JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

Détermination du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor et des portions des différentes conjuguées comprises dans cette région, ou construction du tableau général des valeurs d'une fonction que peut fournir le développement de cette fonction suivant la série de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 68-100.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__68_0>

Détermination du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor et des portions des différentes conjuguées comprises dans cette région, ou construction du tableau général des valeurs d'une fonction que peut fournir le développement de cette fonction suivant la série de Taylor;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

La fonction

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

essentiellement unique, déterminée et finie, tant que la série qui la constitue reste convergente, n'est, si l'on peut s'exprimer ainsi, qu'une portion de la fonction y, généralement multiple, définie par l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

qui a servi à calculer la valeur initiale y_0 et les coefficients différentiels des divers ordres

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \ldots;$$

le lieu représenté par l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots$$

n'est, de même, qu'un segment du lieu total représenté par l'équation

$$f(x, y) = 0.$$

La détermination précise de ce segment constitue évidemment une partie essentielle de la théorie de la série de Taylor.

Cette question ne présente pas de grandes difficultés, et j'aurais pu l'aborder depuis longtemps, au moins relativement aux exemples pour lesquels j'avais assigné, en 1861 et 1862, dans le *Journal de Mathématiques*, la condition exacte de convergence; mais ces recherches, ne pouvant alors être utilisées que relativement à quelques exemples isolés, eussent présenté peu d'intérêt.

Aujourd'hui, au contraire, que la condition de convergence de la série peut être déterminée d'une façon précise dans tous les cas, la question qui va nous occuper s'impose d'elle-même, et doit être traitée avec le soin qu'elle mérite.

J'ai dit que cette question est assez facile à résoudre : je ferai toutefois remarquer qu'elle n'était abordable qu'autant, d'abord, qu'on disposât d'un moyen convenable de classification des solutions imaginaires d'une équation à deux variables, ensuite qu'on eût une méthode directe pour déterminer la valeur finale que prendrait la fonction y, assujettie à la continuité, lorsque la variable x serait parvenue de sa valeur initiale à la valeur finale qu'on voulait lui faire prendre, en suivant une loi de progression donnée; car, quant à se servir de la série elle-même pour calculer de proche en proche les valeurs de y, comme l'avait proposé M. Puiseux, ce serait peu réalisable.

Mais j'ai donné, en 1860, dans le *Journal de Mathématiques*, la solution de cette dernière question, et la méthode dont je me suis servi permettra d'assigner, parmi les valeurs de y, fournies par l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

celle qui serait donnée séparément par la série supposée convergente. La question sera seulement plus simple que celle que j'envisageais alors, puisque, la valeur finale de y devant rester la même, quelles que soient les valeurs qu'ait prises x dans l'intervalle, il n'y aura pas à s'en occuper.

J'appelle *région de convergence* la portion du plan recouverte par l'ensemble des points fournis par l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \ldots .$$

Il s'agit de déterminer le périmètre de cette région et la portion de chaque conjuguée qui s'y trouve comprise.

Cette courbe passe par le point critique du lieu considéré où s'arrête la convergence de la série, et tous ses autres points ont pour abscisses les quantités qui, retranchées de la valeur initiale x_0 de x, fournissent des différences de même module que la différence entre x_0 et l'abscisse du point d'arrêt.

Ainsi, si

$$x_1 = a + b\sqrt{-1}, \quad y_1 = a' + b'\sqrt{-1}$$

est celui des points critiques où s'arrête la convergence, et que

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

soient les valeurs initiales de x et de y, le périmètre de la région de convergence sera caractérisé par l'équation

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (a - \alpha_0)^2 + (b - \beta_0)^2,$$

ou

$$(\alpha^2 - a^2) + (\beta^2 - b^2) - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0,$$

α et β désignant les parties réelle et imaginaire variables de x.

La question est donc de suivre de proche en proche la marche de y lorsque $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ varie à partir de $x_1 = a + b\sqrt{-1}$, en suivant le chemin

$$(\alpha^2 - a^2) + (\beta^2 - b^2) - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0.$$

Les points du périmètre qui auront même caractéristique appartiendront à une même conjuguée et formeront les extrémités de l'arc de cette conjuguée compris dans l'intérieur de la région de convergence; de sorte que, si l'on a tracé d'avance ces conjuguées et qu'on relève pour chacune d'elles la portion comprise dans l'intérieur de la région de convergence, on aura le tableau de toutes les valeurs de la fonction y que pourra fournir la série.

Si l'équation $f(x, y) = 0$ est du degré m, elle fournira entre α, β,

α' et β' deux équations de degré m. En y joignant les trois équations

$$\alpha^2 - a^2 + \beta^2 - b^2 - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0,$$
$$x = \alpha + \beta,$$
$$y = \alpha' + \beta',$$

et éliminant α, β, α' et β', on aurait l'équation du périmètre de la région de convergence, qui serait du degré $2m^2$.

Mais la courbe ainsi obtenue comprendrait une foule de branches parasites, puisqu'elle contiendrait les m points du lieu $f(x, y) = 0$ qui correspondraient à une même valeur de x satisfaisant à la condition

$$\alpha^2 - a^2 + \beta^2 - b^2 - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0,$$

tandis que la courbe cherchée n'en devrait comprendre qu'un.

D'ailleurs la méthode qu'on aurait suivie ne pourrait fournir aucune indication propre à permettre d'éliminer les branches parasites du lieu.

On ne recourra donc pas habituellement à cette méthode, qui ne donnerait qu'un résultat brut dont on ne saurait que faire.

Le principal moyen qu'on emploiera pour traiter la question se tirera de cette remarque, que la courbe cherchée ne saurait entamer ni l'une ni l'autre des deux branches de la courbe caractérisée par l'équation générale

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1},$$

qui comprendraient immédiatement celle où se trouve le point origine. Cette remarque fournira le moyen d'éliminer les solutions étrangères que le calcul aura fournies.

