $\omega' - V'$. Cet observateur verrait passer à côté de lui, dans l'unité de temps, un nombre d'ondes égal au quotient de $\omega' - V'$ par la longueur d'onde $\tau\omega'$, c'est-à-dire justement à l'inverse de T, et T représenterait pour lui la durée de la vibration.

La formule (8) équivaut donc à la loi suivante : *Lorsqu'un corps* *transparent, isotrope symétrique, se transporte dans l'espace avec une vitesse dont le rapport à celle de la lumière est très-petit et a son carré négligeable, la vitesse de propagation des ondes lumineuses qui le traversent est sensiblement la somme 1° de la vitesse avec laquelle se propageraient, à travers le même corps supposé en repos, des ondes lumineuses ayant, pour un observateur placé sur le corps, la même période apparente de vibration que celles qu'on étudie, et 2° du produit de la vitesse translatoire du corps, estimée dans la direction suivant laquelle progressent les ondes, par l'excès, sur l'unité, du carré de l'inverse de son indice de réfraction relatif à des radiations d'une longueur d'onde assez grande pour que l'influence de la dispersion y soit insensible.*

Cette loi diffère de celle de Fresnel, exprimée par la formule (1), en ce que, dans la partie principale ω du second membre de celle-ci, la durée de la vibration est remplacée par sa valeur apparente T, ce qui augmente à fort peu près cette partie de $-\frac{4D\pi^2\rho_1}{\mu\tau^2}V'$. D'autre part, M. Mascart a été conduit par ses observations à une formule pareille à l'équation (8), mais dans laquelle il désigne par N l'indice de réfraction relatif à des ondes de période τ ou T; ce qui revient à ajouter encore à l'expression de ω' la quantité $-\frac{4D\pi^2\rho_1}{\mu t^2 N^2}V'$, plus petite que le terme correctif précédent dans le rapport de N^2 à 1. Je ne sais si ces observations prouvent l'existence du second terme correctif, que ma théorie n'indique pas, aussi bien que celle du premier [*]. Si elles avaient atteint une précision suffisante pour cela, il faudrait en conclure, ce me semble, que les vitesses translatoires de l'éther traversé par un corps en mouvement ne sont pas entièrement négligeables, en comparaison de la vitesse de la lumière, ou encore que l'élasticité et la densité de cet éther diffèrent un peu de celles de l'éther libre; ce qui rendrait seulement très-approchées, et non exactes jusqu'au delà de

---

[*] Depuis que cet article a paru aux *Comptes rendus*, M. Mascart, avec qui j'ai eu l'honneur de m'entretenir du sujet qui s'y trouve traité, m'a déclaré qu'il n'y avait aucune contradiction entre la formule (8) ci-dessus et les résultats de ses expériences, vu que celles-ci prouvent seulement la nécessité d'introduire, dans l'expression de la vitesse ω', la période apparente T de vibration au lieu de la période réelle τ.

toute limite accessible à l'expérience, les hypothèses admises dans mon Mémoire de 1868, cité au commencement de cet article [*].

Sur le calcul des phénomènes lumineux produits à l'intérieur des milieux transparents animés d'une translation rapide, dans le cas où l'observateur participe lui-même à cette translation [**].

Au § III d'une Addition au Mémoire intitulé *Théorie nouvelle des ondes lumineuses* (*Journal de Mathématiques*, t. XIII, p. 433; 1868), et dans une Note du 24 juin 1872, insérée au t. LXXIV des *Comptes rendus* (p. 1573), j'ai établi des formules qui représentent la propagation des ondes lumineuses dans l'éther traversé par un corps en mouvement; mais je rapportais les déplacements vibratoires u, v, w de l'éther et ceux u_1, v_1, w_1 de la matière pondérable à un système d'axes rectangulaires des x, y, z, fixes par rapport au milieu éthéré, de manière à obtenir les directions et les vitesses de propagation des rayons telles que les percevrait un observateur non entraîné avec le corps. Or, quand on étudie l'influence du mouvement de translation de la Terre sur des phénomènes lumineux produits à sa surface, l'observateur, le corps transparent et même, en général, la source de lumière

