JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

YVON VILLARCEAU

Nouveaux théorèmes sur les attractions locales et applications à la détermination de la vraie figure de la Terre

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 393-436.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__393_0>

Nouveaux théorèmes sur les attractions locales et applications à la détermination de la vraie figure de la Terre;

Par M. YVON VILLARCEAU.

Nous avons publié, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (2ᵉ série, t. XII, 1867), un premier théorème sur les attractions locales, qui établit une relation entre les effets de ces attractions sur les longitudes et les azimuts. Deux applications de ce théorème ont été, l'une simplement indiquée, l'autre effectivement réalisée. On a vu comment il permet d'établir des équations de condition propres à la détermination des corrections des éléments du calcul géodésique, équations qui doivent être vérifiées, *quelles que soient les attractions locales*. Enfin on a fait voir avec quelle facilité peut être contrôlée l'exactitude des chaînes de triangles orientées suivant les méridiens ou les parallèles; ce contrôle n'exige pour ainsi dire aucun calcul. Une application numérique a été faite à la partie de la méridienne de France qui s'étend de Paris à Carcassonne, et aux deux portions occidentale et orientale du parallèle de Paris : il s'est trouvé qu'une seule de ces diverses chaînes de triangles, la chaîne de Paris à Strasbourg, ne présente aucune erreur inadmissible, bien que la différence entre les longitudes astronomique et géodésique s'élève à $8'',1$ pour Strasbourg. L'absence de mesures astronomiques d'azimuts en beaucoup de stations a empêché d'étendre ce mode de contrôle à d'autres chaînes principales de notre réseau trigonométrique.

Depuis lors, nous avons fait connaître deux autres théorèmes sur les attractions locales, où figurent les latitudes combinées soit avec les longitudes, soit avec les azimuts, soit enfin avec ces deux éléments réunis : ces nouveaux théorèmes, indépendamment d'une équation de condition entre les résultats astronomiques et géodésiques propre à leur servir de contrôle, offrent deux solutions distinctes d'un problème qu'on n'avait pas même abordé en Géodésie, celui de la détermination des surfaces de niveau ou de la *vraie* figure de la Terre. En effet, on s'était borné jusque-là à rechercher les dimensions d'un ellipsoïde de révolution ou même d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, qui fût de nature à établir le plus grand accord possible entre les résultats des mesures astronomiques et ceux des calculs géodésiques, laissant aux attractions locales et aux erreurs des opérations à rendre compte des discordances persistantes. On n'avait pas songé à utiliser les effets des attractions locales pour évaluer les quantités dont la surface de niveau des mers, prolongée idéalement au travers des continents, peut s'écarter de celle du sphéroïde regardé comme le mieux déterminé. A notre sens, ce sphéroïde ne doit être considéré que comme une surface de comparaison, facilitant la discussion de la figure des surfaces de niveau. On remarquera sans doute que le plus ou moins grand degré d'exactitude des éléments géométriques du sphéroïde de comparaison sont sans influence sensible sur la détermination de la figure des surfaces de niveau : les relations entre ces surfaces et celles du sphéroïde changent en même temps que les éléments du sphéroïde, sans que néanmoins il en résulte de modification dans la figure des surfaces de niveau.

Il nous paraît nécessaire de prévenir une objection à notre manière d'envisager le problème de la vraie figure de la Terre. Pourquoi, dira-t-on, ne pas faire intervenir la mesure de la longueur du pendule aux stations astronomiques? Voici notre réponse. Supposons que l'on se propose de déterminer la figure de la Terre en faisant concourir au résultat les données de l'Astronomie, celles de la Géodésie, et les observations de la longueur du pendule. On établira les relations qui lient les données et les diverses inconnues de ce problème complexe, et l'on procédera à l'élimination successive des inconnues. Or parmi ces dernières figureront les trois composantes des attractions locales, et l'on reconnaîtra que, s'il existe deux rapports bien déterminés entre deux de ces composantes et leurs effets sur les latitudes et longitudes, ces composantes ne figurent pas explicitement dans les relations purement géométriques que fournissent les données de l'Astronomie et de la Géodésie. Dès lors, il est clair que l'élimination des trois composantes se trouvera réalisée par la simple division du problème en deux autres, l'un consistant à déterminer la figure de la Terre au moyen des données géométriques que fournissent l'Astronomie et la Géodésie, et qui suffisent à cette détermination, l'autre dont l'objet est la distribution des densités dans la masse terrestre. La solution du premier problème doit donc être obtenue indépendamment de celle du second, au moins dans une première approximation [*].

Nous regretterions d'insister sur des considérations aussi élémentaires, si des hommes de science, dominés par les souvenirs de mémorables expéditions, n'avaient, à diverses reprises, émis l'opinion que les observations du pendule doivent être utilisées dans l'étude de la figure de la Terre.

La longue interruption des travaux d'Astronomie géodésique entrepris par l'Observatoire de Paris, interruption qui remonte à 1866, nous a laissé le loisir d'examiner le problème de la figure de la Terre sous différentes faces, et d'en présenter plusieurs solutions; il nous a été possible de fixer nos idées sur le choix des méthodes les plus propres à atteindre le but : dès lors, il pourrait sembler utile de nous borner à exposer les principes de celles auxquelles nous donnons la préférence. Nous croyons néanmoins devoir reproduire ici les divers Mémoires que nous avons publiés sur ce sujet dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences;* le lecteur pourra apprécier

[*] On est obligé, dans une première approximation, de négliger le défaut de parallélisme exact des directions des verticales menées par différents points d'une droite normale à la surface de niveau que l'on considère, et qui est produit par le défaut de parallélisme des surfaces de niveau que rencontre cette normale. On n'aurait à redouter aucune erreur de ce côté, si toutes les stations astronomiques étaient établies sur une même surface de niveau. En négligeant la différence des directions de la pesanteur à l'altitude de la station et au point correspondant du niveau de la mer, on commet une erreur du même ordre qu'en employant, dans le calcul des coordonnées géodésiques, les projections des distances des stations sur la surface de niveau des mers, au lieu d'employer les projections des mêmes distances sur la surface de l'ellipsoïde de comparaison. Les quantités négligées de cette manière sont d'un ordre supérieur, et il n'est possible d'y avoir égard qu'après avoir obtenu une solution approchée du problème.

les motifs de cette préférence. D'un autre côté, il ne sera peut-être pas sans intérêt de suivre la filiation des idées qui nous a conduit au résultat cherché.

En reproduisant les Mémoires dont il s'agit, nous ne nous permettrons d'autres modifications que celles de leurs titres. S'il nous arrive d'avoir à présenter quelques remarques sur des points déterminés de ces Mémoires, nous le ferons, dans des notes qui seront distinguées de celles faisant partie primitivement des mêmes Mémoires, en les faisant précéder des lettres *P. S.*

Un travail présenté sous une telle forme ne peut évidemment être jugé qu'après une lecture de son ensemble; aussi ferons-nous dans ce sens un appel à la patience du lecteur.

Second théorème sur les attractions locales et première détermination de la vraie figure de la Terre, fondée sur la comparaison des nivellements géodésiques et géométriques.

(*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome LXVII, séance du 28 décembre 1868.)

L'Association géodésique internationale pour la mesure des degrés en Europe se préoccupe vivement des moyens de tenir compte de l'effet des attractions locales, dans la détermination de la figure de la Terre. Cette question a été agitée lors de la réunion triennale tenue à Berlin en 1867, et la Commission chargée de l'examen des divers moyens proposés s'est déjà prononcée contre le mode d'évaluation qui consiste à calculer les attractions dues au relief du terrain, au moyen d'une valeur approchée de sa densité [*]. Les membres de ladite

---

[*] *P. S.* La Commission s'est occupée tout particulièrement de la question : s'il conviendrait d'entreprendre dans quelques points astronomiques principaux, ou même dans tous, des recherches semblables à celles qui ont été entreprises dans plusieurs points astronomiques de l'arc mesuré en Angleterre, où l'on a tenu compte des déviations locales *a priori*, en se fondant sur le relief et la densité du sol. La Commission ne croit pas pouvoir recommander ce procédé.... (*Comptes rendus de la Conférence géodésique internationale...*, réunie à Berlin du 30 septembre au 7 octobre 1867, p. 85 et 86.)

Commission se sont montrés favorables à l'emploi de théorèmes généraux sur les effets des attractions locales, théorèmes annoncés par l'un d'eux, M. Schering, mais non encore publiés [*]. Constatons, en passant, que nous avions nous-même donné la préférence à ce mode d'investigation, en présentant à l'Académie, en 1866, un théorème dont le théorème de Laplace est un cas particulier. L'un de ceux que M. Schering a découverts est également une généralisation du théorème de Laplace, et son savant auteur nous fait espérer une prochaine publication, dans laquelle il fera connaître en quoi son résultat diffère du mien [**]. J'aurais pu, dès 1866, indiquer un nouveau théorème, et je ne l'ai pas fait, parce que la possibilité de son application me paraissait encore éloignée. L'Académie voudra bien me permettre de lui présenter dès à présent un résultat dont la communication n'offrirait peut-être plus d'intérêt, si j'attendais que M. Schering eût fait connaître les nouveaux théorèmes qu'il annonce.

Considérons le sphéroïde défini, sur la surface duquel on fixe les positions géodésiques des sommets des triangles d'un réseau trigono-

---

[*] *P. S.* Nous extrayons du même Recueil, p. 86, les lignes suivantes :

« M. Schering croit pouvoir insister particulièrement sur ces théorèmes (concernant les attractions locales), parce qu'ils lui semblent ajouter de la force aux autres raisons qui militent pour l'importance de la détermination, au même endroit, de toutes les trois coordonnées astronomiques, azimuts, latitudes et longitudes, ainsi que pour l'utilité d'une distribution uniforme des stations astronomiques sur tout le terrain mesuré trigonométriquement. »

» La Commission a accueilli avec reconnaissance ces Communications de M. Schering, et elle croit y voir un nouveau motif pour le principe établi déjà, il y a trois ans, de faire les trois déterminations astronomiques dans le plus grand nombre possible de points, *uniformément distribués;* mais la Commission a dû se refuser à discuter ce sujet de plus près, parce que les théorèmes dont M. Schering a parlé *n'ont pas encore été publiés*. Cependant la Commission a cru, dans l'intérêt de la cause, devoir prier M. Schering de hâter cette publication autant que possible, et elle espère que la Conférence se joindra à cette résolution de la Commission. »

[**] *P. S.* L'Association géodésique internationale m'a fait l'honneur d'insérer, dans son *General Bericht* pour 1866, plusieurs de mes Mémoires sur la Géodésie et, entre autres, le premier théorème sur les attractions locales; mais ce théorème n'a pas été mentionné dans la réunion de la Commission chargée, en 1867, d'examiner la question des attractions locales. Cependant il y avait quelque intérêt à comparer deux

métrique, et la normale menée par un point de sa surface; par le même point, menons une parallèle à l'axe du monde (côté boréal) : le méridien géodésique du lieu est le plan mené par ces deux droites; la colatitude géodésique est l'angle de ces mêmes droites, et la longitude géodésique l'angle formé par le méridien géodésique et un premier méridien donné : telles sont les définitions.

Par un point de station M, pris pour centre d'une sphère, menons trois droites : l'une normale au sphéroïde, la deuxième dans la direction d'un signal B, et la troisième dans la direction du pôle boréal; les trois plans menés par ces droites détermineront un triangle sphérique. Soient A, B, C les trois angles de ce triangle, répondant respectivement aux points où les trois droites percent la sphère; a, b, c les trois côtés opposés : ces côtés seront respectivement égaux à la distance polaire du signal B, à la colatitude géodésique du lieu M et à la distance angulaire de la droite MB à la normale menée par le point M. Dans ce triangle sphérique, on aura la relation

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \tag{1}$$

---

théorèmes que leurs auteurs considèrent comme des extensions du théorème de Laplace. Ce *desideratum* a été signalé au général Bayer, président de la Conférence, et j'ai reçu à cette occasion les explications suivantes de M. Schering :

« ... Je m'empresse de vous assurer que ce n'est pas par oubli ou par ignorance que, dans mon annonce de deux théorèmes géodésiques, je n'ai pas mentionné vos .... travaux sur cette profonde théorie : c'est seulement à cause de l'impossibilité où je me trouvais de marquer, *sans entrer en matière*, la différence qui existe entre l'étendue de votre théorème et le mien, qui sont tous deux des généralisations du théorème de Laplace....

» ... J'espère trouver bientôt le temps pour la publication de mes autres recherches géodésiques, et je ne doute pas que vous ne soyez bien satisfait de la manière dont je témoignerai de ma vive estime pour les grands progrès tout récents et bien connus dont cette science vous est redevable....