Nous commencerons par la construction de la tangente à la courbe en un quelconque de ses points, parce que cette question est la plus simple.

Soient

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

les coordonnées d'un point du périmètre cherché, et

$$m + n\sqrt{-1}$$

la valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$ en ce point; les coordonnées du point infiniment voisin du périmètre seront

$$x + d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$$

et

$$\begin{aligned} y &+ (m + n\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}) \\ &= y + (m\,d\alpha - n\,d\beta) + (n\,d\alpha + m\,d\beta)\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

de sorte que le coefficient angulaire de la tangente cherchée sera

$$\frac{m\,d\alpha - n\,d\beta + n\,d\alpha + m\,d\beta}{d\alpha + d\beta}$$

ou

$$\frac{m + n + (m - n)\frac{d\beta}{d\alpha}}{1 + \frac{d\beta}{d\alpha}}.$$

D'ailleurs $\frac{d\beta}{d\alpha}$ s'obtiendra en différentiant l'équation

$$(\alpha^2 - a^2) + (\beta^2 - b^2) - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0,$$

qui donnera

$$(\alpha - \alpha_0)\,d\alpha + (\beta - \beta_0)\,d\beta = 0,$$

d'où

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}.$$

Par suite, le coefficient angulaire cherché sera

$$\frac{(m + n)(\beta - \beta_0) - (m - n)(\alpha - \alpha_0)}{(\beta - \beta_0) + (\alpha - \alpha_0)}.$$

On déterminera tout aussi aisément le rayon de courbure de la même courbe en un quelconque de ses points.

Soit $p + q\sqrt{-1}$ la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ au point considéré, le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, au point $(x + dx,\ y + dy)$ du périmètre, sera

$$m + n\sqrt{-1} + (p + q\sqrt{-1})\,dx$$

ou

$$m + n\sqrt{-1} + (p + q\sqrt{-1})\left(1 - \frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}\sqrt{-1}\right) d\alpha,$$

c'est-à-dire

$$m + p\,d\alpha + q\frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}d\alpha + \left(n + q\,d\alpha - p\frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}d\alpha\right)\sqrt{-1};$$

le coefficient angulaire de la tangente au périmètre en ce point $(x + dx,\ y + dy)$ sera donc

$$\frac{\left[m + n + (p + q)\,d\alpha - (p - q)\dfrac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}d\alpha\right](\beta + d\beta - \beta_0)}{(\beta + d\beta - \beta_0) + (\alpha + d\alpha - \alpha_0)}$$
$$- \frac{\left[m - n + (p - q)\,d\alpha + (p + q)\dfrac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}d\alpha\right](\alpha + d\alpha - \alpha_0)}{(\beta + d\beta - \beta_0) + (\alpha + d\alpha - \alpha_0)};$$

l'angle de contingence sera, en conséquence,

$$\frac{1}{\beta - \beta_0}\,\frac{(\beta - \beta_0 + \alpha - \alpha_0)\{(p+q)[(\beta-\beta_0)^2 - (\alpha-\alpha_0)^2] - 2(p-q)(\beta-\beta_0)(\alpha-\alpha_0)\} - 2m[(\beta-\beta_0)^2 + (\alpha-\alpha_0)^2]}{(\beta - \beta_0 + \alpha - \alpha_0)^2 + [(m + n)(\beta - \beta_0) - (m - n)(\alpha - \alpha_0)]^2}\,d\alpha$$

quant à l'élément du périmètre, c'est

$$\sqrt{(d\alpha' + d\beta')^2 + (d\alpha + d\beta)^2},$$

ou

$$\sqrt{1 + \left[\frac{(m + n)(\beta - \beta_0) - (m - n)(\alpha - \alpha_0)}{\beta - \beta_0 + \alpha - \alpha_0}\right]^2}\left(1 - \frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}\right) d\alpha,$$

le rayon de courbure sera donc

$$\frac{[(\beta - \beta_0) - (\alpha - \alpha_0)]\{(\beta - \beta_0 + \alpha - \alpha_0)^2 + [(m + n)(\beta - \beta_0) - (m - n)(\alpha - \alpha_0)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{(\beta - \beta_0 + \alpha - \alpha_0)\{(p+q)[(\beta - \beta_0)^2 - (\alpha - \alpha_0)] - 2(p-q)(\beta - \beta_0)(\alpha - \alpha_0)\} - 2m[(\beta - \beta_0)^2 + (\alpha - \alpha_0)^2]}.$$

Voyons maintenant comment on obtiendra des points de la courbe en nombre suffisant pour la construire.

La question se réduit à trouver les points où elle coupe chaque conjuguée. Or soit C la caractéristique d'une conjuguée, de sorte que le long de cette conjuguée $\frac{\beta'}{\beta} = C$; les points cherchés seront fournis par les deux équations comprises dans

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha' + \beta C\sqrt{-1}) = 0,$$

et par la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (a - \alpha_0)^2 + (b - \beta_0)^2;$$

ces trois équations donneront α, β et α', dont on formera les coordonnées des points cherchés; mais elles fourniront beaucoup de solutions étrangères, dont on se débarrassera comme il a été dit plus haut.

Pour ne pas multiplier inutilement les essais, on fera bien de commencer par déterminer les conjuguées tangentes au périmètre de la région de convergence; pour cela, on n'aura qu'à éliminer α et α' entre les équations

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha' + \beta C\sqrt{-1}) = 0,$$
$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (a - \alpha_0)^2 + (b - \beta_0)^2,$$

et à exprimer que l'équation résultante en β a deux racines égales. A la vérité, l'équation propre à déterminer les valeurs extrêmes de C fournira aussi beaucoup de solutions étrangères; mais on s'en débarrassera par les moyens qu'on a déjà indiqués.