[*] Au § II du même Mémoire, j'ai donné, pour expliquer la rotation du plan de polarisation par le magnétisme, une théorie simple que je croyais être la première, et qui rend compte de toutes les lois expérimentales du phénomène. J'ai appris depuis que M. Charles Neumann, de Halle, s'était déjà occupé du même sujet dans sa thèse de doctorat soutenue le 29 mai 1858 : il y déduit, de plusieurs hypothèses et de calculs assez compliqués dont il ne donne pas le détail, des équations différentielles des mouvements de l'éther dans lesquelles les termes provenant de l'action magnétique reviendraient précisément à ceux que ma théorie introduit, s'ils s'y trouvaient différentiés deux fois de plus par rapport au temps. Cette différence est cause que le savant géomètre physicien obtient un pouvoir rotatoire indépendant de la longueur d'onde, abstraction faite du petit pouvoir dispersif ordinaire du corps, et non un pouvoir rotatoire qui soit sensiblement en raison inverse du carré de cette longueur d'onde, conformément à l'expérience. Les autres lois du phénomène s'appliqueraient d'ailleurs par sa théorie, antérieure à la mienne de dix ans.

[**] Note présentée à l'Académie des Sciences, le 26 mai 1873; *Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 1293.

n'ont aucun mouvement relatif, et possèdent, par rapport à l'éther, une vitesse commune, dont j'appellerai V_1, V_2, V_3 les composantes suivant les trois axes; il est alors plus avantageux de rapporter les déplacements à un système d'axes des x', y', z', parallèles à ceux des x, y, z, mais animés de ce mouvement, ou, ce qui revient au même, de supposer l'observateur, la source et le corps transparent en repos, tandis que l'éther serait emporté avec une vitesse égale et contraire $(-V_1, -V_2, -V_3)$. Si l'on admet que, pour $t = 0$, l'origine des coordonnées x', y', z' coïncide avec celle des coordonnées x, y, z, et si l'on observe que les composantes V_1, V_2, V_3 de la vitesse relative de translation peuvent être supposées constantes pendant un intervalle comparable à la durée d'un grand nombre de vibrations, on aura, entre ces coordonnées, les relations simples

$$(1) \qquad x = x' + V_1 t, \quad y = y' + V_2 t, \quad z = z' + V_3 t,$$

et les déplacements vibratoires u, v, w, u_1, v_1, w_1, fonctions de x, y, z, t, deviendront des fonctions de x', y', z', t', en accentuant provisoirement la variable $t' = t$. Leurs dérivées se transformeront, par suite, au moyen des formules symboliques

$$(2) \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx'}, \quad \frac{d}{dy} = \frac{d}{dy'}, \quad \frac{d}{dz} = \frac{d}{dz'}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'} - V_1 \frac{d}{dx'} - V_2 \frac{d}{dy'} - V_3 \frac{d}{dz'},$$

et la première des trois équations indéfinies du mouvement, établie au § III cité (formule 33),

$$(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta_2 u = \rho \frac{d^2 u}{dt^2} + \rho_1 \left(\frac{d}{dt} + V_1 \frac{d}{dx} + V_2 \frac{d}{dy} + V_3 \frac{d}{dz} \right)^2 u_1,$$

où λ, μ, ρ désignent les deux coefficients d'élasticité et la densité de l'éther, ρ_1 la densité de la matière pondérable, θ la dilatation cubique $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$ de l'éther, Δ_2 l'expression symbolique $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$, deviendra

$$(3) \quad (\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx'} + \mu \Delta_2 u = \rho \left(\frac{d}{dt} - V_1 \frac{d}{dx'} - V_2 \frac{d}{dy'} - V_3 \frac{d}{dz'} \right)^2 u + \rho_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2}.$$