» ... L'intérêt commun pour le progrès des sciences vous fera pardonner si mon peu d'usage de m'exprimer en français m'empêche de vous dire, aussi bien que je le désire, combien j'estime votre sagacité bien nécessaire pour appliquer tous les secours que la science peut offrir à la détermination de la surface géodésique, si irrégulière, et combien je me sens obligé par la bienveillance avec laquelle vous traitez la discussion d'un cas concernant l'histoire de la science. »

Remplaçons maintenant, dans ce triangle, la direction de la normale au sphéroïde par la vraie direction de la verticale, résultant des attractions locales et autres, en conservant les directions qui aboutissent aux points B et C, et désignons par A', B', C', a', b', c' les angles et les côtés homologues du nouveau triangle : les deux triangles n'auront de commun que les deux côtés a et a'. Si nous différentions la formule précédente, en y supposant a constant, nous aurons une relation entre les différentielles des quantités homologues dans les deux triangles. Effectuant la différentiation et les réductions qui résultent des relations entre les éléments du triangle, puis remplaçant les différentielles par les différences finies, on trouve

$$(2) \qquad \delta c = \cos A\, \delta b + \sin A \sin b\, \delta C.$$

Ici et dans tout ce qui va suivre, nous négligeons les quantités du second ordre.

Pour nous conformer aux usages géodésiques, nous remplacerons l'azimut A par son supplément $180° - Z$; Z désignant l'azimut de B compté du sud vers l'ouest. Désignons par z la distance angulaire c de B à la normale, et z' la distance zénithale vraie du même point B; nous aurons $\delta c = z' - z$. D'autre part, L désignant la latitude géodésique du point M, et L' sa latitude vraie, nous avons $b = 90° - L$, $b' = 90° - L'$; d'où $\delta b = -(L' - L)$. Enfin, désignant par $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ les longitudes géodésique et astronomique de M, comptées dans le sens de l'est à l'ouest, on a $C + \mathfrak{L} = C' + \mathfrak{L}'$; d'où $\delta C = -(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L})$. Au moyen de ces diverses valeurs, l'équation (2) devient

$$(3) \qquad z' - z = \cos Z (L' - L) - \sin Z \cos L (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}).$$

Cette expression peut être mise sous une autre forme. En effet, si nous différentions l'équation qui lie l'angle A aux côtés a et b et à l'angle C, en supposant toujours a constant, on trouve

$$(4) \qquad \sin c\, \delta A + \cos c \sin A\, \delta b + \sin a \cos B\, \delta C = 0,$$

équation équivalente à celle d'où nous avons déduit notre premier théorème sur les attractions locales. Éliminons δC entre cette équation et l'équation (2), il viendra

$$\cos B\,\delta c = -\sin C \sin b\,\delta A - \cos C\,\delta b.$$

En ayant égard à ce que $\delta A = -(Z' - Z)$, et aux valeurs ci-dessus de b, c et δb, on trouve finalement

$$(5) \qquad \cos B\,(z' - z) = \sin C \cos L\,(Z' - Z) + \cos C\,(L' - L) \quad [*].$$

Par cette transformation, on a substitué les azimuts aux longitudes.

Les relations (3) ou (5) constituent le nouveau théorème; il s'agit d'en préciser la signification : c'est ce que nous allons faire en montrant comment on peut l'appliquer.

Concevons qu'au moyen du plus grand nombre possible de comparaisons entre les coordonnées astronomiques et géodésiques, et faisant l'usage le plus convenable de théorèmes sur les attractions locales, on soit parvenu à fixer les éléments du sphéroïde, de manière à laisser subsister entre les résultats astronomiques et géodésiques les moindres différences, on n'aura pas, pour cela, résolu le problème de la détermination de la figure de la Terre. Les résultats du calcul feront connaître, il est vrai, les effets des attractions locales sur les longitudes et latitudes; mais il restera à mesurer leurs effets sur les altitudes. La surface que l'on aura obtenue n'est, à proprement parler, qu'une surface de comparaison, qui se confondrait avec la surface de niveau des mers, prolongée au travers des continents, s'il n'existait pas d'attractions locales; mais, à cause de ces attractions, les deux surfaces ne se confondent pas : or, si l'on peut parvenir à déterminer les distances qui séparent ces surfaces dans le sens des normales à l'une d'entre elles, on aura par le fait même déterminé la figure de l'autre. Voici comment l'emploi du nouveau théorème semble permettre d'atteindre ce résultat.

---

[*] Le facteur $\cos B$ peut introduire dans la valeur de $(z' - z)$ une indétermination qu'il conviendrait d'éviter. Or $\cos B$ s'annule pour les stations équatoriales, si le signal B est observé dans une direction perpendiculaire au méridien : il faudrait donc éviter, dans le voisinage de l'équateur, de suivre une ligne de nivellement qui s'écarte trop de la direction méridienne.

Les valeurs de $(L' - L)$ et $(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L})$ ou $(Z' - Z)$, relatives au point M, étant censées connues par la détermination des éléments du sphéroïde de comparaison, et la distance zénithale vraie z' obtenue directement par l'observation, l'équation (3), ou l'équation (5) suivant les cas, fera connaître, pour le point M et le signal B, la valeur de z. Maintenant imaginons que les divers points du réseau aient été rattachés par un nivellement géométrique étendu jusqu'à l'Océan; on connaîtra les cotes absolues de tous les sommets des triangles, c'est-à-dire leurs altitudes au-dessus de la surface de niveau de l'Océan prolongée.

Soit h' l'altitude ainsi définie du point B; soient, d'autre part, h_0 l'altitude du point M au-dessus de la surface du sphéroïde pris pour surface de comparaison; h l'altitude du point B rapportée à la même surface : connaissant les coordonnées géodésiques des points M et B, on obtiendra, par la simple application des méthodes de la Géométrie analytique, la différence des altitudes h et h_0, ou la valeur de h si h_0 est connu [*]. Il suffira d'effectuer le même calcul sur les divers côtés du réseau, pour obtenir de proche en proche les altitudes des divers sommets, en fonction de l'altitude h_0 de l'un d'entre eux, qui reste indéterminée. On aura ainsi les diverses valeurs de $h' - h$ en fonction de l'indéterminée h_0, et celle-ci pourra s'obtenir en posant une condition telle que serait, par exemple, celle du minimum de la somme $\Sigma(h' - h)^2$. Dès lors, chaque valeur de $h' - h$ étant connue, cette valeur prise en signe contraire ou celle de $h - h'$ exprimera l'ordonnée de la surface de niveau par rapport à la surface de comparaison en

---

[*] On aperçoit aisément que la solution de cette question est fournie précisément par les formules du nivellement géodésique, et que, à part les précautions à prendre relativement aux réfractions, il suffira d'introduire dans ces formules l'angle z à la place de l'angle z' observé, ou bien d'employer l'angle z' corrigé de la quantité $-(z' - z)$, que l'on tire de l'équation (5). De cette manière, le problème de la détermination des cotes de la surface de niveau rapportées à la surface de comparaison est résolu par la comparaison des résultats obtenus dans les nivellements géodésique et géométrique, le premier étant corrigé des effets des attractions locales. Il va sans dire que la mesure de la différence de niveau des points M et B par rapport à la surface de comparaison nécessitera, à cause des réfractions, l'observation, à la station B, de la distance zénithale du point M, et que cette distance zénithale devra recevoir la correction $-(z' - z)$ dépendant des attractions locales en ce même point B.

chaque point B, et le problème de la détermination de la figure de la Terre sera résolu [*].

Nous devons prévenir une objection qui se rapporte à l'introduction de l'inconnue h_0. Cette nouvelle constante ne modifie-t-elle pas les éléments du sphéroïde de comparaison? Il est facile de reconnaître que cela n'a pas lieu; car on ignore absolument l'altitude d'un point quelconque de la surface des mers par rapport au sphéroïde de comparaison, et la surface de niveau ne peut être complétement déterminée, si l'on ne fixe pas l'altitude de l'un de ses points par rapport à la surface du sphéroïde.

Examinons les difficultés que peut présenter l'application de cette méthode. Du côté des nivellements géométriques, il n'en existe pas dont on ne soit parvenu à triompher; les grandes opérations effectuées depuis quelques années, tant en France qu'à l'étranger, ont donné les résultats les plus satisfaisants. Nos voisins de la Confédération helvétique n'ayant pas été arrêtés par les difficultés que présente chez eux la configuration du sol, on peut admettre que le nivellement géométrique sera exécutable partout où il sera nécessaire.

Le principal obstacle semblerait provenir de la difficulté d'obtenir de bonnes mesures des distances zénithales des objets terrestres : l'exacte évaluation des réfractions rencontre, en effet, des obstacles considérables. Les discordances qui se sont produites dans les nivellements géodésiques, à l'époque de Delambre et longtemps encore

[*] On peut concevoir une autre solution du problème : bornons-nous à en indiquer le principe. Les différences $(L'-L)$, $(\mathfrak{L}'-\mathfrak{L})$ ou $(Z'-Z)$ étant censées connues en chaque point du sphéroïde de comparaison, la direction de la verticale vraie en chacun de ces points se trouvera déterminée. On aura donc une suite de normales à une même surface de niveau, normales dont la position dans l'espace sera complétement fixée : alors le problème consiste à mener, par un point donné, une surface qui soit perpendiculaire à ces normales. Ce problème de Géométrie a été l'objet des recherches de notre savant confrère M. Bertrand, qui a fait connaître une équation de condition entre les données de la question. Cette équation doit offrir un moyen de contrôler l'exactitude des observations; car la surface de niveau n'est point une surface prise au hasard, mais une des réalités que nous offre la nature : on peut donc s'attendre qu'elle sera vérifiée, aux erreurs près des observations.

P. S. La solution dont il s'agit fait l'objet de deux Mémoires qui viennent après celui-ci.

après lui, tiennent à l'emploi d'un certain coefficient à appliquer à l'angle au centre, pour en déduire la réfraction, coefficient que l'on faisait varier suivant les saisons, du jour à la nuit, sans règle bien précise. On a reconnu ensuite qu'il fallait abandonner l'emploi d'un coefficient impossible à déterminer autrement que par les observations elles-mêmes; alors on a conseillé la méthode des distances zénithales réciproques, qui semblait devoir éliminer les effets de la réfraction. Cette méthode n'a cependant pas atteint son but; la théorie indiquait d'ailleurs son insuffisance. Parmi les tentatives faites pour triompher de ces difficultés, il faut citer la belle opération exécutée par les astronomes de Pulkowa, et sous la direction de W. Struve, pour déterminer la différence de niveau entre la mer Noire et la mer Caspienne. Qu'on me permette ici de citer mes propres recherches sur cette matière difficile.

En 1860, j'ai présenté au Bureau des Longitudes [*] le résultat de recherches théoriques sur les réfractions terrestres : j'avais pris pour base l'emploi d'une expression de la densité de l'air, mise sous la forme d'un polynôme ordonné suivant les puissances des hauteurs et limité au terme du deuxième degré inclusivement, polynôme dont les coefficients restaient à déterminer par l'observation; les conditions de l'observation étaient celles de la méthode des distances zénithales réciproques, complétées par l'observation du baromètre et du thermomètre aux deux stations. Cette méthode n'a reçu chez nous aucune application; mais la même méthode a été appliquée, en 1864, par M. Ibañez, Membre de l'Académie de Madrid, qui l'avait imaginée de son côté (voir *Estudios sobre nivelacion geodesica,* par don Carlos Ibañez é Ibañez. Madrid, 1864). Le succès obtenu par M. Ibañez permet d'augurer favorablement de l'emploi de la nouvelle méthode.

Voici, ce nous semble, le principal obstacle à l'application que nous venons de présenter du nouveau théorème. Par l'exposé qui précède, on a vu que l'altitude h d'un point B de la ligne de nivellement exige que l'on connaisse les variations $(L'-L)$ et $(\mathcal{L}'-\mathcal{L})$ ou $(Z'-Z)$, produites par les attractions locales sur les coordonnées ou azimuts de la station d'où le point B a été observé. Le point B devient, à son

[*] Séances des 12 et 19 décembre.

tour, le lieu de station d'où un troisième point doit être également observé, et ainsi de suite. Il résulte de là que les perturbations dues aux attractions locales doivent être fournies par des observations astronomiques faites en chaque station de la ligne de nivellement. Il y a là un obstacle matériel qui n'est peut-être pas tout à fait insurmontable. On a vu, en effet, que les azimuts peuvent, dans le problème actuel, remplacer les longitudes; la difficulté se réduirait donc à l'observation de la latitude et de l'azimut en chaque station. Or la précision du travail pourrait être limitée au degré strictement nécessaire à la résolution du problème. Ici nous touchons de près aux projets de l'Association géodésique internationale; car on y a proposé de faire au sommet de tous les triangles une mesure de la latitude.

Enfin nous devons faire remarquer que, si les stations astronomiques sont convenablement espacées, il se pourra que, dans certaines régions au moins, les variations dues aux attractions locales se prêtent à une interpolation qui dispenserait d'effectuer les opérations astronomiques aux stations intermédiaires; celles-ci ne deviendraient nécessaires que dans les régions pour lesquelles l'interpolation serait reconnue impraticable.