Le point important de la question est de fixer la figure du paramètre de la région de convergence aux environs du point d'arrêt.

Nous rappellerons d'abord que les points critiques appartiennent toujours à l'enveloppe totale des conjuguées. Ce sont les points de contact des tangentes à cette enveloppe parallèles à l'axe des y, le mot *tangente* étant pris ici dans son acception la plus générale, c'est-à-dire que ce sont les points situés à l'infini sur les branches de l'enveloppe qui ont leurs asymptotes parallèles à l'axe des y, les limites de ses diverses branches dans le sens des x, ses points de rebroussement, etc., les points multiples où les dérivées de y par rapport à x se séparent, sans devenir infinies, étant seuls exceptés.

L'examen complet de la question comporterait naturellement une infinité de cas, puisqu'il faudrait distinguer ceux où les degrés de multiplicité des points d'arrêt seraient différents, et, pour chaque valeur du degré de multiplicité, passer en revue toutes les hypothèses possibles.

Nous nous bornerons à l'examen des trois cas les plus simples et les plus usuels : celui où le point d'arrêt serait l'extrémité d'une branche de l'enveloppe asymptote à une parallèle à l'axe des y; celui où ce serait le point de contact avec l'enveloppe d'une tangente simple parallèle à l'axe des y; enfin celui où ce serait un point de rebroussement de l'enveloppe où $\frac{d^2y}{dx^2}$ serait infini.

Dans le premier cas, le périmètre de la région de convergence devant contenir le point d'arrêt sera naturellement asymptote à la même parallèle à l'axe des y que la branche de l'enveloppe qui irait passer par ce point.

Dans le second cas, le périmètre de la région de convergence sera tangent à l'enveloppe au point d'arrêt, puisque l'enveloppe est tangente à toutes les courbes continues qui ont un point commun avec elle; mais, au reste, on le vérifierait aisément sur la formule trouvée plus haut du coefficient angulaire de la tangente au périmètre

$$\frac{(m+n)(\beta-\beta_0)-(m-n)(\alpha-\alpha_0)}{(\beta-\beta_0)+(\alpha-\alpha_0)}:$$

en effet, $\frac{dy}{dx}$ étant infini au point d'arrêt, m ou n seront infinis, et par conséquent le coefficient angulaire de la tangente au périmètre sera aussi infini.

Enfin, dans le troisième cas, la formule

$$\frac{[(\beta-\beta_0)-(\alpha-\alpha_0)]\left\{(\beta-\beta_0+\alpha-\alpha_0)^2+[(m+n)(\beta-\beta_0)-(m-n)(\alpha-\alpha_0)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{(\beta-\beta_0+\alpha-\alpha_0)\left\{(p+q)[(\beta-\beta_0)^2+(\alpha-\alpha_0)^2]-2(p-q)(\beta-\beta_0)(\alpha-\alpha_0)\right\}-2m[(\beta-\beta_0)^2+(\alpha-\alpha_0)^2]},$$

trouvée plus haut pour représenter le rayon de courbure du périmètre, donnera évidemment une valeur nulle pour ce rayon de courbure au point d'arrêt, puisque l'une au moins des quantités p et q sera infinie;

par conséquent, lorsque le point d'arrêt sera un point de rebroussement de l'enveloppe du lieu, ce sera aussi un point de rebroussement du périmètre de la région de convergence.

Nous placerons ici une autre remarque qui aidera puissamment à la construction du périmètre de la région de convergence, à partir du point d'arrêt; c'est qu'une courbe quelconque, caractérisée par une équation

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

qui passerait au point d'arrêt, où elle serait naturellement tangente à l'enveloppe, ne saurait, en aucun cas, pénétrer dans la région de convergence que par l'un seulement des deux arcs qui partiraient en sens contraire de ce point d'arrêt. En effet, l'équation

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

étant supposée admettre la solution $\alpha = a$, $\beta = b$, si l'on fait varier α et β à partir de a et de b, en désignant par $d\alpha$ et $d\beta$ les accroissements de α et de β, on aura

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{\varphi'_a(a, b)}{\varphi'_b(a, b)},$$

$d\alpha$ pouvant être positif ou négatif, mais $d\alpha$ et $d\beta$ devant changer en même temps de signes.

D'un autre côté, l'inégalité

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 < (a - \alpha_0)^2 + (b - \beta_0)^2,$$

qui, pour rester satisfaite à partir de $\alpha = a$, $\beta = b$, exigerait que

$$(a - \alpha_0)\, d\alpha + (b - \beta_0)\, d\beta$$

restât négatif, sera bien remplie par l'un des systèmes de valeurs de $d\alpha$ et de $d\beta$, données par l'équation

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\varphi'_a(a, b)}{\varphi'_b(a, b)},$$

mais ne le sera pas par l'autre; par conséquent, la courbe caractérisée par l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ ne pénétrera dans la région de convergence que par l'un de ses deux arcs partant en sens contraire du point d'arrêt.

Cette remarque, appliquée à l'enveloppe et à la conjuguée qui la touche au point d'arrêt, conduit à des résultats importants.

Il en résulte que la série qui, selon les cas, peut représenter les ordonnées d'arcs plus ou moins étendus, à partir du point d'arrêt, de l'enveloppe ou de la conjuguée qui passe en ce point, ne saurait en aucun cas fournir l'ordonnée d'un seul point du prolongement de l'un de ces arcs au delà du point d'arrêt; le point d'arrêt est toujours l'une des extrémités de l'arc de l'enveloppe ou de la conjuguée qui y passe, dont la série puisse fournir les ordonnées, en d'autres termes la série ne peut servir à passer de l'une à l'autre des deux branches de l'enveloppe que sépare le point d'arrêt, ou de la conjuguée qui y passe. On peut le vérifier directement de la manière suivante :

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point d'arrêt, $\frac{dy}{dx}$ y étant infini, $\frac{dx}{dy}$ y sera nul; l'abscisse x du lieu, développée à partir de $x = x_1$, sera donc représentée par

$$x = x_1 + \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_1 \frac{(y - y_1)^2}{1.2} + \ldots,$$

c'est-à-dire qu'à des valeurs de y équidistantes de y_1 il correspondra des valeurs égales de x.

