JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

Détermination du point critique où est limitée la convergence de la série de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 18 (1873), p. 53-67.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__53_0>

Détermination du point critique où est limitée la convergence de la série de Taylor;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE.

J'ai établi, dans un Mémoire qui a paru en 1861 dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, que les points où peut être limitée la région de convergence de la série suivant laquelle se développe, d'après la formule de Taylor, une fonction y, explicite ou implicite, sont exclusivement ceux où la fonction ou ses dérivées, à partir d'un certain ordre, deviennent infinies, à l'exclusion, par conséquent, des points multiples qui ne remplissent pas cette condition. J'ai établi en même temps l'inexactitude de la règle, donnée par Cauchy et adoptée depuis, explicitement ou implicitement, par tous les géomètres qui ont écrit sur la matière, M. Lamarle, M. Bonnet, M. Tchebychef, M. Puiseux, MM. Briot et Bouquet, d'après laquelle le cercle de convergence passerait par le point critique le plus voisin du point origine. L'erreur que j'ai relevée alors tient à une confusion qui avait été maintenue jusque-là : il ne suffit pas, pour que la convergence de la série de Taylor soit limitée à une certaine valeur de x, que cette valeur soit critique, ou plutôt qu'il y corresponde une valeur critique de y : il faut surtout que y, variant d'une manière continue avec x à partir de sa valeur initiale, arrive à sa valeur critique en même temps que x, sans que x ait dépassé la limite en question.

C'est de ce principe que naît la question qui sera résolue dans ce Mémoire.

Cette question paraissait inabordable, et elle n'a été en effet abordée par personne, malgré l'intérêt qu'elle présente et quoiqu'elle se trouve posée depuis bien longtemps.

La simplicité de la solution que j'en donne s'explique par deux motifs : le premier, que la considération des conjuguées fournit une méthode simple de classification des solutions imaginaires d'une équation à deux variables, et que j'ai depuis longtemps donné des moyens simples et pratiques pour construire ces conjuguées, d'abord comme lieux des intersections idéales de droites réelles, parallèles entre elles, avec le lieu, ensuite au moyen de leurs tangentes, de leurs asymptotes et, au besoin, de leurs courbures; le second, que j'ai antérieurement (*Journal de Mathématiques*, 1861) résolu directement le problème de déterminer la marche continue du point (x, y), tandis que $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ suivrait un chemin continu $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

La construction préalable des conjuguées avait, dans la question qui va nous occuper, une importance comparable à celle qu'aurait la description topographique d'un pays où l'on voudrait établir une route; il y avait eu, au reste, interversion de rôles entre les deux questions de la convergence de la série de Taylor et de la marche continue du point (x, y). M. Puiseux avait fait dépendre la seconde de la première, et, au contraire, il serait impossible de savoir si y est parvenu à sa valeur critique, quand x est arrivé à celle qui la donne, si l'on ne pouvait pas suivre la marche du point (x, y).

Je ramènerai la question de la détermination du point critique où est véritablement limitée la région de convergence à celle de la détermination du point d'arrivée d'un point (x, y) se mouvant d'une manière continue, tandis que son abscisse $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ varierait suivant une certaine loi, toujours très-simple du reste; mais je ne traiterai pas ici la seconde question, que j'ai résolue il y a dix ans.

Je me borne à rappeler que j'ai discuté alors, dans toutes les hypothèses possibles, la marche du point (x, y) à travers les conjuguées des lieux

$$y^2 = 2px,$$
$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2,$$
$$y^3 - a^2y + a^2x = 0,$$
$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

et

$$y^4 + x^4 = a^4;$$

que ces discussions n'ont présenté aucune difficulté d'aucune sorte, et qu'elles étaient si bien appropriées à la solution de la question qui va être traitée ici d'une manière générale, que non-seulement j'étais arrivé pour ainsi dire sans méthode à la solution de cette question, relativement aux exemples ci-dessus et aux deux suivants

$$y^n = (1 + x)^m$$

et

$$y = \mathrm{L}(1 + x),$$

mais encore que j'ai pu, dans tous les cas, assigner le caractère distinctif de celle des valeurs de la fonction dont la série donnait le développement.

Je commencerai par la définition de quelques termes que j'emploie dans un sens nouveau, et de quelques autres que j'ai cru devoir introduire pour simplifier le langage.