Substituons, dans cette équation et dans les deux autres analogues, les valeurs de u, v, w et par conséquent celles de u_1, v_1, w_1, qui correspondent à un système d'ondes planes, dont la normale fait avec les axes des angles ayant les cosinus m, n, p, et pour lesquelles j'appellerai T la période vibratoire apparente, c'est-à-dire l'intervalle de temps qui séparera les commencements de deux vibrations consécutives imprimées par l'éther à une molécule des corps transparents considérés. Ces valeurs seront les parties réelles de trois intégrales simples proportionnelles à l'exponentielle $e^{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{mx'+ny'+pz'}{\omega'}\right)\sqrt{-1}}$, ω' désignant la vitesse de propagation apparente ou par rapport à un observateur lié aux axes des x', y', z'. A cause de cette proportionnalité, on aura

$$(4) \qquad \frac{d}{dt} - V_1\frac{d}{dx'} - V_2\frac{d}{dy'} - V_3\frac{d}{dz'} = \left(1 + \frac{V_1 m + V_2 n + V_3 p}{\omega'}\right)\frac{d}{dt},$$

et, si l'on appelle V' la composante $V_1 m + V_2 n + V_3 p$, suivant la normale aux ondes, de la vitesse translatoire, l'équation (3) pourra s'écrire

$$(5) \qquad (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx'} + \mu\Delta_2 u = \rho\left(1+\frac{V'}{\omega'}\right)^2\frac{d^2u}{dt^2} + \rho_1\frac{d^2u_1}{dt^2}.$$

Elle ne diffère de celle qu'on obtiendrait, si le corps était fixe, qu'en ce que la densité ρ de l'éther y est multipliée par l'expression $\left(1+\frac{V'}{\omega'}\right)^2$. Observons d'ailleurs : 1° que les conditions relatives aux surfaces de séparation de deux milieux, ou *conditions de continuité*, s'exprimeront de la même manière, ou seront analytiquement les mêmes, pour un système de corps contigus animés d'un mouvement commun et rapportés à des axes possédant ce mouvement, que pour le même système supposé en repos au sein de l'éther; 2° que, dans le cas ordinaire où la source lumineuse participe à la translation, la durée apparente de la vibration se confond avec sa durée réelle, et la formule (5), jointe à deux autres analogues, permettra d'énoncer la loi suivante :

Les phénomènes lumineux que perçoit un observateur entraîné, dans un mouvement commun de translation par rapport à l'éther, avec la source de lumière et avec les milieux interposés, ne diffèrent pas de ceux qu'il observerait en regardant la même source à travers les mêmes milieux transparents, si, la translation n'existant pas, la *densité de l'éther devenait, dans chaque milieu respectif et pour des ondes d'une direction déterminée, plus grande qu'elle n'est dans le rapport de l'unité au carré de la somme de l'unité et du quotient de la composante de la vitesse translatoire suivant la normale aux ondes par la vitesse de propagation de celles-ci à travers le milieu considéré.*

En particulier, toutes les fois que la translation se fera parallèlement au plan des ondes, leur vitesse de propagation et le mode de polarisation des vibrations n'en seront nullement modifiés.

J'espère que cette méthode permettra de calculer, plus simplement que toute autre, les phénomènes qui se produiraient dans le cas où l'éther ne participerait pas sensiblement, tout près de la surface terrestre, au mouvement de la Terre, et de confirmer ou d'infirmer par suite cette hypothèse, au moyen de la comparaison des résultats théoriques auxquels elle conduira avec ceux de l'observation. L'expérience de M. Fizeau sur la propagation de la lumière à travers une colonne liquide en mouvement a bien prouvé que l'éther n'est pas entraîné d'une manière appréciable par un corps animé d'une certaine vitesse relative à la surface de notre globe, et bien que les ondes soient alors partiellement entraînées; mais il pourrait se faire que l'éther qui nous entoure possédât une partie plus ou moins grande de la vitesse même de translation de la Terre, soit à cause des dimensions de celle-ci, dimensions incomparablement plus considérables que celles des corps sur lesquels portent nos expériences et lui permettant d'agir incomparablement plus sur les couches d'éther qu'elle traverse, soit encore à cause d'un mouvement propre de translation, autour du Soleil, qui animerait les couches d'éther dans lesquelles nous nous trouvons, circonstance dont l'aberration des étoiles fixes ne paraît pas devoir dépendre.