Or si $(p + q\sqrt{-1})$ représente la valeur de $\frac{d^2x}{dy^2}$ en un point

$$(x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1})$$

de l'enveloppe, la condition pour que le point mobile (xy) reste sur cette enveloppe est que la différentielle de $\frac{dx}{dy}$, ou

$$(p + q\sqrt{-1})\, dy,$$

soit réelle, c'est-à-dire que

$$p\, d\beta' + q\, d\alpha' = 0.$$

On obtiendra donc deux points de l'enveloppe, voisins du point $(x_1 y_1)$, dans l'un et dans l'autre sens, en donnant à y les deux valeurs

$$y = y_1 \pm \left(1 - \frac{q}{p}\sqrt{-1}\right) d\alpha',$$

équidistantes de y_1.

Or ces deux ordonnées, équidistantes de y_1, correspondraient à une même abscisse. Si donc la série pouvait fournir les ordonnées des points d'un arc de l'enveloppe s'étendant de part et d'autre du point critique, elle pourrait, pour une même valeur de x, fournir deux valeurs différentes de y, ce qui est impossible.

Le théorème est donc établi en ce qui touche l'enveloppe.

Soit maintenant C la caractéristique du point critique (x_1, y_1), l'abscisse du lieu étant représentée par

$$x = x_1 + (p + q\sqrt{-1})\frac{(y - y_1)^2}{1.2} + \ldots,$$

les différentielles $d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$ et $d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}$ de x et de y à partir du point $x_1 y_1$ seront liées par la relation

$$d\alpha + d\beta\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})\frac{(d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1})^2}{1.2},$$

d'où

$$2\,d\beta = 2p\,d\alpha'\,d\beta' + q(d\alpha'^2 - d\beta'^2);$$

pour que le point mobile reste sur la conjuguée C, il faudra donc que

$$\frac{2\,d\beta'}{2p\,d\alpha'\,d\beta' + q\,(d\alpha'^2 - d\beta'^2)} = \mathrm{C}$$

ou que

$$\frac{2}{\mathrm{C}} = 2p\,d\alpha' + q\left(d\alpha'\frac{d\alpha'}{d\beta'} - d\beta'\right).$$

Cette condition exige que $\frac{d\alpha'}{d\beta'}$ soit infini : α' devra donc varier seul ; par conséquent, en prenant pour y les deux valeurs

$$y = y_1 \pm d\alpha',$$

on obtiendra deux points de la conjuguée passant au point critique, infiniment voisins de ce point et placés de part et d'autre par rapport à lui.

Mais ces deux ordonnées, équidistantes de y_1, correspondraient à une même abscisse. Si donc la série pouvait fournir les ordonnées des points d'un arc de la conjuguée critique s'étendant de part et d'autre du point critique, elle pourrait, pour une même valeur de x, fournir deux valeurs différentes de y, ce qui est impossible.

On peut encore ajouter que, si l'on place le point origine sur l'enveloppe à une distance suffisamment petite de l'un des points critiques, la série ne pourra pas fournir l'ordonnée d'un seul point de la conjuguée passant en ce point critique.

En effet, la région de convergence s'étendant du point (x_0, y_0) au point critique (x_1, y_1) et pouvant fournir tous les points de l'arc de l'enveloppe limité à ces deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1), si l'on conçoit une conjuguée tangente à l'enveloppe en un point (x', y') compris entre (x_0, y_0) et (x_1, y_1), comme la série ne sera pas encore divergente en (x', y'), elle pourra servir à passer sur cette conjuguée et à la parcourir dans un sens et dans l'autre jusqu'aux points (x, y) pour lesquels le module de la différence $x_0 - x$ serait égal à celui de $x_0 - x_1$.

Mais des deux arcs de la conjuguée allant du point (x', y') aux deux points (x, y) qui viennent d'être définis, l'un prolonge directement le chemin déjà parcouru sur l'enveloppe et se rapproche du point critique; et cet arc, le long duquel le module de la différence $x_0 - x$ ne peut qu'augmenter, sera d'autant moindre que le point $x' y'$ sera plus voisin du point (x_1, y_1), de sorte que les deux arcs $(x', y' - x_1, y_1)$, $(x', y' - x, y)$ s'évanouiront en même temps. L'arc de la conjuguée mobile que pourra représenter la série à partir du point où cette conjuguée touchera son enveloppe et dans le sens que nous considérons sera donc d'autant moindre que la conjuguée mobile se rapprochera davantage de la conjuguée critique et se réduira à zéro sur cette conjuguée elle-même.

Cela posé, il est facile de voir que le second arc de la conjuguée mobile que la série pourrait fournir dans le sens contraire s'évanouira en même temps que le premier. En effet, ici le point infiniment voisin du point critique sur le premier arc de la conjuguée mobile, au moment où elle vient se confondre avec la conjuguée qui passe au point critique, n'échappe à la représentation par la série que parce que le module de la différence $x - x_0$ entre son abscisse et celle du point origine surpasse celui de la différence $x_1 - x_0$. Mais cette abscisse est aussi celle d'un point de l'autre arc; la série ne peut donc pas plus fournir l'un que l'autre de ces points.

De même, si l'on place le point origine sur la conjuguée passant en un point critique, à une distance suffisamment petite de ce point critique, la série ne pourra pas fournir l'ordonnée d'un seul point de l'arc de l'enveloppe passant par ce point.