On a jusqu'ici entendu par *point critique* le point représentatif d'une valeur de la variable x à laquelle correspondait une valeur infinie ou multiple de la fonction y : j'appelle *point critique* d'un lieu $f(x, y) = 0$ le point réel ou imaginaire qui a pour coordonnées la valeur de x à laquelle correspond une valeur critique de y et cette valeur critique de y, c'est-à-dire que, des m points du lieu $f(x, y) = 0$, de degré m, qui correspondent à une valeur critique de x, j'appelle seulement *critique* celui dont l'ordonnée est infinie ou dont l'ordonnée a ses dérivées infinies à partir d'un certain ordre ; car ce sont les seuls points multiples d'une ligne qui puissent être considérés comme critiques.

Je désignerai souvent sous le nom de *point origine* le point correspondant au système des valeurs de x et de y à partir desquelles on veut développer y suivant la série de Taylor.

Si $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ et $\alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$ sont les coordonnées du point origine, et que $a + b\sqrt{-1}$, $a' + b'\sqrt{-1}$ soient celles du point critique où se trouve limitée la convergence de la série de Taylor, l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots$$

ne peut fournir que les ordonnées des points du lieu $f(x,y)=0$, dont les abscisses

$$x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$$

satisfont à la condition

$$(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2<(a-\alpha_0)^2+(b-\beta_0)^2;$$

mais pour chaque valeur, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, de x, satisfaisant à cette condition, elle ne fournit qu'une seule des m valeurs de y correspondantes.

Les points correspondant aux solutions de l'équation

$$y=y_0+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0\frac{x-x_0}{1}+\ldots$$

forment plaque sur le tableau. Cette plaque est une partie de la portion du plan recouverte par les points correspondant aux solutions de l'équation

$$f(x,y)=0;$$

je la désigne sous le nom de *région de convergence* relative au point (x_0,y_0). C'est le segment du lieu $f(x,y)=0$ qui représente le segment bien déterminé

$$y_0+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0\frac{x-x_0}{1}+\ldots$$

de la fonction multiple y.

La région de convergence est comprise dans l'intérieur d'une courbe qui est *le périmètre ou la circonférence de la région de convergence;* cette courbe passe par un point critique $a+b\sqrt{-1}$, $a'+b'\sqrt{-1}$, qui en est la *limite,* et est caractérisée par l'équation

$$(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2=(a-\alpha_0)^2+(b-\beta_0)^2.$$

Il pourra m'arriver de désigner le point origine sous le nom de *centre de la région de convergence.*

Cela posé, j'examinerai successivement le cas où l'équation $f(x, y) = 0$ aurait tous ses coefficients réels et où tous les points critiques seraient réels; le cas où, les coefficients de l'équation restant réels, quelques points critiques seraient imaginaires; enfin le cas où les coefficients de l'équation $f(x, y) = 0$ seraient imaginaires. Je distinguerai aussi dans chaque cas les deux hypothèses où l'abscisse du point origine serait réelle ou imaginaire.

PREMIER CAS.

L'équation a tous ses coefficients réels, et tous les points critiques sont réels.

Dans ce cas, les points critiques sont exclusivement les points de contact des tangentes menées à la courbe réelle parallèlement à l'axe des y.

Supposons d'abord que le point origine ait son abscisse réelle. Ses coordonnées seront

$$x_0 = \alpha_0 \quad \text{et} \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1},$$

β'_0 pouvant être nul, et le point lui-même sera situé sur une branche de la courbe réelle ou sur une branche de la conjuguée $c = \infty$.

Dans ce cas, *le point critique où sera limitée la région de convergence ne saurait être que l'un des deux qui pourront terminer cette branche dans un sens et dans l'autre, et ce sera celui qui fournira le moindre rayon ou dont l'abscisse différera le moins de celle du point origine.*

En effet, soit (a_n, a'_n) un des points critiques non situés sur la branche à laquelle appartient le point (x_0, y_0). Admettre que la région de convergence pût être limitée à ce point serait admettre que la série pût donner l'ordonnée d'un point $x = a_n \pm h$, $y = a'_n \pm k$ de la courbe réelle, ou de la conjuguée à abscisses réelles passant en (a_n, a'_n), infiniment voisin de ce point (a_n, a'_n); mais il ne peut en être ainsi : car, si l'on faisait revenir x par valeurs réelles de $a_n \pm h$ à x_0, le point (x, y) pénétrerait de plus en plus dans la région de convergence; son ordonnée serait donc à chaque instant représentée par la série; mais, d'un autre côté, ce point, en se déplaçant d'une manière continue, suivrait ou bien la branche de la courbe réelle, ou bien la branche de la conjuguée à abscisses réelles qui partent de (a_n, a'_n), et tomberait finalement au point de l'une ou l'autre de ces branches qui aurait pour abscisse $x = x_0$.

