JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Note sur la théorie des tourbillons liquides

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 391-392.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__391_0>

Note sur la théorie des tourbillons liquides;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

Aux §§ XI et XII d'un Mémoire *Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides* (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XIII, 1868) j'ai obtenu les équations générales qui régissent l'écoulement bien continu d'un liquide dans un tuyau ou dans un canal à axe circulaire et de section constante, quand les vitesses se trouvent distribuées de la même manière sur toutes les sections normales. J'ai démontré en particulier que la pression p est alors la même aux points homologues de toutes ces sections, à part un terme proportionnel à leur inclinaison variable α sur le plan de l'une d'elles et à une constante c qui dépend du mode d'écoulement [*].

Le cas le plus simple, pour lequel la constante c est nulle, parce que la pression p doit redevenir la même lorsque α croît de 360 degrés, se présente quand le liquide est mû dans un espace annulaire complet, compris entre un cylindre plein vertical de rayon r_0, animé d'une vitesse de rotation donnée, et un cylindre creux conaxique, d'un rayon plus grand r_1, animé d'une vitesse de rotation également connue. Ce problème intéressant, que Newton le premier a essayé de traiter [**], revient, dans le cas plus particulier $r_1 = \infty$, à l'étude du tourbillon permanent qu'on produit en faisant tourner uniformément sur son axe un cylindre solide vertical immergé en partie dans une eau en repos.

Si le cylindre de rayon r_0 et aussi celui de rayon r_1 (quand il existe) plongent assez profondément pour que la dérivée $\frac{dv}{dz}$ de la vitesse dans le sens vertical (de bas en haut) soit beaucoup plus petite que sa dérivée $\frac{dv}{dr}$ dans le sens des rayons r, les filets fluides seront approximativement circulaires et conaxiques, et l'intégrale (36) (§ XI cité) de

[*] On remarquera que, dans le § XII du Mémoire cité, la constante c désigne la dérivée $\frac{-dp}{d\alpha}$, et non, comme au § XI, le quotient de cette dérivée par le coefficient des frottements intérieurs.

[**] *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, IXe section, prop. LI.

l'équation du mouvement, intégrale qui équivaut, avec deux constantes arbitraires M, N, à $v = -\frac{c}{2} r \log \frac{r}{r_0} + \mathrm{M}r + \frac{\mathrm{N}}{r}$, deviendra simplement $v = \mathrm{M}r + \frac{\mathrm{N}}{r}$.

On déterminera M et N au moyen des deux conditions relatives aux parois et qui ont lieu, l'une pour $r = r_0$, l'autre pour $r = r_1$. Dans le cas, particulièrement intéressant, où $r_1 = \infty$, la condition concernant la paroi extérieure ou concave reviendra toujours à dire que la vitesse ne doit pas devenir infinie pour $r = \infty$, et l'on devra poser $\mathrm{M} = 0$, ou $v = \frac{\mathrm{N}}{r}$; d'où la loi suivante, indiquée par Léonard de Vinci, observée par Venturi [*] et démontrée, tout autrement que ci-dessus, par M. de Saint-Venant [**], qui a repris le calcul de Newton en évitant deux erreurs signalées, l'une par Jean Bernoulli, l'autre par d'Alembert : *La vitesse, dans les tourbillons, est en raison inverse de la distance à l'axe.*

L'expression (41) (§ XI) de la pression p, si l'on y fait $c = 0$ et qu'on l'égale à celle de l'atmosphère, donne l'équation de la surface libre

$$z = \text{const} + \frac{1}{g} \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{V}^2}{r}\, dr = \text{const} + \frac{\mathrm{N}^2}{2g}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right).$$

Le coefficient angulaire $\frac{dz}{dr}$ de la tangente à un méridien de cette surface vaut $\frac{v^2}{gr}$ et décroît sans cesse quand r grandit, du moins lorsqu'on a $r_1 = \infty$ ou $\mathrm{M} = 0$. *La surface libre du tourbillon est,* par conséquent, *un entonnoir dont le demi-méridien tourne sa concavité vers en bas,* à l'inverse de ce qui arrive pour une masse liquide animée d'un simple mouvement de rotation, ou dans laquelle la vitesse v est proportionnelle à r, et dont la surface est un paraboloïde de révolution concave vers en haut.

---

[*] *Essai sur les Ouvrages physico-mathématiques de Léonard de Vinci, lu par Venturi,* en 1797, *à l'Institut,* fragm. 10$^{\mathrm{e}}$ et Observations à la suite, ou encore *Recherches sur la communication latérale du mouvement dans les fluides,* prop. XI.

[**] *Mémoire sur l'Hydrodynamique des cours d'eau* (*Comptes rendus,* t. LXXIV, 26 février 1872), note au bas de la quatrième page.