En effet si le point origine (x_0, y_0) était sur l'une des conjuguées voisines de la conjuguée issue du point critique et tangente à l'enveloppe en un point (x', y'), la série pourrait représenter l'arc compris sur cette conjuguée entre le point (x_0, y_0) et le point (x', y'), plus un arc de l'enveloppe s'étendant dans les deux sens à partir du point (x', y'), et qui serait limité dans un sens au point critique x_1, y_1 et dans l'autre en un point (x, y) tel, que le module de la différence $x_0 - x$ fût égal à celui de la différence $x_0 - x_1$. Mais il est facile de voir que ce point (x, y) serait d'autant plus voisin de (x', y') que celui-ci le serait lui-même davantage de (x_1, y_1), et que les deux distances s'évanouiraient en même temps.

En effet l'arc $(x_1, y_1 - x, y)$ devrait changer de sens, sur l'enveloppe, si le point (x_0, y_0), après s'être rapproché de la conjuguée issue du point critique, passait sur une conjuguée placée de l'autre côté par rapport à celle où il se trouvait d'abord; or, avant de changer de sens, cet arc devrait s'évanouir.

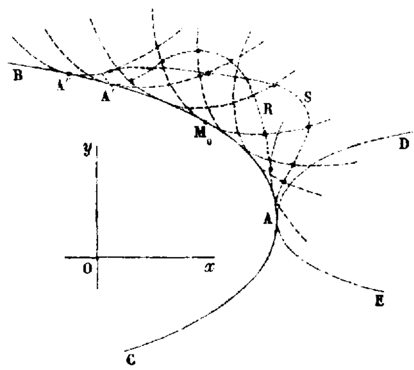
Lors donc que le point origine sera sur la conjuguée issue du point d'arrêt, la série ne pourra représenter l'ordonnée d'aucun point de l'enveloppe.

Il est clair du reste que cette dernière proposition ne fournira d'indications sûres qu'autant que le module de $x_1 - x$ croîtra constamment de zéro à la valeur du module de $x_1 - x_0$, lorsque x passera par les valeurs des abscisses des points intermédiaires de la conjuguée issue du point (x_1, y_1).

Les théorèmes qui précèdent permettent de se rendre compte de la forme que doit affecter dans chaque cas la limite de la région de convergence et de la manière dont cette limite change.

En premier lieu, lorsque le point origine M_0 est situé sur l'enveloppe BAC, la région de convergence coupe chaque conjuguée, qu'elle entame en deux points placés de part et d'autre du point où elle touche l'enveloppe, pourvu que ce point soit assez voisin de M_0. Ces deux points de rencontre tendent à se confondre sur la conjuguée infiniment voisine de la conjuguée DAE qui passe au point critique.

Fig. 1.



Sur la conjuguée qui touche l'enveloppe au point A′ tel que les modules des différences des abscisses des points M_0 et A d'une part, M_0 et A′ de l'autre soient égaux, l'un des arcs s'évanouit, mais l'autre subsiste encore un certain temps.

Si la conjuguée s'éloigne encore un peu, l'arc restant à ses deux extrémités d'un même côté du point de contact, il finit par s'évanouir lorsque la conjuguée devient tangente au périmètre de la région de convergence.

Cette courbe est tangente à l'enveloppe en A et en A′ : en A elle présente un point de rebroussement, elle est dessinée en points ronds, la conjuguée qui y est tangente touche l'enveloppe en A″; les points où le périmètre de la région de convergence coupe toutes les conjuguées sont marqués d'une manière distincte.

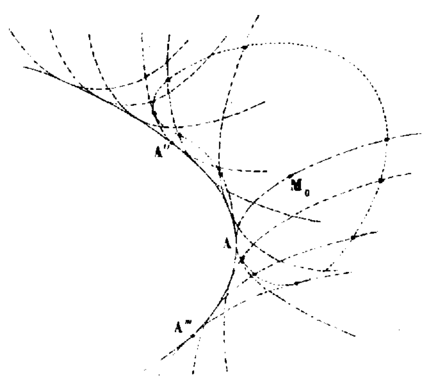
La région de convergence est formée des deux espaces clos séparément limités d'une part à l'arc AA′ de l'enveloppe, et de l'autre aux deux arcs ARA′ et ASA′ de son périmètre.

Si le point origine passait de l'enveloppe sur une conjuguée quelconque, telle que celle qui touche l'enveloppe en M_0 dans la figure précédente, le périmètre de la région de convergence changerait peu du côté de A'; mais cette courbe couperait alors la conjuguée passant en A près de ce point, de sorte qu'un petit arc de cette conjuguée pourrait être fourni par la série. Cet arc, au reste, resterait limité en A et s'étendrait vers D. La série pourrait encore fournir des arcs de plus en plus petits des conjuguées tangentes à l'enveloppe, de A en C, jusqu'à une certaine distance; ces arcs auraient leurs deux extrémités d'un même côté du point de contact avec l'enveloppe. D'ailleurs le rebroussement du périmètre, en A, disparaîtrait.

Si la conjuguée contenant le point origine se rapprochait de la conjuguée issue du point critique, le point de contact de cette conjuguée avec l'enveloppe se rapprochant du point A, l'arc AA' de cette enveloppe, que pourrait fournir la série, diminuerait, et l'arc de la conjuguée passant au point critique, compris dans la région de convergence augmenterait en même temps, tout en restant toujours limité en A. Le point de contact avec la branche AC de l'enveloppe de la dernière conjuguée rencontrée par la limite de la région de convergence reculerait en même temps vers C.