Si ce point n'était pas le point origine, c'est-à-dire si le point critique (a_n, a'_n) n'appartenait pas à la même branche de la courbe à abscisses réelles que le point origine, la série donnerait donc en même temps deux valeurs de y pour une même valeur de x, ce qui est impossible.

D'un autre côté, il est bien clair que, si le point (x_0, y_0) est compris, sur la branche à laquelle il appartient, entre deux points critiques, ce sera au plus voisin que s'arrêtera la convergence, puisque la série prendra déjà une valeur infinie en ce point.

Supposons, en second lieu, que le point origine ait ses deux coordonnées imaginaires.

Soient

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

les coordonnées de ce point, et

$$x = a_n, \quad y = a'_n$$

les coordonnées du point critique, encore inconnu, par lequel passera la circonférence de la région de convergence; le carré du rayon du cercle de convergence sera

$$(\alpha_0 - a_n)^2 + \beta_0^2;$$

or, si un point (x, y) part de

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

et se déplace d'une manière continue, tandis que son abscisse $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ variera de $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ à α_0, β passant ainsi de β_0 à o et α restant constamment égal à α_0, ce point ne sortira pas un seul instant de la région de convergence; par conséquent, la série donnera à chaque instant son ordonnée, notamment lorsque son abscisse sera devenue α_0.

D'un autre côté, si un autre point (x, y) partait du point critique (a_n, a'_n), et que son abscisse variât par valeurs réelles de a_n à α_0, un des points dans lesquels il se décomposerait [*] pénétrerait de plus en plus dans la région de convergence, et son ordonnée serait aussi à chaque instant donnée par la valeur de la série.

Si donc ce point ne rejoignait pas l'autre, qui est parti de (x_0, y_0), au moment où leurs abscisses prendront la même valeur α_0, la série pourrait donner deux valeurs différentes de y pour une même valeur de x, ce qui est impossible.

Les deux points (x, y) devront donc se rejoindre.

Mais le second aura suivi l'une des branches de la courbe réelle, ou de la conjuguée $c = \infty$, qui se touchaient au point critique $(a_n a'_n)$; par conséquent ce point critique devra appartenir à la branche de la courbe à abscisses réelles sur laquelle viendra tomber le point qui partira de (x_0, y_0), et dont l'abscisse varierait de $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ à α_0.

Les points critiques à considérer, relativement à l'origine (x_0, y_0), seront donc seulement ceux qui se trouveront sur cette branche.

Du reste, il est clair qu'il faudra prendre celui qui donnera le moindre rayon pour la région de convergence. Car 1° ce point pourra être atteint sans sortir de la région qu'il limitera ; 2° la série y prendra une valeur infinie; 3° pour aller joindre l'autre point critique, il faudrait faire prendre au module de $(x - x_0)$ une valeur supérieure à celui d'une valeur de cette différence pour laquelle la série serait déjà infinie.

Ainsi, dans le cas qui vient d'être examiné, la marche à suivre consistera à *déterminer le point d'arrivée du point qui partirait du point origine, et dont l'abscisse varierait de manière que sa partie imaginaire tendît directement vers zéro, sa partie réelle restant constante; ensuite à prendre sur la branche de la courbe à abscisses réelles, où se trouvera le point d'arrivée du point (x, y), celui des points critiques*

[*] Ces points sont toujours en nombre égal au degré de multiplicité du point critique.

dont l'abscisse différerait le moins de la partie réelle de l'abscisse du point origine.

DEUXIÈME CAS.

L'équation $f(x, y) = 0$ a tous ses coefficients réels ; mais quelques points critiques sont imaginaires.

Supposons d'abord que l'abscisse du point origine soit réelle.

Si la région de convergence devait être limitée à l'un des points critiques réels, on saurait, par la théorie précédente, auquel on aurait affaire; mais il pourra arriver que la limite soit un des points critiques imaginaires.