Sans rien vouloir préjuger actuellement des applications futures du nouveau théorème, nous considérons celle que nous venons d'indiquer comme très-propre à fixer les idées sur la signification géométrique de ce théorème, et les conséquences que l'on peut en déduire pour faciliter la solution du problème de la figure de la Terre. Nous aurons d'ailleurs atteint un but utile, si nous parvenons, par la publication du présent Mémoire, à provoquer des recherches dans une direction que l'on n'avait pas songé à suivre jusqu'ici [*].

---

[*] *P. S.* Au sujet du Mémoire qu'on vient de lire, nous avons reçu de M. Peters l'appréciation suivante, qu'on nous permettra de reproduire ici :

« J'ai lu avec le plus haut intérêt votre Mémoire sur les attractions locales, dans les *Comptes rendus* du 28 décembre 1868. Votre exposition claire et achevée d'une méthode entièrement nouvelle pour déterminer la *vraie* surface de la Terre appartient sans doute aux œuvres les plus importantes dans le ressort de la Géodésie, et il serait à désirer que vous fissiez valoir vos idées à l'assemblée prochaine de l'Association géodésique, à Vienne.

» En attendant, je me permettrai de publier dans les *Astronomische Nachrichten* un extrait de votre Lettre, en tant qu'elle expose votre méthode. »

La réunion dont parle M. Peters devait avoir lieu en septembre 1870, et nous avions

Troisième théorème sur les attractions locales et seconde détermination de la VRAIE *figure de la Terre obtenue sans le concours des nivellements proprement dits.*

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXIV, p. 736, séance du 2 octobre 1871.)

Dans une Communication sur les attractions locales, que j'ai eu l'honneur de faire à l'Académie, le 28 décembre 1868, j'ai établi la distinction entre les deux espèces de nivellements *géodésique* et *géométrique*, et fait voir que leur simple comparaison suffit pour déterminer la figure de la surface de niveau, lorsqu'on applique au nivellement géodésique une correction qu'on avait négligée jusqu'alors et qui repose sur le second théorème concernant les attractions locales.

Après avoir exposé cette solution, j'ajoutais, dans une Note que je demande à l'Académie la permission de reproduire :

« On peut concevoir une autre solution du problème : bornons-nous à en indiquer le principe. Les différences $(L' - L)$, $(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L})$ ou $(Z' - Z)$ [*] étant censées connues en chaque point du sphéroïde de comparaison, la direction de la verticale *vraie* en chacun de ces points se trouvera déterminée. On aura donc une suite de normales à une même surface de niveau, normales dont la position dans l'espace sera complétement fixée; alors le problème consiste à mener, par un point donné, une surface qui soit perpendiculaire à ces normales. Ce problème de Géométrie a été l'objet des recherches de notre savant confrère M. Bertrand, qui a fait connaître une équation de condition entre les données de la question. Cette équation doit offrir un moyen de contrôler l'exactitude des observations; car la surface de niveau n'est point une surface prise au hasard, mais une des réalités que nous offre la nature [**] : on peut donc s'attendre qu'elle sera vérifiée, aux erreurs près des observations. »

---

reçu du général Bayer l'invitation d'y assister. Les événements militaires ont empêché cette réunion d'avoir lieu et l'ont fait ajourner au mois de septembre 1871; mais, cette fois, nous n'avons pas reçu d'invitation, et d'ailleurs la France n'a envoyé aucun délégué pour la représenter. Dans la session de 1871, les questions relatives aux attractions locales n'ont été l'objet d'aucune communication. M. Schering, qui n'a pas figuré parmi les délégués cette année-là, ne paraît pas avoir encore publié les nouveaux théorèmes qu'il annonçait en 1867.

[*] Différences entre les résultats astronomiques et géodésiques, et relatifs aux latitudes, longitudes ou azimuts.

[**] Pour être plus correct, j'aurais dû dire : « Car le système de normales à la surface de niveau n'est pas un système pris au hasard, mais, etc. ».

Aujourd'hui je me propose de développer cette autre solution. Je n'aborderai pas la question générale que notre confrère M. Bertrand a traitée; je me bornerai au cas particulier à la Géodésie. Or la solution se trouvera considérablement simplifiée par la substitution des coordonnées sphériques aux coordonnées rectangulaires; ainsi l'objet spécial du calcul sera l'expression de la distance Δ qui sépare la surface de niveau et celle d'un sphéroïde de révolution prise pour surface de comparaison, normalement à la première, en fonction de la latitude et de la longitude géodésiques L et $\mathcal{L}$. Nous aurons à exprimer la différentielle totale de Δ, à laquelle nous donnerons la forme

$$(1)\qquad \frac{d\Delta}{k} = F(L, \mathcal{L})\,dL + f(L, \mathcal{L})\,d\mathcal{L},$$

k étant une constante, et F, f désignant les caractéristiques de fonctions.

Les fonctions F et f ne sont pas susceptibles d'expressions analytiques définies : elles dépendent des différences entre les latitudes, longitudes ou azimuts astronomiques et géodésiques, et s'annulent avec ces différences. On peut seulement, à l'aide des observations, les représenter par des séries trigonométriques, les unes simples, les autres doubles; mais il résulte de la théorie des équations différentielles totales que les coefficients de ces séries doivent avoir entre eux des relations qui satisfassent à l'équation de condition

$$(2)\qquad \frac{dF(L, \mathcal{L})}{d\mathcal{L}} = \frac{df(L, \mathcal{L})}{dL};$$

autrement $d\Delta$ ne serait pas la différentielle exacte d'une fonction Δ.

Cette équation de condition entre les données équivaut nécessairement à celle qu'a trouvée M. Bertrand.

Ayant satisfait à cette équation, nous obtiendrons pour intégrale

$$(3)\qquad \frac{1}{k}\Delta = \int f(L, \mathcal{L})\,d\mathcal{L} + \int\left[F(L, \mathcal{L}) - \int \frac{df}{dL}\,d\mathcal{L}\right]dL,$$

ou

$$(3')\qquad \frac{1}{k}\Delta = \int F(L, \mathcal{L})\,dL + \int\left[f(L, \mathcal{L}) - \int \frac{dF}{d\mathcal{L}}\,dL\right]d\mathcal{L}.$$

Les applications de cette formule à la détermination de la *vraie* figure de la Terre résulteront de la considération des coefficients des développements des fonctions F et f.

Analyse. — Nous prendrons, pour origine de coordonnées rectangulaires, le centre de gravité de la Terre; les axes des x et y seront situés dans le plan de l'équateur, et l'axe des z coïncidera avec l'axe de rotation, son côté positif étant dans l'hémisphère où les latitudes sont positives.

Soient :

x, y, z les coordonnées des points de la surface de l'ellipsoïde de révolution qui sert de surface de comparaison; a et c les demi-axes équatorial et polaire;

x', y', z' les coordonnées de la surface de niveau en un point M'; N' la direction de la normale en ce point;

Δ la distance du point M' au point M, où la normale N' rencontre la surface de l'ellipsoïde.

En convenant de prendre Δ positif lorsque le point M' est extérieur à l'ellipsoïde, on aura

$$(4) \qquad \frac{x'-x}{\cos(N',x)} = \frac{y'-y}{\cos(N',y)} = \frac{z'-z}{\cos(N',z)} = \Delta;$$

d'où

$$\Delta^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2;$$

puis

$$\Delta\, d\Delta = (x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy) + (z'-z)(dz'-dz),$$

ou, en vertu de (4),

$$d\Delta = \cos(N',x)(dx'-dx) + \cos(N',y)(dy'-dy) + \cos(N',z)(dz'-dz).$$

Or, ds' désignant un élément linéaire pris sur la surface de niveau, on a

$$\cos(N',x)\,dx' + \cos(N',y)\,dy' + \cos(N',z)\,dz' = \cos(N',ds')\,ds',$$

quantité nulle, puisque N' et ds' sont perpendiculaires; la valeur de $d\Delta$ se réduit ainsi à

$$d\Delta = -\cos(N', x)\,dx - \cos(N', y)\,dy - \cos(N', z)\,dz.$$

D'autre part, la direction de la normale N' n'étant autre que celle de la verticale vraie, si l'on désigne par L' la latitude astronomique en M', et $\mathcal{L}'$ la longitude astronomique comptée du méridien qui passe par l'axe des x et dans le sens de x vers y, on a

$$\cos(N', x) = \cos L' \cos \mathcal{L}', \quad \cos(N', y) = \cos L' \sin \mathcal{L}', \quad \cos(N', z) = \sin L';$$

il s'ensuit

$$(5) \qquad d\Delta = -\cos L' \cos \mathcal{L}'\,dx - \cos L' \sin \mathcal{L}'\,dy - \sin L'\,dz.$$

Passons actuellement aux expressions des coordonnées x, y, z en fonction des latitudes et longitudes géodésiques L et $\mathcal{L}$. Soit

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface quelconque; on a, entre les cosinus des angles que la normale N au point (x, y, z) fait avec les trois axes et les dérivées partielles de φ, les relations

$$\frac{\cos(N, x)}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{\cos(N, y)}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\cos(N, z)}{\frac{d\varphi}{dz}} = \frac{1}{2} V,$$

où $\frac{1}{2} V$ [*] désigne la valeur commune de ces rapports. De là on déduit

$$\frac{1}{4} V^2 = \frac{1}{\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}}$$

et

$$(6) \quad \cos(N, x) = \frac{1}{2} V \frac{d\varphi}{dx}, \quad \cos(N, y) = \frac{1}{2} V \frac{d\varphi}{dy}, \quad \cos(N, z) = \frac{1}{2} V \frac{d\varphi}{dz}.$$

---

[*] *P. S.* On donnera dans le Mémoire suivant la relation qui lie la fonction V avec le rayon de courbure de la section méridienne de l'ellipsoïde.

Dans le cas de l'ellipsoïde de révolution, on a

$$\varphi = \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{7}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\frac{x}{a^2}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 2\frac{y}{a^2}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 2\frac{z}{c^2}; \tag{8}$$

il s'ensuit

$$V^2 = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}}. \tag{9}$$

Mais nos cosinus ont, en fonction de L et $\mathfrak{L}$, les valeurs suivantes :

$$\cos(N, x) = \cos L \cos \mathfrak{L}, \quad \cos(N, y) = \cos L \sin \mathfrak{L}, \quad \cos(N, z) = \sin L;$$

on a donc, en vertu de (6) et (8),

$$V\frac{x}{a^2} = \cos L \cos \mathfrak{L}, \quad V\frac{y}{a^2} = \cos L \sin \mathfrak{L}, \quad V\frac{z}{c^2} = \sin L, \tag{10}$$

expressions où V doit être pris avec le signe +, afin que x, y et z aient respectivement les signes de $\cos \mathfrak{L}$, $\sin \mathfrak{L}$ et $\sin L$, comme il convient.

Des deux premières relations (10) on tire

$$V\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^4}} = \cos L; \tag{11}$$

d'un autre côté, l'expression (7) permet de poser

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2}} = \cos\lambda, \quad \frac{z}{c} = \sin\lambda, \tag{12}$$

λ étant une auxiliaire que l'on nomme *latitude réduite*. Au moyen de cette quantité, l'expression (11) et la troisième (10) donnent

$$V\cos\lambda = a\cos L, \quad V\sin\lambda = c\sin L; \tag{13}$$

d'où l'on tire

$$\tag{14} \operatorname{tang}\lambda = \frac{c}{a}\operatorname{tang} L,$$

sous la condition que V soit > 0, puis

$$\tag{15} V = a\,\frac{\cos L}{\cos\lambda} = c\,\frac{\sin L}{\sin\lambda}.$$

L'expression (14) justifie la dénomination de *latitude réduite*.