Enfin, si le point origine M_0 venait se placer sur la conjuguée pas-

Fig. 2.



sant au point critique, comme le point mobile xy ne pourrait pas passer sur l'enveloppe, les deux points de rencontre de la limite de la région de convergence avec une conjuguée quelconque appartiendraient toujours à une même des deux branches séparées sur cette conjuguée par le point où elle toucherait l'enveloppe. Cette branche serait celle qui occuperait par rapport au point de contact la même position que le point M_0 par rapport au point A, ou celle qui serait en continuité avec $M_0 A$.

Ces observations générales seront utilement complétées par cette remarque importante, dans la question dont il s'agit, que, si les conjuguées qui avoisinent celle où se trouve le point origine étaient construites avec assez de soin, on pourrait, jusqu'à un certain point, déterminer par tâtonnements les points où chacune d'elles serait coupée par le périmètre de la région de convergence; car la position d'un point d'une conjuguée dont la caractéristique est donnée déterminant les deux parties de l'abscisse de ce point, il n'y aurait, pour savoir si un point d'une conjuguée est ou non compris dans la région de convergence, qu'à déterminer le signe de la différence

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 - (a_1 - \alpha_0)^2 - (b_1 - \beta_0)^2.$$

Lorsque le point origine $x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$, $y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$ se déplace sur le lieu $f(x, y) = 0$, la région de convergence se déforme insensiblement en conservant pendant un certain temps pour limite le même point critique

$$a_n + b_n\sqrt{-1},$$
$$a'_n + b'_n\sqrt{-1};$$

mais, si le déplacement du point origine est assez considérable, la limite de la région de convergence doit finir par tomber en un autre point critique

$$a_p + b_p\sqrt{-1}.$$
$$a'_p + b'_p\sqrt{-1}.$$

Au moment où le point d'arrêt va changer, il y a un instant où le périmètre de la région de convergence passe à la fois par le point $(a_n + b_n\sqrt{-1}, a'_n + b'_n\sqrt{-1})$, dont il va se séparer définitivement, et par le point $(a_p + b_p\sqrt{-1},\ a'_p + b'_p\sqrt{-1})$, sur lequel il va rouler pendant un certain temps.

On peut appeler *courbe d'équilibre*, relativement aux deux points critiques

$$(a_n + b_n\sqrt{-1},\quad a'_n + b'_n\sqrt{-1})$$

et

$$(a_p + b_p\sqrt{-1},\quad a'_p + b'_p\sqrt{-1}),$$

le lieu des points du lieu $f(x, y) = 0$, tels que, s'ils étaient pris pour points origines, la région de convergence correspondante serait limitée à la fois aux deux points

$$(a_n + b_n\sqrt{-1},\quad a'_n + b'_n\sqrt{-1})$$

et

$$(a_p + b_p\sqrt{-1},\quad a'_p + b'_p\sqrt{-1});$$

l'équation caractéristique de cette courbe d'équilibre est

$$(\alpha - a_n)^2 + (\beta - b_n)^2 = (\alpha - a_p)^2 + (\beta - b_p)^2$$

ou

$$2\alpha(a_p - a_n) + 2\beta(b_p - b_n) = a_p^2 - a_n^2 + b_p^2 - b_n^2.$$

Cette équation est du premier degré; elle ne donnera donc qu'une valeur de β pour chaque valeur de α; mais, à chaque valeur de

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

il correspond m valeurs de y, en sorte que chaque courbe d'équilibre paraîtrait devoir se composer de m branches s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$; mais de ces m branches il n'y en aura évidemment qu'une qui répondra à la question, parce que, lorsque le point (x_0, y_0) aura dépassé dans un sens ou dans l'autre la courbe d'équilibre entre les deux points critiques considérés, la région de convergence cessera de passer par le point critique où elle était limitée d'abord, et que la question de sa limite se posera alors entre l'autre de ces deux points critiques et un troisième.

La considération des courbes d'équilibre peut être très-utile pour simplifier des recherches particulières; ces courbes présentent, en tout cas, un grand intérêt; mais il n'y aura lieu d'en faire une étude spéciale qu'à propos de chaque exemple.

Je me bornerai ici à faire remarquer que la courbe d'équilibre relative à deux points critiques imaginaires conjugués est toujours la courbe réelle; car, si $a_p + b_p\sqrt{-1} = a_n - b_n\sqrt{-1}$, l'équation de la courbe d'équilibre se réduit à $\beta = 0$. Or cette équation ne saurait s'appliquer à aucune branche de la conjuguée $C = \infty$; car, relativement à cette branche, elle signifierait que, si la région de convergence relative au point

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

était limitée au point critique

$$a_n + b_n\sqrt{-1}, \quad a'_n + b'_n\sqrt{-1},$$

celle qui se rapporterait au point

$$x_0 = \alpha_0 - \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 - \beta'_0\sqrt{-1}$$

serait limitée au point

$$a_n - b_n\sqrt{-1}, \quad a'_n - b'_n\sqrt{-1}.$$

On sait que les points critiques réels d'un lieu sont les points de contact avec la courbe réelle des tangentes qu'on peut lui mener parallèlement à l'axe des y, et que les points critiques imaginaires sont les points de contact des tangentes qu'on peut mener dans la même direction à l'enveloppe imaginaire des conjuguées, c'est-à-dire au lieu des points du lieu pour lesquels $\frac{dy}{dx}$ est réel, parce qu'une valeur infinie de $\frac{dy}{dx}$ doit être considérée comme réelle, la tangente d'un angle imaginaire $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ ne pouvant devenir infinie que dans l'hypothèse $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ et $\psi = 0$.

Quant aux autres points critiques, où les dérivées de y par rapport à x ne commencent à devenir infinies qu'à partir du second ordre, ou du troisième, etc., ils proviennent toujours de la réunioh accidentelle de divers points critiques simples en un seul, et, par conséquent, n'appartiennent pas moins que les premiers à l'enveloppe.