Soient

$$x_0 = \alpha_0, \quad \text{et} \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

les coordonnées du point origine, β'_0 pouvant être nul, et

$$x = a_n + b_n\sqrt{-1}, \quad y = a'_n + b'_n\sqrt{-1}$$

les coordonnées du point critique imaginaire où serait limitée la région de convergence; le rayon de cette région sera alors

$$(\alpha_0 - a_n)^2 + b_n^2;$$

si l'on fait partir du point $(a_n + b_n\sqrt{-1}, \alpha'_n + b'_n\sqrt{-1})$ un point (x, y) assujetti à la condition de continuité, et que l'on fasse converger son abscisse vers a_n, en faisant tendre vers zéro la partie imaginaire de cette abscisse, un des points dans lesquels il se décomposera pénétrera de plus en plus dans l'intérieur de la région de convergence, puisque le module de la différence de son abscisse et de celle du point origine variera de

$$(\alpha_0 - a_n)^2 + b_n^2 \text{ à } (\alpha_0 - a_n)^2;$$

par conséquent l'ordonnée de ce point sera constamment donnée par la valeur de la série.

D'un autre côté, si l'on fait partir un autre point (x, y) du point origine et qu'on fasse tendre son abscisse vers a_n par valeurs réelles, ce point ne sortira pas un instant de la région de convergence; les deux points devront donc se confondre quand leurs abscisses auront pris la valeur commune a_n.

Mais le point qui sera parti du point origine aura suivi la branche de la courbe à abscisses réelles qui contient ce point origine.

Par conséquent le point parti du point critique

$$(a_n + b_n\sqrt{-1},\ a'_n + b'_n\sqrt{-1})$$

aura dû tomber sur cette branche.

Les points critiques imaginaires tels qu'aucun de ceux qui en seraient partis simultanément ne viendrait tomber sur la branche de la courbe $\beta = 0$, passant par le point origine, ne seront donc pas à considérer.

D'ailleurs cette branche se terminera dans les deux sens par deux points critiques (dont l'un pourra être à l'infini ou ne pas exister), et les points critiques imaginaires tels qu'aucun de ceux qui en seraient partis simultanément ne viendrait tomber entre ces deux extrémités ne seront pas davantage à considérer.

On prendra, parmi les points critiques restants, le plus proche du point origine, c'est-à-dire celui auquel correspondra le moindre rayon, et, s'il n'est resté aucun point critique imaginaire, on prendra l'extrémité la plus proche du point origine. La démonstration se ferait comme dans le cas précédent.

Le nombre des points critiques imaginaires peut être considérable, et il y aurait avantage à en écarter d'avance le plus grand nombre possible. On en supprimera un grand nombre en remarquant que, la région de convergence relative à une origine située sur une branche de la courbe $\beta = 0$ ne pouvant en aucun cas entamer ni l'une ni l'autre des branches de la même courbe qui comprennent la branche où se trouve le point origine, les points critiques à considérer seront seulement ceux qui seront compris entre ces deux branches.

Si le point origine avait son abscisse imaginaire, on la ramènerait aisément à être réelle, comme on le verra dans le paragraphe suivant. Je passe donc immédiatement au troisième cas.

TROISIÈME CAS.

L'équation $f(x, y) = 0$ a ses coefficients imaginaires.

Si l'on suppose d'abord que le point origine ait son abscisse réelle, on démontrera, comme dans le cas précédent, que les points critiques à considérer seront seulement ceux auxquels on parviendrait directement en partant des points situés sur la branche de la conjuguée $c = \infty$, où se trouve l'origine, qui auraient pour abscisses les parties réelles des abscisses de ces points critiques, et faisant varier β de zéro aux parties imaginaires de ces mêmes points critiques.

Celui des points critiques remplissant cette condition, dont l'abscisse retranchée de l'abscisse de l'origine donnera la différence de moindre module, sera la limite de la région de convergence. On le démontrerait comme précédemment.