Éliminant V entre ces dernières équations et les relations (10), on obtient finalement les expressions

$$\tag{16} x = a\cos\lambda\cos\mathcal{L}, \quad y = a\cos\lambda\sin\mathcal{L}, \quad z = c\sin\lambda.$$

Différentiant ces expressions, il vient

$$\begin{aligned} dx &= -a\sin\lambda\cos\mathcal{L}\,d\lambda - a\cos\lambda\sin\mathcal{L}\,d\mathcal{L}, \\ dy &= -a\sin\lambda\sin\mathcal{L}\,d\lambda + a\cos\lambda\cos\mathcal{L}\,d\mathcal{L}, \\ dz &= +c\cos\lambda\,d\lambda. \end{aligned}$$

Pour rétablir dL à la place de $d\lambda$, nous aurons, en différentiant (14), et ayant égard aux relations (13) ou (15),

$$d\lambda = \frac{ac}{V^2}\,dL;$$

d'où, en vertu des mêmes relations,

$$a\sin\lambda\,d\lambda = \frac{a^2c^2}{V^3}\sin L\,dL, \quad c\cos\lambda\,d\lambda = \frac{a^2c^2}{V^3}\cos L\,dL.$$

Au moyen de ces valeurs, il vient

$$\tag{17} \left\{\begin{aligned} dx &= -\frac{a^2c^2}{V^3}\sin L\cos\mathcal{L}\,dL - a\cos\lambda\sin\mathcal{L}\,d\mathcal{L}, \\ dy &= -\frac{a^2c^2}{V^3}\sin L\sin\mathcal{L}\,dL + a\cos\lambda\cos\mathcal{L}\,d\mathcal{L}, \\ dz &= +\frac{a^2c^2}{V^3}\cos L\,dL. \end{aligned}\right.$$

Transportons ces quantités dans l'équation (5), nous aurons d'abord

$$d\Delta = -\frac{a^2c^2}{V^3}[\sin L' \cos L - \sin L \cos L' \cos(\mathcal{L}' - \mathcal{L})]dL$$
$$- a\cos\lambda \cos L' \sin(\mathcal{L}' - \mathcal{L})d\mathcal{L},$$

puis

$$(18)\left\{\begin{aligned} d\Delta = &-\frac{a^2c^2}{V^3}\left[\sin(L'-L) + 2\sin L \cos L' \sin^2\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}' - \mathcal{L})\right]dL \\ &- a\cos\lambda \cos L' \sin(\mathcal{L}' - \mathcal{L})d\mathcal{L}.\end{aligned}\right.$$

Cette équation est rigoureuse; mais on peut la simplifier, tout en lui conservant une exactitude plus que suffisante. En effet, les différences $L' - L$ et $\mathcal{L}' - \mathcal{L}$ sont généralement égales à un petit nombre de secondes, et, dans les cas les plus extrêmes, elles ne paraissent guère dépasser 1 ou 2 minutes d'arc : cela permet d'en négliger les carrés et les puissances supérieures. Afin de pouvoir conserver les différences $L' - L$ et $\mathcal{L}' - \mathcal{L}$ exprimées en secondes d'arc, nous mettrons, à la place de leurs sinus, leurs produits par $\sin 1''$. Posons, en conséquence,

$$(19)\left\{\begin{aligned} &k = -a\sin 1'', \\ &F(L, \mathcal{L}) = \frac{ac^2}{V^3}(L' - L), \quad f(L, \mathcal{L}) = \cos\lambda \cos L'(\mathcal{L}' - \mathcal{L}),\end{aligned}\right.$$

l'expression (18) deviendra

$$(20)\qquad \frac{d\Delta}{k} = F(L, \mathcal{L})dL + f(L, \mathcal{L})d\mathcal{L}$$

et coïncidera avec l'expression (1) qu'il s'agissait de former.

On remarquera que, à cause du faible aplatissement du sphéroïde, L et λ différeront peu, et le facteur $\frac{ac^2}{V^3}$ sera peu différent de l'unité : il s'ensuit que la fonction $F(L, \mathcal{L})$ sera sensiblement égale à $L' - L$. Quant à la fonction $f(L, \mathcal{L})$, on voit que, étant divisée par $\cos\lambda$, elle représentera la différence de longitude $(\mathcal{L}' - \mathcal{L})$ réduite en arc de grand cercle. On devra avoir égard à cette circonstance dans le calcul du développement de la fonction $f(\mathrm{L}, \mathcal{L})$.

De ces remarques il résulte que l'équation de condition (2) revient sensiblement à

$$(20\ bis)\qquad \frac{d(\mathrm{L}' - \mathrm{L})}{d\mathcal{L}} = \frac{d.\cos^2\mathrm{L}(\mathcal{L}' - \mathcal{L})}{d\mathrm{L}}\ [*];$$

ce qui suffit pour en exprimer la signification géométrique : nous effectuerons bientôt le développement exact de l'équation (2).

Il a été dit plus haut que les fonctions F et f ne sont pas susceptibles d'expressions analytiques définies; mais on peut en exprimer les valeurs numériques au moyen de séries trigonométriques. Quand il s'agit d'une fonction d'une seule variable indépendante, on fait usage de séries de termes procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples entiers de la variable, et les coefficients de ces termes sont constants. Or il est visible qu'on parviendra à représenter une fonction de deux variables si l'on remplace les coefficients de la série propre à représenter la fonction d'une seule variable par autant de séries toutes pareilles, mais procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de l'autre variable. La série qui en résultera comprendra donc tous les termes qu'on pourra former avec un sinus ou cosinus de multiple de l'une des variables, multipliant un sinus ou cosinus de multiple de l'autre variable.

Ceci posé, si l'on sépare, pour plus de clarté, les termes correspondant aux multiples nuls de l'une ou l'autre variable, la forme générale de la fonction F sera

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(\mathrm{L}, \mathcal{L}) = \mathrm{C}_0 &+ \Sigma \mathrm{C}_i \cos i\mathrm{L} + \Sigma \mathrm{E}_i \sin i\mathrm{L} + \Sigma \mathrm{G}_{i'} \cos i'\mathcal{L} + \Sigma \mathrm{K}_{i'} \sin i'\mathcal{L} \\ &+ \Sigma\Sigma\big(\mathrm{M}_{i,i'} \cos i\mathrm{L} \cos i'\mathcal{L} + \mathrm{N}_{i,i'} \sin i\mathrm{L} \cos i'\mathcal{L} \\ &\qquad + \mathrm{P}_{i,i'} \cos i\mathrm{L} \sin i'\mathcal{L} + \mathrm{Q}_{i,i'} \sin i\mathrm{L} \sin i'\mathcal{L}\big); \end{aligned}\right.$$

i et i' désignent des entiers positifs, différents de zéro et s'étendant

---

[*] *P. S.* L'équation (20 *bis*) constitue le troisième théorème sur les attractions locales. Dans le Mémoire suivant, le même théorème sera présenté sous une autre forme.

de 1 à l'infini. La fonction f se développe de la même manière; seulement nous écrirons, pour plus de commodité, les termes compris sous la parenthèse dans l'ordre inverse : nous aurons de la sorte

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} f(\mathrm{L},\mathcal{L}) = c_0 &+ \Sigma c_i \cos i\mathrm{L} + \Sigma e_i \sin i\mathrm{L} + \Sigma g_{i'} \cos i'\mathcal{L} + \Sigma k_{i'} \sin i'\mathcal{L} \\ &+ \Sigma\Sigma\,(\quad m_{i,i'} \sin i\mathrm{L} \sin i'\mathcal{L} + n_{i,i'} \cos i\mathrm{L} \sin i'\mathcal{L} \\ &\qquad + p_{i,i'} \sin i\mathrm{L} \cos i'\mathcal{L} + q_{i',i'} \cos i\mathrm{L} \cos i'\mathcal{L}). \end{aligned}\right.$$

Différentiant ces expressions, la première par rapport à $\mathcal{L}$, la seconde par rapport à L, il viendra

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{F}(\mathrm{L},\mathcal{L})}{d\mathcal{L}} = &- \Sigma i' \mathrm{G}_{i'} \sin i'\mathcal{L} + \Sigma i' \mathrm{K}_{i'} \cos i'\mathcal{L} \\ &+ \Sigma\Sigma(- i' \mathrm{M}_{i,i'} \cos i\mathrm{L} \sin i'\mathcal{L} - i' \mathrm{N}_{i,i'} \sin i\mathrm{L} \sin i'\mathcal{L} \\ &\qquad + i' \mathrm{P}_{i,i'} \cos i\mathrm{L} \cos i'\mathcal{L} + i' \mathrm{Q}_{i,i'} \sin i\mathrm{L} \cos i'\mathcal{L}), \\ \frac{df(\mathrm{L},\mathcal{L})}{d\mathrm{L}} = &- \Sigma i c_i \sin i\mathrm{L} + \Sigma i e_i \cos i\mathrm{L} \\ &+ \Sigma\Sigma(\quad i m_{i,i'} \cos i\mathrm{L} \sin i'\mathcal{L} - i n_{i,i'} \sin i\mathrm{L} \sin i'\mathcal{L} \\ &\qquad + i p_{i,i'} \cos i\mathrm{L} \cos i'\mathcal{L} - i q_{i,i'} \sin i\mathrm{L} \cos i'\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Ces deux dérivées devant être égales quels que soient L et $\mathcal{L}$, suivant l'équation de condition (2), les coefficients des séries F et f devront satisfaire aux relations

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{llll} \mathrm{G}_{i'} = 0, & \mathrm{K}_{i'} = 0, & c_i = 0, & e_i = 0; \\ i m_{i,i'} = -i' \mathrm{M}_{i,i'}, & i n_{i,i'} = +i' \mathrm{N}_{i,i'}, & i p_{i,i'} = +i' \mathrm{P}_{i,i'}, & i q_{i,i'} = -i' \mathrm{Q}_{i,i'}. \end{array}\right.$$

On pourrait évidemment déterminer les coefficients qui correspondent à chacune des séries (21) et (22), en employant un nombre suffisant de valeurs numériques des fonctions F et f, puis constater ensuite si les valeurs obtenues satisfont aux conditions (23). Or on trouverait généralement de légères discordances, à cause des erreurs qui affectent inévitablement les fonctions F et f. Il est vrai que cette manière d'opérer offrirait le moyen de contrôler les données du problème; mais les discordances subsistantes seraient un objet d'embarras, que l'on évitera en assujettissant d'abord les coefficients à satisfaire aux conditions (23) et déterminant ensuite l'ensemble des coefficients, au moyen des équations en F et f réunies : la résolution achevée, les erreurs résiduelles des équations montreront, par leur degré de petitesse, l'accord que présentent les données, et offriront un moyen de contrôle équivalent au précédent.

C'est ici le lieu de faire remarquer que les fonctions f doivent, avant d'être employées à la résolution des équations, être divisées membre à membre par la valeur de $\cos\lambda$ correspondant à chacune d'elles; autrement ces équations, à égal degré de précision des données, n'auraient pas des poids égaux entre eux ni aux poids des équations en F. Les parties connues des équations en f seront ainsi réduites à $\cos L'(\mathcal{L}' - \mathcal{L})$.

Nous assujettirons donc immédiatement les valeurs de F et f aux conditions (23); ce qui donnera

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} F(L, \mathcal{L}) = C_0 &+ \Sigma C_i \cos iL + \Sigma E_i \sin iL \\ &+ \Sigma\Sigma(\ M_{i,i'} \cos iL \cos i'\mathcal{L} + N_{i,i'} \sin iL \cos i'\mathcal{L} \\ &\qquad + P_{i,i'} \cos iL \sin i'\mathcal{L} + Q_{i,i'} \sin iL \sin i'\mathcal{L}), \end{aligned}\right.$$

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} f(L, \mathcal{L}) = c_0 &+ \Sigma g_{i'} \cos i'\mathcal{L} + \Sigma k_{i'} \sin i'\mathcal{L} \\ &+ \Sigma\Sigma\Big(- M_{i,i'} \frac{i'}{i} \sin iL \sin i'\mathcal{L} + N_{i,i'} \frac{i'}{i} \cos iL \sin i'\mathcal{L} \\ &\qquad + P_{i,i'} \frac{i'}{i} \sin iL \cos i'\mathcal{L} - Q_{i,i'} \frac{i'}{i} \cos iL \cos i'\mathcal{L}\Big). \end{aligned}\right.$$

Actuellement nous pouvons procéder à l'intégration de $d\Delta$. Appliquons la formule (3) : nous aurons d'abord

$$\begin{aligned} \frac{df}{dL} = \Sigma\Sigma(&- i' M_{i,i'} \cos iL \sin i'\mathcal{L} - i' N_{i,i'} \sin iL \sin i'\mathcal{L} \\ &+ i' P_{i,i'} \cos iL \cos i'\mathcal{L} + i' Q_{i,i'} \sin iL \cos i'\mathcal{L}); \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int \frac{df}{dL} d\mathcal{L} = \Sigma\Sigma(&\ M_{i,i'} \cos iL \cos i'\mathcal{L} + N_{i,i'} \sin iL \cos i'\mathcal{L} \\ &+ P_{i,i'} \cos iL \sin i'\mathcal{L} + Q_{i,i'} \sin iL \sin i'\mathcal{L}), \end{aligned}$$

puis

$$F(L, \mathcal{L}) - \int \frac{df}{dL} dL = C_0 + \Sigma C_i \cos iL + \Sigma E_i \sin iL,$$

quantité indépendante de $\mathcal{L}$, comme cela doit être.