Or, lorsque les coefficients de l'équation du lieu varient d'une manière continue tout en restant réels, la courbe réelle et l'enveloppe imaginaire de ses conjuguées se déforment d'une manière continue. Il résulte de ces deux observations que, les coefficients de l'équation venant à varier d'une manière continue, les points critiques se déplaceront aussi d'une manière continue sur le plan, et que, par conséquent, si l'abscisse $x_0 = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1}$ du point origine reste fixe, son ordonnée $y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0 \sqrt{-1}$ restant, bien entendu, assujettie à satisfaire, concurremment avec x_0, à l'équation variable du lieu, ou encore si x_0 et y_0 varient ensemble d'une manière continue en même temps que les coefficients de l'équation du lieu, la région de convergence se déformera elle-même d'une manière continue.

Mais si, partant d'une équation à coefficients réels, représentant une courbe réelle, dont les conjuguées pourront avoir une seconde enveloppe imaginaire, on donne à ces coefficients, assujettis à la condition de continuité, des accroissements imaginaires, d'abord infiniment petits, l'enveloppe totale, alors complétement imaginaire, des conjuguées du nouveau lieu différera d'abord infiniment peu, comme position et comme forme, de l'enveloppe, en partie réelle, en partie imaginaire, de l'ancien lieu, et elle se déformera ensuite d'une manière continue.

En effet, lorsque les coefficients d'une équation varient d'une manière continue, les valeurs de la fonction y, qui correspondent à une valeur fixe de la variable x, varient aussi d'une manière continue, ainsi que les valeurs de la dérivée de cette fonction.

Par conséquent, si l'on donnait à x, dans la nouvelle équation, les mêmes valeurs réelles auxquelles correspondaient précédemment des valeurs réelles de y et de $\frac{dy}{dx}$, on en tirerait, pour la fonction et pour sa dérivée, des valeurs imaginaires, il est vrai, mais où les parties imaginaires seraient d'abord infiniment petites. Les points correspondants seraient donc à la fois infiniment voisins de l'ancienne courbe réelle et de la nouvelle enveloppe.

Cette observation montre que, dans le cas encore où les coefficients de l'équation d'une courbe passeraient d'une manière continue de l'état réel à l'état imaginaire, la région de convergence se déformerait toujours d'une manière continue.

Il y a toutefois à cette règle générale une exception d'un genre particulier qu'il importe de signaler : si les coefficients de l'équation varient de façon que le lieu acquière un point multiple où les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ soient différentes, les points critiques qui viennent se confondre en ce point multiple disparaissent alors comme points critiques, de sorte que si, en raison de la position du point origine, la région de convergence était auparavant limitée à l'un d'eux, son périmètre doit alors changer brusquement.

Applications.

Considérons d'abord l'équation

$$xy = \frac{c^2}{4}.$$

Le lieu comporte deux points critiques situés à l'infini sur l'axe des y, dans les deux sens, mais qui correspondent à une même abscisse $x = 0$, de sorte que la courbe d'équilibre relative au système de ces deux points n'existe pas, en ce sens qu'elle est indéterminée et que la région de convergence, par suite, sera limitée à la fois aux deux points critiques, quel que soit le point qu'on choisisse pour point origine. Le même fait se présentera évidemment toutes les fois que la courbe représentée par l'équation proposée aura deux branches asymptotes en sens contraires à une même parallèle à l'axe des y, et généralement lorsque deux points critiques situés ou non à distance finie auront même abscisse.

La relation entre x et y n'attribuant qu'une seule valeur à y pour chaque valeur de x, la question de la construction du périmètre de la région de convergence sera ici aussi simple que possible.

Soient

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$$

et

$$y_0 = \frac{c^2}{4(\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1})}$$

les coordonnées du point origine, le périmètre de la région de convergence sera caractérisé par l'équation

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (\alpha_0 - 0)^2 + (\beta_0 - 0)^2$$

ou

$$\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha + \beta^2 - 2\beta_0\beta = 0,$$

à laquelle il faudra joindre

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \frac{c^2}{4(\alpha + \beta\sqrt{-1})} = \frac{c^2}{4}\,\frac{\alpha - \beta\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

d'où

$$\alpha' = \frac{c^2}{4}\,\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{et} \quad \beta' = -\frac{c^2}{4}\,\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Si l'on veut en coordonnées réelles l'équation du périmètre de la région de convergence, il faudra éliminer α et β entre les équations

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2(\alpha_0\alpha + \beta_0\beta),$$
$$x = \alpha + \beta \quad \text{et} \quad y = \frac{c^2}{4}\,\frac{\alpha - \beta}{\alpha^2 + \beta^2};$$

l'élimination donne

$$[(8\beta_0 y + c^2)^2 + (8\alpha_0 y - c^2)^2]x^2 + 4c^2(\alpha_0 + \beta_0)[4(\alpha_0 - \beta_0)y - c^2]x = 0,$$

ou, en supprimant la solution $x = 0$, sur laquelle nous reviendrons plus tard,

$$x = -\frac{2c^2(\alpha_0 + \beta_0)[4(\alpha_0 - \beta_0)y - c^2]}{32y^2(\alpha_0^2 + \beta_0^2) + 8c^2y(\beta_0 - \alpha_0) + c^4}.$$

La courbe représentée par cette équation est asymptote à l'axe des y, comme on devait le prévoir. Si l'on égale le dénominateur de x à zéro, on trouve

$$y = c^2 \frac{\alpha_0 - \beta_0 \pm (\alpha_0 + \beta_0)\sqrt{-1}}{8(\alpha_0^2 + \beta_0^2)};$$

par conséquent, l'abscisse de la courbe reste toujours finie, comme on devait s'y attendre.