Supposons maintenant que le point origine ait son abscisse imaginaire et soient

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0 \sqrt{-1}.$$

Si l'on remplace, dans l'équation proposée

$$f(x, y) = 0,$$

x par $x + \beta_0 \sqrt{-1}$, le lieu, considéré dans son ensemble, ne changera pas; les points critiques seront les mêmes, leurs ordonnées seront les mêmes et leurs abscisses auront seulement diminué de $\beta_0 \sqrt{-1}$; les conjuguées auront bien changé, mais elles seront formées des points de l'ancien lieu, et il sera facile de les construire. D'un autre côté, le point origine sera devenu

$$x_0 = \alpha_0, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0 \sqrt{-1};$$

mais la région de convergence sera restée la même par ces deux raisons que, aux points correspondants, les dérivées de y par rapport à x seront restées les mêmes, et que les valeurs de $x - x_0$, pour les points correspondants, seront aussi restées les mêmes, x et x_0 ayant varié de la même quantité.

La question sera donc restée au fond la même; mais, l'abscisse du point origine étant devenue réelle, on pourra appliquer la méthode qui convient à ce cas.

Si l'on voulait éviter la substitution de $x + \beta_0\sqrt{-1}$ à x dans l'équation, substitution qui en effet pourra quelquefois compliquer beaucoup cette équation, on le pourra en considérant que la conjuguée $c = \infty$ du nouveau lieu ne serait autre chose que la courbe

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1}$$

de l'ancien, et que cette courbe

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1}$$

jouera par conséquent, dans la question, précisément le même rôle que la conjuguée $c = \infty$, dans le cas où l'abscisse du point origine était réelle.

On construira donc la branche de la courbe

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1},$$

qui partirait du point origine, et pour savoir si l'un des points critiques du lieu,

$$x = a_n + b_n\sqrt{-1}, \quad y = a'_n + b'_n\sqrt{-1},$$

serait à considérer, on en fera partir un point (x, y) dont on fera varier l'abscisse de

$$a_n + b_n\sqrt{-1} \quad \text{à} \quad a_n + \beta_0\sqrt{-1}.$$

Si l'un des points dans lesquels se décomposera ce point (x, y) vient tomber sur la branche en question de la courbe

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1},$$

il faudra conserver le point critique correspondant.

On prendra toujours ensuite pour limite de la région de convergence celui des points critiques conservés auquel correspondra le moindre rayon.

On peut évidemment résumer dans un même énoncé général les règles relatives aux trois cas, que nous n'avons du reste distingués que parce qu'il y correspondra des difficultés pratiques bien différentes.

Soient $f(x,y) = 0$ l'équation qui définit la fonction y, que l'on veut développer, et

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

le système de valeurs de x et de y à partir duquel on veut développer y; on déterminera le point d'arrêt par la règle suivante :

On construira les courbes formées des points (x,y) correspondant aux solutions de l'équation $f(x,y) = 0$ où x serait de la forme

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1},$$

la partie réelle de x variant ainsi seule.

Ces courbes partageront le plan en bandes, et les points critiques qui seront à considérer seront seulement ceux qui se trouveront contenus dans les deux bandes comprises entre la courbe sur laquelle se trouvera le point origine (x_0, y_0) et les deux courbes voisines, dans un sens et dans l'autre.

Soient

$$x = a_n + b_n\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y\, a'_n + b'_n\sqrt{-1}$$

les coordonnées d'un des points critiques remplissant cette condition, et p son degré de multiplicité : on fera varier x de $a_n + b_n\sqrt{-1}$ à $a_n + \beta_0\sqrt{-1}$, et l'on suivra dans leur marche les p points qui partiront du point critique.

Si aucun de ces p points ne vient tomber sur la branche de la courbe caractérisée par l'équation

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1}$$

à laquelle appartient le point origine, le point critique en question ne sera pas à considérer.

On prendra, parmi les points critiques qui resteront, celui dont l'abscisse, retranchée de $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$, donnera la différence de moindre module; la série sera convergente pour toute valeur de x telle que le module de $x - x_0$ se trouve moindre que le module trouvé, et divergente pour toute autre valeur.

Cette règle est assez compliquée, et sa mise en pratique exigera des opérations délicates qui deviendront même très-pénibles, pour peu que l'équation $f(x, y) = 0$ se complique; mais il ne peut subsister aucun espoir de les réduire, par la raison que la règle elle-même comprend toutes les conditions du problème et ne comprend qu'elles; il ne saurait donc être question que de faciliter cette mise en pratique par l'application d'une méthode convenable.