Effectuant les deux intégrations restantes, il vient finalement, d'après la formule (3),

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{k}(\Delta - \Delta_0) = c_0 \mathfrak{L} &+ \Sigma \frac{g_{i'}}{i'} \sin i'\mathfrak{L} - \frac{k_{i'}}{i'} \cos i'\mathfrak{L} \\ &+ \Sigma\Sigma\left(\frac{M_{i,i'}}{i} \sin iL \cos i'\mathfrak{L} - \frac{N_{i,i'}}{i} \cos iL \cos i'\mathfrak{L} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{P_{i,i'}}{i} \sin iL \sin i'\mathfrak{L} - \frac{Q_{i,i'}}{i} \cos iL \sin i'\mathfrak{L} \right) \\ &+ C_0 L + \Sigma \frac{C_i}{i} \sin iL - \Sigma \frac{E_i}{i} \cos iL, \end{aligned}\right.$$

expression dans laquelle $\mathfrak{L}$ et L en dehors des signes sin et cos doivent être exprimés en nombres abstraits.

$\frac{\Delta_0}{k}$ est la constante de l'intégration, que l'on obtiendra en fixant une condition telle que serait celle du minimum de la somme $\Sigma\Delta^2$ [*].

Nous rappellerons que, d'après notre premier théorème sur les attractions locales, les longitudes peuvent être généralement remplacées par les azimuts. Or, suivant ce théorème, on a, quelles que soient ces attractions,

$$(27)\qquad Z' - Z + \sin L'(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}) = 0,$$

en désignant par Z' et Z les azimuts astronomique et géodésique. On effectuera la substitution dont il s'agit, en posant (19)

$$(28)\qquad f(L, \mathfrak{L}) = -\frac{\cos\lambda}{\tang L'}(Z' - Z).$$

On observera seulement que cette fonction sera mal déterminée dans les régions équatoriales; c'est qu'en effet, à l'équateur, l'influence des attractions locales sur les azimuts étant nulle, le rapport $\frac{Z' - Z}{\tang L'}$ y devient indéterminé.

Au reste, l'emploi des azimuts, dans le problème actuel, ne paraît pas offrir autant de garanties de précision que celui des longitudes, attendu que les erreurs des azimuts géodésiques doivent croître plus

[*] L'ordonnée Δ est identique avec la différence $h - h'$ que nous avons considérée dans notre Communication du 28 décembre 1868.

rapidement, avec la longueur des lignes géodésiques, que celles des longitudes.

La formule (26) contient les termes $c_0 \mathcal{L}$ et $C_0 L$, dont la présence peut surprendre tout d'abord ; il est cependant facile de s'expliquer leur existence : si, par exemple, les constantes linéaires des calculs géodésiques ne sont pas tout à fait exactes, les extrémités des lignes géodésiques détermineront des longitudes, latitudes et azimuts d'autant plus erronés que ces lignes seront plus étendues; en un mot, les coordonnées et azimuts géodésiques seront affectés d'erreurs systématiques, ou croissantes avec L et $\mathcal{L}$. Si donc le calcul des coefficients des fonctions F et f conduit à des valeurs de c_0 et C_0 qui ne soient pas négligeables, on aura la preuve que les constantes employées dans les calculs géodésiques doivent être corrigées.

Rien n'empêche d'ailleurs de joindre aux fonctions F et f les termes destinés à corriger les coordonnées et azimuts géodésiques, relativement aux constantes qui ont servi de point de départ dans les calculs; de cette manière, on obtiendrait à la fois les dimensions de l'ellipsoïde de révolution qui satisfont le mieux à l'ensemble des observations, et les constantes propres à déterminer, au moyen de la formule (26), la vraie figure de la surface de niveau.

Si, au lieu de vouloir déterminer la figure de la surface de niveau dans toute l'étendue que comprennent les réseaux géodésiques, on se propose de déterminer le profil de cette surface le long d'une ligne tracée arbitrairement sur la surface de comparaison, le problème sera bien facile à résoudre; en effet, soit

$$\psi(L, \mathcal{L}) = 0 \tag{29}$$

l'équation de la ligne donnée; on déduira de cette équation

$$\frac{d\psi}{dL} dL + \frac{d\psi}{d\mathcal{L}} d\mathcal{L} = 0,$$

relation qui servira à exprimer $d\mathcal{L}$ en fonction de dL, ou inversement. Si l'on pose

$$F_1(L) = \frac{ac^2}{V^3}(L' - L) - \frac{\frac{d\psi}{dL}}{\frac{d\psi}{d\mathcal{L}}} \cos\lambda \cos L'(\mathcal{L}' - \mathcal{L}), \tag{30}$$

ou

$$(30)' \quad f_1(\mathfrak{L}) = -\frac{\frac{d\psi}{d\mathfrak{L}}}{\frac{d\psi}{dL}}\frac{ac^2}{V^3}(L'-L) + \cos\lambda\cos L'(\mathfrak{L}'-\mathfrak{L}),$$

l'expression (20) prendra l'une des formes

$$(31) \qquad \frac{d\Delta}{k} = F_1(L)dL \quad \text{ou} \quad \frac{d\Delta}{k} = f_1(\mathfrak{L})d\mathfrak{L};$$

et les valeurs de F_1 et f_1 étant développées en séries trigonométriques simples, et procédant, la première suivant les multiples de L, la seconde suivant ceux de $\mathfrak{L}$, on intégrera sans difficulté celle des équations précédentes qu'on aura choisie.

Considérons en particulier le cas des méridiens et des parallèles.

Dans le cas d'une ligne méridienne, on a, dans toute son étendue, $d\mathfrak{L} = 0$, et si l'on pose

$$(32) \qquad F_2(L) = \frac{ac^2}{V^2}(L'-L),$$

la formule (20) donne

$$(33) \qquad \Delta = k\int F_2(L)dL.$$

Dans celui d'un arc de parallèle, ou de $dL = 0$, on poserait

$$(34) \qquad f_2(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}' - \mathfrak{L};$$

d'où

$$(35) \qquad \Delta = k\cos\lambda\cos L'\int f_2(\mathfrak{L})d\mathfrak{L},$$

en négligeant les minimes variations de $\cos L'$.

Modes d'application de la nouvelle méthode pour déterminer la vraie *figure de la Terre et comparaison avec celle qui repose sur l'emploi des nivellements.* — La nouvelle méthode, n'exigeant pas d'autres opérations de nivellement que celles qui s'exécutent sur l'instrument astronomique, dans les observations de latitude, de longitude ou azimut, est exempte des erreurs inhérentes aux nivellements géodésiques. On a vu, d'ailleurs, que ces nivellements exigent, pour être corrects, des observations de latitude et de longitude ou azimut en chaque station : en d'autres termes, que des observations astronomiques soient exécutées sur tous les points de station de la ligne géodésique. La nouvelle méthode n'exige pas l'exécution de ces travaux sur des points aussi rapprochés; le plus souvent, il suffirait d'un espacement d'un degré, tant en longitude qu'en latitude, entre les stations astronomiques. Enfin cette méthode présente un moyen très-précieux de vérifier l'exactitude des données empruntées aux observations.

Les différences que nous venons de signaler entre les exigences des deux méthodes semblent devoir établir une supériorité en faveur de la nouvelle. Examinons quels sont ses inconvénients. Le principal serait dans la longueur des calculs à effectuer pour la détermination des coefficients des doubles séries trigonométriques à l'aide desquelles sont représentées les différences des coordonnées ou azimuts, astronomiques et géodésiques. Assurément ces calculs, étendus aux principaux points d'un réseau de triangles qui couvrirait l'Europe entière, par exemple, seraient fort longs; mais ils ne seraient pas plus impraticables que les calculs ayant pour objet la compensation des erreurs des angles des triangles.

Admettons que l'on renonce à faire une application aussi étendue, au moyen d'un calcul d'ensemble; voici comment on procéderait pour éviter l'emploi des séries doubles sur une grande échelle. Sur le parallèle moyen de la région considérée, on fixerait un certain nombre de points satisfaisant à la double condition d'être aussi également espacés entre eux et aussi voisins d'une station astronomique que possible; par une interpolation étendue aux stations comprises dans un certain rayon autour de chaque point considéré, on calculerait les valeurs des différences entre les longitudes ou azimuts astronomiques et géodésiques qui n'ont pas été observées en ce point. A cause du petit nombre de stations comprises dans un rayon peu étendu, cette interpolation, bien que nécessitant l'emploi de doubles séries trigonométriques, ne serait pas un obstacle; dans cette interpolation on aurait égard aux relations (23) entre les coefficients. Ce travail étant effectué pour chacun des points pris sur le parallèle, les résultats seraient représentés par des séries trigonométriques simples, et le calcul des altitudes des points de la surface de niveau se ferait sans la moindre difficulté. On aurait ainsi le profil de cette surface le long du parallèle considéré.

Concevons que par chacun des points du parallèle on fasse passer un méridien. En empruntant au parallèle la cote d'altitude de départ, et procédant à l'égard de ces méridiens comme il a été dit à l'égard du parallèle, on obtiendra pareillement le profil de la surface de niveau le long de chacun de ces méridiens.

Il reste à vérifier l'exactitude des résultats obtenus. Les moyens de contrôle s'offrent d'eux-mêmes. Que l'on fasse passer des arcs de parallèles vers les limites nord et sud des méridiens, et que l'on emprunte au méridien moyen les cotes de départ, on déterminera deux nouveaux profils de parallèles, et les cotes d'altitude qu'on en déduira, pour leurs points d'intersection avec les divers méridiens, seront comparées aux cotes des mêmes points qui ont été fournies par les méridiens eux-mêmes. Il va sans dire qu'on n'obtiendra pas une concordance parfaite ; mais si les différences sont assez faibles pour pouvoir être imputées aux erreurs admissibles des données de l'observation, on n'aura plus qu'à effectuer une compensation analogue à celle qu'il faut presque toujours faire dans les opérations de nivellement ou les triangulations les plus soignées.

Il est encore un point par rapport auquel il convient de comparer les deux méthodes. Dans la première, on peut substituer les observations d'azimut à celles des longitudes, lorsque les chaînes de triangles ont été vérifiées dans leur ensemble; pourvu que, dans le voisinage de l'équateur, on évite les observations azimutales de signaux dont la direction s'écarte trop du méridien. La nouvelle méthode, au contraire, n'admet pas la substitution dont il s'agit, pour les régions voisines de l'équateur. Il n'en résulte cependant aucun désavantage pour cette dernière, attendu que, les stations astronomiques étant beaucoup moins multipliées que ne l'exige la première méthode, et généralement établies aux nœuds des chaînes de triangles, on ne négligera jamais d'y faire les observations de longitude. Les observations d'azimut seront faites dans ces stations uniquement pour contrôler les triangulations.

Enfin, la nouvelle méthode n'exigeant aucune nouvelle opération sur le terrain, on trouvera sans doute convenable d'en faire usage concurremment avec la première. En Géodésie, les vérifications sont souvent bien utiles.

La connaissance de la figure de la surface de niveau permettra d'appliquer aux calculs ordinaires de la Géodésie une correction à laquelle on n'a pas songé jusqu'ici, et qui pourra n'être pas sans importance. Les bases sont réduites au niveau de la mer, que l'on confond ordinairement avec la surface de l'ellipsoïde de révolution, tandis qu'il faudrait les réduire à cette dernière surface; or cela sera facilement praticable, dès qu'on aura fait l'application des nouvelles méthodes. Par les chiffres qui seront présentés dans un instant, on jugera si les corrections dont il s'agit ne pourraient pas atténuer les discordances que présentent certains réseaux trigonométriques.

On appréciera également si la configuration irrégulière de la surface de niveau, dans le voisinage des observatoires, surface à laquelle les couches atmosphériques de même densité sont parallèles, n'exerce aucune influence sur les réfractions astronomiques [*]. Sous ce rapport, une étude analogue à celle que M. Schwitzer a faite aux environs de Moscou, et qui s'étendrait à une surface de 100 à 120 kilomètres de rayon autour de Paris, serait d'un certain intérêt pour notre Observatoire.

Il y a plusieurs années, j'ai obtenu, relativement à la région caucasienne, un résultat que je me suis abstenu de publier, parce qu'il repose sur des données très-incomplètes : aussi le présenterai-je aujourd'hui, non comme l'expression d'une réalité, mais seulement d'une possibilité.

Le colonel Chodzko aurait constaté, dans le Caucase, des différences entre les latitudes astronomiques et géodésiques, variant de 54 se-

[*] Qui sait si les réfractions calculées en ayant égard à la *vraie* figure de la surface de niveau n'atténueraient pas sensiblement les discordances systématiques que présentent les meilleurs catalogues d'étoiles? Il faudrait, pour cela, que la correction qui en résulterait pour les réfractions pût atteindre 1 à 2 secondes. Nous nous réservons d'examiner cette question une autre fois.

condes, dans une amplitude d'arc de méridien moindre qu'un degré : voilà, certes, un système de données bien incomplet. Pour en déduire un résultat, il fallait nécessairement le compléter par des hypothèses. Voici celles que j'ai faites : 1° le point où les latitudes astronomiques et géodésiques s'accordent est au milieu de l'arc considéré; 2° le chiffre 54 secondes est la valeur maximum des attractions locales en cette région; 3° la fonction qui exprime leur effet sur les latitudes est impaire et assujettie à la condition de s'accorder sensiblement avec la loi de la raison inverse du carré de la distance, quand les distances au milieu de l'arc méridien sont très-grandes. En conséquence j'ai admis la relation

$$L' - L = C \frac{L - L_0}{[\gamma^2 + (L - L_0)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

où L_0 désigne la latitude du milieu de l'arc, et C et γ deux constantes que les conditions énoncées déterminent.

Δ désignant l'altitude d'un point du profil méridien de la surface de niveau, dont la latitude est L, a le demi-axe équatorial et e l'excentricité de l'ellipse méridienne, on a

$$d\Delta = - \frac{a(1 - e^2) C (L - L_0)}{[\gamma^2 + (L - L_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dL;$$

d'où, en intégrant,

$$\Delta = \Delta_0 - \left[\frac{a(1 - e^2) C}{\gamma} - \frac{a(1 - e^2) C}{\sqrt{\gamma^2 + (L - L_0)^2}}\right] \text{ [*]}.$$

Les valeurs de C et γ que fournissent les données et conditions pré-

---

[*] En posant

$$\tang \psi = \frac{L - L_0}{\gamma},$$

on obtient les formules suivantes, qui sont plus appropriées au calcul numérique :

$$L' - L = \frac{C}{\gamma^2} \sin\psi \cos^2\psi, \quad \Delta = \Delta_0 - 2a(1 - e^2) \frac{C}{\gamma} \sin^2 1'' \sin^2 \tfrac{1}{2}\psi.$$

L_0, L, L' sont supposés exprimés en secondes.

cédentes, ont pour logarithmes

$$\mathrm{l.C} = 8,65758, \quad \mathrm{l.}\gamma = 3,40578.$$

A l'aide de ces données, on obtient les résultats suivants :

$L - L_0$	$L' - L$	$\Delta - \Delta_0$	$L - L_0$	$L' - L$	$\Delta - \Delta_0$
° ′	″	m	° ′	″	m
0. 0	0,0	0,00	1. 0	19,1	−11,29
0.10	15,2	− 0,72	1.10	16,1	−12,87
0.20	24,5	− 2,55	1.20	13,6	−14,20
0.30	27,0	− 4,90	1.30	11,5	−15,33
0.40	25,5	− 7,28	1.40	9,8	−16,28
0.50	22,4	− 9,43	1.50	8,5	−17,10
1. 0	19,1	−11,29	2. 0	7,3	−17,81

(*N. B.* $L' - L$ change de signe avec $L - L_0$; $\Delta - \Delta_0$ conserve le signe —.)

Les valeurs de $L' - L$ montrent comment les effets des attractions locales sont supposés se succéder; les valeurs négatives de $\Delta - \Delta_0$ expriment la quantité dont la surface de niveau s'abaisse au-dessous de la surface menée par le sommet de la protubérance liquide, parallèlement au sphéroïde de révolution.

Bien que ces résultats reposent en partie sur des données conjecturales, il ne paraît pas douteux que les variations d'altitude de la surface du niveau n'atteignent de 10 à 20 mètres dans le Caucase.

Voici un autre résultat bien plus extraordinaire, qui a été obtenu par M. de Benazet, ingénieur des constructions navales, et communiqué récemment au Bureau des Longitudes par cet ingénieur.

M. de Benazet, voulant connaître la déviation du pendule au Callao, dans l'Amérique australe, s'est trouvé obligé, en l'absence de chaînes de triangles reliant les deux versants des Andes, de calculer directement les attractions produites par le continent entier de l'Amérique du Sud. A cet effet, il s'est procuré des renseignements approximatifs sur le relief du sol et les densités, sur la variation de profondeur de la mer. M. de Benazet ne s'est pas contenté de calculer la déviation du pendule au Callao, déviation qu'il a trouvée dépasser plusieurs minutes; il a calculé les ordonnées du profil de la surface de la mer dans la direction perpendiculaire à la côte, au Callao. Or il a trouvé que la mer s'abaisse progressivement, à partir de la côte, d'une quantité qui finit par rester constante, et atteint alors 137 mètres! La plupart des données du calcul de M. de Benazet sont affectées d'incertitudes; mais il paraît cependant admissible que le résultat ne soit pas affecté d'erreurs dépassant le $\frac{1}{3}$ ou le $\frac{1}{4}$ du chiffre auquel il est parvenu : on peut ainsi regarder comme très-probable que, dans une région donnée du Pacifique, les attractions du continent de l'Amérique du Sud produisent, dans le voisinage des côtes, un exhaussement atteignant 100 mètres ou plus encore.

Ces deux exemples suffiront, je pense, pour montrer toute l'importance des questions qui se rattachent à la surface de niveau : il est seulement à regretter que les travaux de géodésie astronomique n'aient pas été continués chez nous; car, autrement, il nous eût été possible de produire des résultats effectifs et intéressant, à ce titre, notre propre pays.

Nouveau mode d'application du troisième théorème sur les attractions locales au contrôle des réseaux géodésiques et à la détermination de la vraie figure de la Terre.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, séance du 7 avril 1873.)

En présentant à l'Académie une première solution du problème des surfaces de niveau, le 28 décembre 1868, j'indiquais une autre solution, fondée sur la considération des normales à une même surface de niveau, et l'existence d'une équation de condition entre les données; j'indiquais en même temps le parti que l'on pourrait tirer de cette équation pour le contrôle des opérations géodésiques. Dans la séance du 2 octobre 1871, j'ai présenté, sous une forme simple, l'équation différentielle de la surface de niveau, et j'en ai déduit l'équation de condition qui constitue le troisième théorème sur les attractions locales. L'intégration de l'équation différentielle a été effectuée au moyen des séries trigonométriques procédant suivant les sinus et cosinus des multiples des longitudes et latitudes géodésiques.

L'intégration ainsi obtenue peut rencontrer, dans la pratique, des difficultés qu'on ne parviendrait à lever qu'en recommençant le travail déjà effectué : par exemple, ce n'est qu'après avoir effectué des interpolations, que l'on parviendra à reconnaître si, dans certaines régions accidentées, le nombre des stations astronomiques est ou n'est pas suffisant pour déterminer convenablement les inflexions de la surface de niveau. Si donc on arrive à reconnaître la nécessité d'augmenter le nombre des stations dans ces régions, on sera conduit à recommencer les intégrations dans toute l'étendue des lignes géodésiques qui les traversent.

Le problème que nous voulons résoudre aujourd'hui est le suivant : Les stations astronomiques étant, par exemple, à peu près équidistantes dans le sens des méridiens et des parallèles, déterminer la figure des surfaces de niveau, dans une étendue comprenant un nombre restreint de points, tel que cinq au moins, et neuf à treize tout au plus, au moyen de l'altitude supposée connue d'un point central; les ordonnées de la surface de niveau par rapport à la surface du sphéroïde de comparaison étant ainsi connues dans l'espace considéré, on prendrait l'une des stations situées à la limite de cet espace comme point central d'une nouvelle circonscription, et en opérant ainsi de proche en proche, dans une direction déterminée, on obtiendrait les ordonnées de la surface de niveau dans toute l'étendue d'une zone de plusieurs degrés de largeur. La vérification de l'exactitude des résultats reposerait alors sur l'identité des cotes d'altitude obtenues pour une même station, qui se trouverait faire partie de plusieurs zones distinctes. Toutefois on doit remarquer que si, au lieu de diriger l'axe des zones suivant une ligne géodésique, on infléchit l'axe de la première zone parallèlement au contour de la première circonscription, les deux extrémités de la zone coïncideront, ce qui fournira la vérification la plus directe; en outre, la zone et l'espace intérieur déjà déterminé auront de nombreux points communs qui fourniront autant de vérifications distinctes. Dans cette manière de procéder, s'il arrive que, dans une région, il soit nécessaire de faire de nouvelles stations astronomiques, la partie des calculs qu'il faudra reprendre se trouvera limitée à cette même région. En continuant ainsi, on ne sera pas exposé à reprendre un ensemble de calculs déjà effectués, et l'on sera en possession d'une base solide, sur laquelle pourront s'appuyer avec sécurité les déterminations relatives aux zones extérieures.

Dans ce travail, nous ferons usage des développements en séries ordonnées suivant les puissances et produits des différences des coordonnées des points considérés et du point central. Comme on peut employer les coordonnées angulaires et les coordonnées linéaires, il est clair que les développements pourront s'obtenir sous des formes différentes.

1° *Emploi des coordonnées angulaires.* — En conservant les notations de la Communication du 2 octobre 1871, et négligeant les termes du second ordre par rapport aux attractions locales, on réduit l'équation différentielle (18) de la surface du niveau à

$$(36) \qquad d\Delta = -\frac{a^2c^2}{V^3}\sin(L'-L)\,dL - a\cos\lambda\cos L\sin(\mathcal{L}'-\mathcal{L})\,d\mathcal{L},$$

équation dans laquelle on peut remplacer V et $a\cos\lambda$ par leurs valeurs en fonctions de L; les équations (13) donnent à cet effet

$$(37) \qquad V^2 = a^2\cos^2 L + c^2\sin^2 L, \quad a\cos\lambda = \frac{a^2}{V}\cos L.$$

Soient L_i et $\mathcal{L}_i$ les latitude et longitude géodésiques d'un point pris dans le voisinage du centre d'un groupe de stations peu éloignées, L et $\mathcal{L}$ désignant les coordonnées de l'une quelconque des autres; nous poserons

$$(38) \qquad s = \mathcal{L} - \mathcal{L}_i, \qquad\qquad t = L - L_i,$$

$$(39) \qquad \sigma = -\frac{a^2}{V}\cos^2 L\sin(\mathcal{L}'-\mathcal{L}), \quad \tau = -\frac{a^2c^2}{V^3}\sin(L'-L);$$

en conséquence, l'équation différentielle (36) deviendra

$$(40) \qquad d\Delta = \tau\,dt + \sigma\,ds,$$

et la condition que cette différentielle soit exacte sera

$$(41) \qquad \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\sigma}{dt}.$$

En supposant celle-ci satisfaite, on aura pour intégrale

$$(42)\qquad \Delta - \Delta_i = \int \tau\, dt + \int \left(\sigma - \int \frac{d\tau}{ds}\, dt\right) ds,$$

où Δ_i est la constante arbitraire.

Pour faire usage de cette formule, il convient de développer en séries les fonctions σ et τ : désignant par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha', \beta', \gamma', \ldots$ des constantes à déterminer, nous poserons

$$(43)\left\{\begin{array}{l} \sigma = \sigma_i + \alpha s + \beta t + \gamma s^2 + \varepsilon st + \varkappa t^2 + \upsilon s^3 + \varphi s^2 t + \chi st^2 + \psi t^3 + \ldots, \\ \tau = \tau_i + \alpha' s + \beta' t + \gamma' s^2 + \varepsilon' st + \varkappa' t^2 + \upsilon' s^3 + \varphi' s^2 t + \chi' st^2 + \psi' t^3 + \ldots, \end{array}\right.$$

et nous aurons

$$\frac{d\tau}{ds} = \alpha' + 2\gamma' s + \varepsilon' t + 3\upsilon' s^2 + 2\varphi' st + \chi' t^2 + \ldots,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \beta + \varepsilon s + 2\varkappa t + \varphi s^2 + 2\chi st + 3\psi t^2 + \ldots.$$

Or, ces deux expressions devant satisfaire à l'équation de condition (41), quelles que soient les valeurs des variables s et t, on en déduit les relations suivantes entre les coefficients :

$$(44)\qquad \alpha' = \beta,\quad 2\gamma' = \varepsilon,\quad \varepsilon' = 2\varkappa,\quad 3\upsilon' = \varphi,\quad 2\varphi' = 2\chi,\quad \chi' = 3\psi, \ldots.$$

Au moyen de ces valeurs, la seconde équation (43) devient

$$(45)\quad \left\{\begin{array}{l} \tau = \tau_i + \beta s + \beta' t + \frac{1}{2}\varepsilon s^2 + 2\varkappa st + \varkappa' t^2 + \frac{1}{3}\varphi s^3 + \chi s^2 t \\ \qquad + 3\psi st^2 + \psi' t^3 + \ldots, \end{array}\right.$$

et l'on a

$$(46)\qquad \frac{d\tau}{ds} = \beta + \varepsilon s + 2\varkappa t + \varphi s^2 + 2\chi st + 3\psi t^2 + \ldots,$$

développement qui coïncide avec celui de $\frac{d\sigma}{dt}$.

La détermination des inconnues doit être effectuée au moyen de la première équation (43) et de l'équation (45) prises simultanément;

il faut seulement observer [considérant la présence du facteur $\cos^2 L$ dans l'expression (39) de σ] qu'il conviendra de diviser la première équation (43) par $\cos L$, avant de la combiner avec l'équation (45); autrement les équations n'auraient pas des poids égaux ou du moins comparables. Au moyen d'un nombre convenable de valeurs de σ et τ, on pourra déterminer les diverses inconnues qui comprendront tous les coefficients du développement de σ, et en outre les coefficients τ_i, β', $\varkappa'$, ψ',... du développement de τ. Les erreurs résiduelles des diverses équations mettront en évidence l'accord ou la discordance des données de l'observation et offriront un moyen de contrôle.