Je crois que celle que j'ai donnée en 1861 dans le *Journal de Mathématiques*, pour suivre la marche d'un point (x, y) assujetti à la continuité, sera adoptée de préférence; mais avant d'indiquer les simplifications qu'elle comportera, en raison des conditions particulières que présente la question actuelle, je ferai remarquer que l'on pourrait toujours, si l'on y tenait, se servir de celle qu'a indiquée M. Puiseux en 1851, dans un autre but.

En effet tout se réduit, en définitive, à savoir si un point (x, y) parti de

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

arrivera à un point critique désigné

$$x = a_n + b_n\sqrt{-1}, \quad y = a'_n + b'_n\sqrt{-1},$$

lorsque x aura varié d'abord de $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ à $a_n + \beta_0\sqrt{-1}$ et ensuite de $a_n + \beta_0\sqrt{-1}$ à $a_n + b_n\sqrt{-1}$.

Or on trancherait effectivement la question d'une façon sûre en divisant le chemin formé des deux droites allant du point (α_0, β_0) au point (a_n, β_0) et de ce dernier au point (a_n, b_n), en parties telles que le module de la différence des valeurs de x correspondant à deux points de division consécutifs restât toujours inférieur au module de l'excès de la valeur de x correspondant au premier de ces deux points sur l'abscisse du point critique le plus voisin, et se servant de la série pour calculer de proche en proche la valeur finale de y.

L'application de cette méthode serait au reste singulièrement facilitée par cette circonstance, que l'accroissement donné à x pour passer d'un point de division du chemin dont il s'agit au suivant serait toujours composé d'une seule partie, réelle ou imaginaire, ce qui éviterait la formation des puissances successives d'un même binôme, formation à laquelle il eût fallu se résoudre dans le cas général pour lequel M. Puiseux avait imaginé sa méthode.

Ainsi, en s'en tenant même à cette méthode, quelque imparfaite qu'elle soit, on n'en devrait pas moins regarder la question comme résolue, au moins théoriquement.

Mais il est bien facile de montrer d'autre façon que les recherches pratiques qu'exigera l'emploi de la règle énoncée ne comporteront jamais que des difficultés que l'on sait d'avance résoudre.

J'insisterai d'abord sur le procédé à employer pour rejeter à l'avance tous ceux des points critiques qui ne se trouveraient pas compris entre les deux branches de la courbe

$$x = \alpha + \beta_0 \sqrt{-1},$$

qui comprennent elles-mêmes celle où se trouve le point origine.

Les points critiques appartenant tous à l'enveloppe des conjuguées, il suffira, pour trancher la question, de savoir d'une part en quels points cette enveloppe est coupée par les m branches de la courbe

$$x = \alpha + \beta_0 \sqrt{-1},$$

et de distinguer ensuite parmi ces points de rencontre celui qui appartiendra à celle des branches de cette courbe qui passerait par le point origine; car les points critiques qui n'appartiendraient pas aux deux segments de l'enveloppe limités à ce dernier point devraient être écartés.

Or, pour déterminer tous les points de rencontre en question, on n'aura qu'à résoudre les équations

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0$$

$$\frac{\dfrac{df}{d\alpha + d\beta\sqrt{-1}}}{\dfrac{df}{d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}}} = \text{réel},$$

$$\beta = \beta_0.$$

D'un autre côté, la construction d'une branche définie de la courbe

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1},$$

de celle, par exemple, qui passerait par le point origine, se fera pour ainsi dire à main levée, lorsqu'on aura tracé à l'avance, comme on doit le supposer, et comme il est toujours si facile de le faire, le tableau général des conjuguées du lieu; en effet, la valeur variable de β est la moitié de la projection sur l'axe des x de la corde réelle menée du point (x, y) dans la conjuguée à laquelle appartient ce point; de sorte que la courbe

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1}$$

n'est autre chose que le lieu des extrémités des cordes réelles des diverses conjuguées dont les projections sur l'axe des x sont égales à $2\beta_0$.

Ainsi il sera toujours relativement facile d'écarter à l'avance le plus grand nombre des points critiques.

Pour déterminer ensuite le point d'arrêt, parmi les points critiques qui resteront à considérer, on n'aura plus à faire varier que la partie imaginaire de x, et par conséquent la question se présentera dans des conditions bien plus simples que celles où je l'ai traitée en 1861, sur des exemples assez compliqués déjà pour montrer que la méthode était praticable.