De l'expression (46) on déduit

$$-\int \frac{d\tau}{ds} dt = -\beta t - \varepsilon st - \varkappa t^2 - \varphi s^2 t - \chi st^2 - \psi t^3 - \ldots.$$

Ajoutant cette expression avec le développement (43) de σ, il vient

$$\sigma - \int \frac{d\tau}{ds} dt = \sigma_i + \alpha s + \gamma s^2 + \upsilon s^3 + \ldots;$$

d'où

$$\int \left(\sigma - \int \frac{d\tau}{ds} dt\right) ds = \sigma_i s + \frac{1}{2}\alpha s^2 + \frac{1}{3}\gamma s^3 + \frac{1}{4}\upsilon s^4 + \ldots;$$

on a d'ailleurs, en vertu de l'équation (45),

$$\int \tau dt = \tau_i t + \beta st + \frac{1}{2}\beta' t^2 + \frac{1}{2}\varepsilon s^2 t + \varkappa st^2 + \frac{1}{3}\varkappa' t^3 + \frac{1}{3}\varphi s^3 t$$
$$+ \frac{1}{2}\chi s^2 t^2 + \psi st^3 + \frac{1}{4}\psi' t^4 + \ldots.$$

La somme de ces deux expressions fournit, suivant la formule (42), l'intégrale cherchée

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta - \Delta_i = \sigma_i s + \tau_i t + \frac{1}{2}\alpha s^2 + \beta st + \frac{1}{2}\beta' t^2 + \frac{1}{3}\gamma s^3 + \frac{1}{2}\varepsilon s^2 t + \varkappa st^2 \\ + \frac{1}{3}\varkappa' t^3 + \frac{1}{4}\upsilon s^4 + \frac{1}{3}\varphi s^3 t + \frac{1}{2}\chi s^2 t^2 + \psi st^3 + \frac{1}{4}\psi' t^4 + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Dans les applications numériques, les quantités s et t seront exprimées par leurs valeurs en nombres abstraits ou en rapports d'arc au rayon.

2° *Emploi des coordonnées linéaires.* — Pour faire comprendre comment on est conduit à choisir les coordonnées dont il s'agit, nous ferons subir quelques transformations à l'équation différentielle (36).

Désignons par $\mathfrak{R}$ le rayon de courbure de la section méridienne au point $(\mathrm{L}, \mathfrak{L})$, et $\mathfrak{P}$ le rayon du parallèle de latitude L, dont la valeur est $\sqrt{x^2+y^2}$, nous aurons

$$\frac{a^2c^2}{\mathrm{V}^3} = \mathfrak{R}, \quad a\cos\lambda = \mathfrak{P}\,[*], \tag{48}$$

relations dont la seconde se déduit de la première équation (12).

Posons encore

$$\mu = a\sin(\mathrm{L}'-\mathrm{L}), \quad \varpi = a\cos\mathrm{L}\sin(\mathfrak{L}'-\mathfrak{L}); \tag{49}$$

l'équation (36) multipliée par $-a$ deviendra

$$-a\,d\Delta = \mu\mathfrak{R}\,d\mathrm{L} + \varpi\mathfrak{P}\,d\mathfrak{L}: \tag{50}$$

---

[*] *P. S.* Soit $x_1 = \sqrt{x^2+y^2}$, on aura

$$\mathfrak{R} = \pm\frac{\left(1+\dfrac{dz^2}{dx_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2z}{dx_1^2}},$$

où x_1 et z, ainsi que leurs différentielles, sont liés par les relations

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x_1dx_1}{a^2}+\frac{zdz}{c^2}=0, \quad \frac{dx_1^2}{a^2}+\frac{dz^2}{c^2}+\frac{zd^2z}{c^2}=0;$$

de là on déduit, en ayant égard à l'équation (9),

$$1+\frac{dz^2}{dx_1^2} = 1+\frac{c^4}{a^4}\frac{x_1^2}{z^2} = \frac{c^4}{z^2}\left(\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}\right) = \frac{c^4}{z^2\mathrm{V}^2},$$

$$\frac{d^2z}{dx_1^2} = -\frac{1}{z}\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{dz^2}{dx_1^2}\right) = -\frac{c^2}{a^2z}\left(1+\frac{c^2}{a^2}\frac{x_1^2}{z^2}\right) = -\frac{c^4}{a^2z^3},$$

et il vient

$$\mathfrak{R} = \frac{a^2c^2}{\mathrm{V}^3}.$$

Soit $\mathfrak{N}$ le rayon de courbure d'une section normale perpendiculaire au méridien, on le facteur a, introduit ici, a pour objet de rendre plus claire l'interprétation géométrique de l'équation de condition relative à l'intégrabilité. Cette équation est

$$\frac{d.\mu\mathfrak{R}}{d\mathfrak{L}} = \frac{d.\varpi\mathfrak{P}}{d\mathrm{L}},$$

ou, en observant que $\mathfrak{R}$ n'est pas fonction de $\mathfrak{L}$,

$$\mathfrak{R}\frac{d\mu}{d\mathfrak{L}} = \mathfrak{P}\frac{d\varpi}{d\mathrm{L}} + \varpi\frac{d\mathfrak{P}}{d\mathrm{L}}.$$

Or on a, en vertu des relations (37) et (48),

$$(51) \qquad \mathfrak{P} = \frac{a^2}{\mathrm{V}}\cos\mathrm{L}.$$

Différentiant cette équation, et ayant égard à la première équation (37) qui donne

$$(52) \qquad \mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{L}} = -(a^2 - c^2)\sin\mathrm{L}\cos\mathrm{L},$$

---

aura, suivant le théorème de Meunier, entre cette longueur et le rayon $\mathfrak{P}$ de la section oblique faisant l'angle L avec la précédente, la relation $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}\cos\mathrm{L}$. Soit, d'autre part, N la *grande normale* des géodésiens, ou la partie de la normale comprise entre la surface du sphéroïde et l'axe de révolution, on aura également $\mathfrak{P} = \mathrm{N}\cos\mathrm{L}$. Il résulte de ces relations, et en ayant égard à l'équation (11),

$$\mathfrak{N} = \mathrm{N} = \frac{a^2}{\mathrm{V}} \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \frac{a^2}{\mathrm{N}};$$

on aurait encore

$$\mathfrak{R} = \frac{c^2\mathrm{N}^3}{a^4} \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = c\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathfrak{R}}}.$$

Il existe des Tables qui donnent les valeurs de N et de $\mathfrak{R}$ en fonction de la latitude; on en déduirait, au besoin, celles de la fonction V.

Désignons enfin par ρ le rayon de courbure d'une section normale faite suivant l'azimut Z; on aura, d'après le théorème d'Euler,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\mathfrak{R}}\cos^2\mathrm{Z} + \frac{1}{\mathfrak{P}}\sin^2\mathrm{Z},$$

relation qui détermine ρ, et pourra être utilisée dans la théorie des réfractions terrestres appliquées aux nivellements géodésiques.

il vient

$$(53)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{P}}{d\mathrm{L}} = -\dfrac{a^2}{\mathrm{V}}\sin\mathrm{L} - \dfrac{a^2}{\mathrm{V}^2}\dfrac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{L}}\cos\mathrm{L} = -\dfrac{a^2}{\mathrm{V}}\sin\mathrm{L}\left[1-(a^2-c^2)\dfrac{\cos^2\mathrm{L}}{\mathrm{V}^2}\right] \\ \quad = -\dfrac{a^2c^2}{\mathrm{V}^3}\sin\mathrm{L} = -\mathfrak{R}\sin\mathrm{L}. \end{cases}$$

Substituant cette valeur dans l'équation de condition, et divisant ensuite par $\mathfrak{R}\mathfrak{P}$, on trouve

$$(54)\qquad \frac{1}{\mathfrak{P}}\frac{d\mu}{d\mathfrak{L}} = \frac{1}{\mathfrak{R}}\frac{d\varpi}{d\mathrm{L}} - \frac{\varpi}{\mathfrak{P}}\sin\mathrm{L},$$

résultat qui peut se mettre sous une autre forme. Suivant le premier théorème sur les attractions locales, on a

$$\sin(\mathrm{Z}'-\mathrm{Z}) + \sin\mathrm{L}(\mathfrak{L}'-\mathfrak{L}) = 0,$$

équation qui, combinée avec la deuxième (49), donne

$$(55)\qquad \varpi\sin\mathrm{L} = -a\cos\mathrm{L}\sin(\mathrm{Z}'-\mathrm{Z});$$

d'où, en vertu de l'équation (51),

$$(56)\qquad -\frac{\varpi}{\mathfrak{P}}\sin\mathrm{L} = \frac{\mathrm{V}}{a}\sin(\mathrm{Z}'-\mathrm{Z}).$$

Posons, pour abréger,

$$(57)\qquad \bar{\zeta}\,[*] = \frac{\mathrm{V}}{a}\sin(\mathrm{Z}'-\mathrm{Z}),\quad \text{d'où}\quad -\varpi\sin\mathrm{L} = \mathfrak{P}\bar{\zeta};$$

l'équation (54) donnera, moyennant une transposition de termes,

$$(58)\qquad \frac{1}{\mathfrak{P}}\frac{d\mu}{d\mathfrak{L}} - \frac{1}{\mathfrak{R}}\frac{d\varpi}{d\mathrm{L}} = \bar{\zeta}.$$

Telle est la nouvelle forme que prend le troisième théorème sur les attractions locales.

Nommons, pour abréger, perturbations de la latitude et de la lon-

---

[*] *P. S.* Ne pas confondre ce ζ avec celui dont il a été fait usage dans le Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XII, 1867.

gitude produites par les attractions locales les quantités μ et ϖ, et de même perturbation de l'azimut la quantité $\bar{\zeta}$, qui n'en diffère que de quantités de l'ordre de l'aplatissement du sphéroïde terrestre; concevons deux surfaces dont les ordonnées, par rapport à la surface du sphéroïde, soient respectivement μ et ϖ; considérons l'intersection de la première de ces surfaces par le plan du premier vertical du point $(\mathrm{L}, \mathcal{L})$, et celle de la seconde surface par le méridien; menons les tangentes à ces courbes, aux points dont les coordonnées communes sont L, $\mathcal{L}$: nous observerons que le premier terme de l'équation (58) est l'inclinaison de la première tangente sur l'horizontale dirigée vers l'ouest; le deuxième terme est égal, en faisant abstraction du signe qui le précède, à l'inclinaison de la deuxième tangente sur le côté nord de l'horizontale située dans le méridien. Si donc, eu égard à la petitesse de μ, ϖ et $\bar{\zeta}$, on substitue les angles à leurs tangentes ou sinus, on pourra énoncer le troisième théorème en ces termes : *L'inclinaison de la courbe des perturbations de la latitude sur l'horizon ouest, diminuée de l'inclinaison de la courbe des perturbations de la longitude sur l'horizon nord, est égale à la perturbation de l'azimut.*

Ce résultat nous a conduit à remplacer les latitudes et longitudes par les arcs de méridien et de parallèle.

Soient : m l'arc de méridien compris entre les latitudes L et L_i, p l'arc de parallèle à la latitude L, compris entre les méridiens de longitudes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_i$; nous aurons

(59) $$m = \int_{\mathrm{L}_i}^{\mathrm{L}} \mathfrak{R}\, d\mathrm{L}\,[*], \quad p = \mathfrak{P}(\mathcal{L} - \mathcal{L}_i),$$

d'où

(60) $$dm = \mathfrak{R}\, d\mathrm{L}, \qquad dp = \mathfrak{P}\, d\mathcal{L} + (\mathcal{L} - \mathcal{L}_i)\, d\mathfrak{P},$$

et, en ayant égard aux relations (53) et (59),

(61) $$dp = \mathfrak{P}\, d\mathcal{L} - \frac{p}{\mathfrak{P}} \sin \mathrm{L}.\, \mathfrak{R}\, d\mathrm{L}.$$

---

[*] *P. S.* La valeur de cette intégrale se déduira des Tables géodésiques qui donnent les arcs de méridien comptés de l'équateur, au moyen d'une simple soustraction

Au moyen de ces relations, jointes à la seconde équation (57), on éliminera aisément $\mathfrak{P} d\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{R} dL$ de l'équation (50), et l'on aura

$$-a d\Delta = (\mu - p\bar{\zeta})\, dm + \varpi\, dp. \tag{62}$$

L'équation de condition relative à l'intégralité de celle-ci peut s'écrire

$$\frac{d\mu}{dp} - \left(\frac{d\varpi}{dm}\right) = \bar{\zeta} + p\,\frac{d\bar{\zeta}}{dp}\,[*]. \tag{63}$$

Pour intégrer actuellement l'équation (62), nous allons former les expressions de μ, ϖ et $\bar{\zeta}$, suivant les puissances et produits de m et de p.

Posons en conséquence

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi &= \varpi_i + \mathrm{a}p + \mathrm{b}m + \mathrm{c}p^2 + \mathrm{e}pm + \mathrm{f}m^2 + \mathrm{g}p^3 + \mathrm{h}p^2 m \\ &\quad + \mathrm{k}pm^2 + \mathrm{l}m^3 + \ldots, \\ \mu &= \mu_i + \mathrm{a}'p + \mathrm{b}'m + \mathrm{c}'p^2 + \mathrm{e}'pm + \mathrm{f}'m^2 + \mathrm{g}'p^3 + \mathrm{h}'p^2 m \\ &\quad + \mathrm{k}'pm^2 + \mathrm{l}'m^3 + \ldots, \\ \bar{\zeta} &= \bar{\zeta}_i + \mathrm{a}''p + \mathrm{b}''m + \mathrm{c}''p^2 + \mathrm{e}''pm + \mathrm{f}''m^2 + \ldots; \end{aligned}\right.$$

nous aurons successivement

$$\frac{d\mu}{dp} = \mathrm{a}' + 2\mathrm{c}'p + \mathrm{e}'m + 3\mathrm{g}'p^2 + 2\mathrm{h}'pm + \mathrm{k}'m^2 + \ldots,$$

$$\left(\frac{d\varpi}{dm}\right) = \mathrm{b} + \mathrm{e}p + 2\mathrm{f}m + \mathrm{h}p^2 + 2\mathrm{k}pm + 3\mathrm{l}m^2 + \ldots,$$

$$p\,\frac{d\bar{\zeta}}{dp} = \mathrm{a}''p + 2\mathrm{c}''p^2 + \mathrm{e}''pm + \ldots,$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dp} - \left(\frac{d\varpi}{dm}\right) &= \mathrm{a}' - \mathrm{b} + (2\mathrm{c}' - \mathrm{e})p + (\mathrm{e}' - 2\mathrm{f})m + (3\mathrm{g}' - \mathrm{h})p^2 \\ &\quad + (2\mathrm{h}' - 2\mathrm{k})pm + (\mathrm{k}' - 3\mathrm{l})m^2 + \ldots,\end{aligned}$$

$$\bar{\zeta} + p\,\frac{d\bar{\zeta}}{dp} = \bar{\zeta}_i + 2\mathrm{a}''p + \mathrm{b}''m + 3\mathrm{c}''p^2 + 2\mathrm{e}''pm + \mathrm{f}''m^2 + \ldots.$$

---

[*] *P. S.* On peut, en suivant une autre voie, établir la relation (62) : par exemple en exprimant les dérivées $\left(\frac{d\Delta}{dm}\right)$ et $\frac{d\Delta}{dp}$ au moyen des dérivées de Δ relatives à L et $\mathfrak{L}$, et vérifier que l'équation de condition (63) s'accorde avec l'équation (58). C'est en vue de présenter ce mode de démonstration que nous avons compris sous une parenthèse la dérivée de ϖ par rapport à m; toutefois nous avons jugé superflu d'insister davantage sur ce point.

Or ces deux derniers développements devant être égaux, en vertu de l'équation de condition (63), quelles que soient les valeurs des variables p et m, on en déduit, entre les trois suites de coefficients, les relations

$$(65)\quad \left\{\begin{array}{lll} \mathrm{a}'-\mathrm{b}=\bar{\zeta}_i, & 2\mathrm{c}'-\mathrm{e}=2\mathrm{a}'', & \mathrm{e}'-2\mathrm{f}=\mathrm{b}'', \\ 3\mathrm{g}'-\mathrm{h}=3\mathrm{c}'', & 2\mathrm{h}'-2\mathrm{k}=2\mathrm{e}'', & \mathrm{k}'-3\mathrm{l}=\mathrm{f}''\ldots. \end{array}\right.$$

Substituant dans le développement de $\bar{\zeta}$ les valeurs de $\bar{\zeta}_i$, a″, b″, c″,... que donnent ces relations, on obtient cette expression

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned} \bar{\zeta}=\frac{\mathrm{V}}{a}\sin(\mathrm{Z}'-\mathrm{Z})\text{[*]} = \mathrm{a}'-\mathrm{b}+\left(\mathrm{c}'-\frac{1}{2}\mathrm{e}\right)p &+ (\mathrm{e}'-2\mathrm{f})m \\ +\left(\mathrm{g}'-\frac{1}{3}\mathrm{h}\right)p^2 &+ (\mathrm{h}'-\mathrm{k})pm \\ +(\mathrm{k}'-3\mathrm{l})m^2 &+ \ldots. \end{aligned}\right.$$

Les inconnues ϖ_i, μ_i, a, b, c,...., a', b', c',... s'obtiendront en résolvant simultanément les deux premières équations (64) et l'équation (66), au moyen d'un nombre suffisant de systèmes de valeurs censées connues de ϖ, μ et $\bar{\zeta}$. Dans ces équations [**], les quantités observées sont engagées sous une forme qui rend immédiatement comparables les erreurs de leurs premiers membres. La possibilité de représenter les données au moyen d'un nombre beaucoup moindre de coefficients offrira un moyen de contrôle auquel concourront à la fois les longitudes, les latitudes et les azimuts.

Soit

$$(67)\qquad \mathrm{M}=\mu-p\bar{\zeta};$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{M}=\mu_i+\mathrm{b}p+\mathrm{b}'m+\frac{1}{2}\mathrm{e}p^2+2\mathrm{f}pm+\mathrm{f}'m^2+\frac{1}{3}\mathrm{h}p^3 \\ +\mathrm{k}p^2m+3\mathrm{l}pm^2+\mathrm{l}'m^3+\ldots;\end{aligned}$$

---

[*] *P. S.* Pour utiliser les Tables géodésiques, on pourra remplacer ici $\frac{\mathrm{V}}{a}$ par $\frac{a}{\mathrm{N}}$.

[**] *P. S. Ajoutez :* et en y supposant la dernière multipliée par $a\cos\mathrm{L}$.

l'équation (62) deviendra

$$(68) \qquad -\,ad\Delta = \mathrm{M}dm + \varpi dp.$$

On vérifiera aisément que la condition $\frac{d\mathrm{M}}{dp} = \left(\frac{d\varpi}{dm}\right)$ est satisfaite.

En appliquant à l'intégration de l'équation (68) le mode de calcul qui a été suivi à l'égard de l'équation (40), on obtient finalement [*]

$$(69) \quad \begin{cases} a(\Delta_i - \Delta) = \varpi_i p + \mu_i m + \frac{1}{2}\,\mathrm{a}p^2 + \mathrm{b}pm + \frac{1}{2}\,\mathrm{b}'m^2 + \frac{1}{3}\,\mathrm{c}p^3 \\ \qquad + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}p^2m + \mathrm{f}pm^2 + \frac{1}{3}\,\mathrm{f}'m^3 + \frac{1}{4}\,\mathrm{g}p^4 \\ \qquad + \frac{1}{3}\,\mathrm{h}p^3m + \frac{1}{2}\,\mathrm{k}p^2m^2 + \mathrm{l}pm^3 + \frac{1}{4}\,\mathrm{l}'m^4 + \ldots \end{cases}$$

Ce développement, poussé jusqu'aux termes du quatrième ordre, sera sans doute suffisant, lorsque les distances en longitude et latitude

---

[*] *P. S.* La formule d'intégration de l'expression précédente est, en désignant par Δ_i la constante,

$$-\,a(\Delta - \Delta_i) = \int \mathrm{M}\,dm + \int\left(\varpi - \int\frac{d\mathrm{M}}{dp}\,dm\right)dp.$$

Voici le détail des calculs :

$$\frac{d\mathrm{M}}{dp} = \mathrm{b} + \mathrm{e}p + 2\,\mathrm{f}m + \mathrm{h}p^2 + 2\,\mathrm{k}pm + 3\,\mathrm{l}m^2 + \ldots,$$

$$\int\frac{d\mathrm{M}}{dp}\,dm = \mathrm{b}m + \mathrm{e}pm + \mathrm{f}m^2 + \mathrm{h}p^2m + \mathrm{k}pm^2 + \mathrm{l}m^3 + \ldots,$$

$$\varpi - \int\frac{d\mathrm{M}}{dp}\,dm = \varpi_i + \mathrm{a}p + \mathrm{c}p^2 + \mathrm{g}p^3 + \ldots,$$

$$\int\left(\varpi - \int\frac{d\mathrm{M}}{dp}\,dm\right)dp = \varpi_i p + \frac{1}{2}\,\mathrm{a}p^2 + \frac{1}{3}\,\mathrm{c}p^3 + \frac{1}{4}\,\mathrm{g}p^4 + \ldots,$$

$$\int \mathrm{M}\,dm = \mu_i m + \mathrm{b}pm + \frac{1}{2}\,\mathrm{b}'m^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}p^2m + \mathrm{f}pm^2 + \frac{1}{3}\,\mathrm{f}'m^3 + \frac{1}{3}\,\mathrm{h}p^3m + \frac{1}{2}\,\mathrm{k}p^2m^2 + \mathrm{l}pm^3 + \frac{1}{4}\,\mathrm{l}'m^4 + \ldots;$$

on en déduit la formule (69) du texte.

des stations au point central ne dépasseront pas $1\frac{1}{2}$ à 2 degrés. Dans tous les cas, la résolution des équations (64) et (66) permettra toujours de limiter les termes des développements au nombre convenable.

Les formules (47) ou (69) nous paraissent résoudre le problème des surfaces de niveau de la manière qui se prête le mieux aux exigences de la pratique.

Dans une autre Communication, nous examinerons l'influence que pourrait avoir sur les résultats la correction des éléments du calcul des positions géodésiques.

Remarques concernant l'emploi des séries trigonométriques dans la représentation des effets des attractions, et l'intégration de l'équation différentielle des surfaces de niveau.

Les avantages des développements algébriques qui ont été proposés dans le précédent Mémoire nous semblent assez évidents pour nous dispenser d'y revenir; aussi ne le ferons-nous pas : nous voulons seulement examiner ici comment on arriverait à vaincre certaines difficultés qui paraîtraient s'opposer à l'emploi des séries trigonométriques.

On a vu, dans l'avant-dernier Mémoire, comment le problème se simplifie lorsque, au lieu de rechercher l'équation des surfaces de niveau, on se propose tout d'abord de former l'équation d'un profil de ces surfaces; la détermination des divers profils équivaut en effet à celle de la surface entière dont ils font partie. Nous avons fait remarquer que, les stations astronomiques n'étant pas généralement échelonnées le long du profil considéré, il serait nécessaire de déduire, par voie d'interpolation, les valeurs des perturbations produites par les attractions locales, aux points du profil que l'on se propose de substituer aux stations astronomiques. Nous n'avons pas indiqué à cette occasion le mode d'interpolation auquel il conviendrait de recourir; or il est clair que cette lacune se trouve comblée par les développements contenus dans le dernier Mémoire. Supposons maintenant qu'on effectue les interpolations dont il s'agit et que, de plus, les points substitués aux stations astronomiques soient équidistants, tant dans le sens des méridiens que dans le sens des parallèles, et suffisamment rapprochés pour que toutes les inflexions de la surface de niveau puissent être convenablement représentées; il n'est pas difficile de reconnaître que, dans le cas d'un espace limité par des méridiens et des parallèles, les divers coefficients des développements trigonométriques pourront alors être obtenus, sans qu'il soit nécessaire de résoudre l'ensemble des équations de condition. Dans ce cas, en effet, chacun de ces divers coefficients s'obtiendra au moyen d'une intégrale définie double, qui se calculera par des formules de quadrature convenablement appropriées au sujet.

Si, comme en réalité, l'espace considéré est limité par un contour irrégulier, tel que celui des continents ou des frontières, la solution ne pourra être ramenée à la précédente qu'en substituant, aux valeurs inconnues des perturbations dans les régions comprises entre les limites de la surface et les méridiens et parallèles circonscrits, des fonctions arbitraires assujetties d'ailleurs à l'équation de condition relative à l'intégrabilité : les résultats obtenus ne s'appliqueraient évidemment qu'aux points compris dans l'espace primitivement considéré.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur la solution fournie par les développements trigonométriques. D'une part, ils exigeraient, pour satisfaire à la condition d'équidistance des points, un nombre de stations bien plus considérable que le nombre nécessaire dans le cas des développements algébriques (ceux-ci n'exigeant le rapprochement des stations que dans les régions accidentées). D'autre part, il nous semble que la formation de l'équation générale de la surface de niveau n'offrirait, pour la discussion, aucun avantage sur les équations qui représentent cette surface dans des espaces plus limités.