Supposons β_0 nul, l'équation de la courbe deviendra

$$x = \frac{-8c^2\alpha_0^2 y + 2c^4\alpha_0}{32\alpha_0^2 y^2 - 8c^2\alpha_0 y + c^4}.$$

Le dénominateur de x étant toujours positif, x sera positif ou négatif, suivant que y sera plus petit ou plus grand que

$$\frac{1}{4}\frac{c^2}{\alpha_0}.$$

Si l'on fait $x = 2\alpha_0$, on trouve, pour déterminer y, l'équation

$$32\alpha_0^2 y^2 - 4c^2\alpha_0 y = 0,$$

d'où

$$y = \frac{c^2}{8\alpha_0},$$

qui correspond au point de contact de l'hyperbole avec le périmètre de la région de convergence, et

$$y = 0,$$

qui signifie

$$\alpha' = -\beta',$$

d'où

$$\alpha = \beta,$$

et, par suite,

$$\alpha = \alpha_0.$$

Le point de rencontre du périmètre de la région de convergence avec l'axe des x est donc le point du lieu $xy = \frac{c^2}{4}$ dont les coordonnées sont

$$x = \alpha_0(1 + \sqrt{-1}),$$
$$y = \frac{c^2}{4\alpha_0}\frac{1 - \sqrt{-1}}{2};$$

il appartient à la conjuguée dont la caractéristique est

$$-\frac{c^2}{8\alpha_0^2}.$$

L'équation du périmètre, résolue par rapport à y, donne

$$y = \frac{c^2(x - \alpha_0) \pm c^2\sqrt{-x^2 + 2\alpha_0 x + \alpha_0^2}}{8\alpha_0 x};$$

les racines de l'équation

$$x^2 - 2\alpha_0 x - \alpha_0^2 = 0$$

sont

$$x = \alpha_0 \pm \alpha_0\sqrt{2};$$

par conséquent, x ne peut varier qu'entre

$$-\alpha_0(\sqrt{2} - 1) \quad \text{et} \quad +\alpha_0(\sqrt{2} + 1);$$

les valeurs correspondantes de y sont

$$\frac{c^2}{8\alpha_0}(2 + \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad \frac{c^2}{8\alpha_0}(2 - \sqrt{2}).$$

Supposons, pour prendre un exemple, $\alpha_0 = \frac{c}{2} = \frac{\mathrm{OC}}{2}$: le point origine sera en A ; l'ordonnée du point de rencontre de la courbe avec l'axe des y sera

$$\frac{1}{4}\frac{c^2}{\alpha_0} = \frac{c}{2};$$

ce point de rencontre sera en D ; la courbe passera aux points E et B, qui correspondent à $x = 2\alpha_0 = c$.

Les limites de x seront

$$-\frac{c}{2}(\sqrt{2}-1) \quad \text{et} \quad +\frac{c}{2}(\sqrt{2}+1),$$

ou

$$\mathrm{OA}' \pm \mathrm{OA},$$

c'est-à-dire

$$-\mathrm{OG} \quad \text{et} \quad +\mathrm{OH};$$

les valeurs correspondantes de y seront

$$\frac{c}{4}(2+\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad \frac{c}{4}(2-\sqrt{2}),$$

ou

$$\frac{c}{2} \pm \frac{c}{2\sqrt{2}},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{OA}' \pm \tfrac{1}{2}\mathrm{OA},$$

ce qui donnera les points J et I.

La courbe aura la forme

SJDEIBT.

Cette courbe est tout entière comprise entre l'hyperbole $xy = \frac{c^2}{4}$ et sa supplémentaire $xy = -\frac{c^2}{4}$. En effet, si l'on cherche les solutions communes à son équation

$$32\alpha_0^2 xy^2 - 8c^2\alpha_0(x-\alpha_0)y + c^4(x-2\alpha_0) = 0,$$

et à l'équation

$$xy = -\frac{c^2}{4},$$

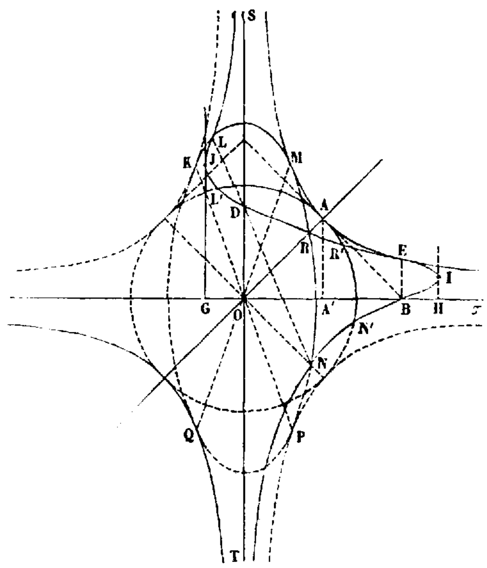
on trouve, en remplaçant partout xy par $-\frac{c^2}{4}$,

$$-8\alpha_0^2c^2y + 2c^4\alpha_0 + 8c^2\alpha_0^2y + c^4x - 2c^4\alpha_0 = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0.$$

Le périmètre de la région de convergence étant obtenu, il reste à fixer le sens dans lequel cette courbe forme limite, ou à déterminer la région de convergence elle-même.

Pour cela, considérons une conjuguée de l'hyperbole donnée KLMRNPQ, qui touche la courbe réelle en M et Q, et l'enveloppe imaginaire des conjuguées en K et P, le point M étant d'ailleurs entre E et S.

FIG. 3.



Le tracé de cette courbe rencontre celui du périmètre de la région de convergence en L, R et N, et il s'agit de savoir quelles sont les limites de l'arc de cette conjuguée qui se trouve dans la région de convergence; car il ne suffit pas que les tracés de deux courbes imaginaires se coupent en un point pour que les coordonnées de ce point forment une solution commune aux équations des deux courbes, les valeurs réalisées de ces coordonnées pouvant très-bien se séparer différemment, sur les deux courbes, en parties réelles et imaginaires.

Or l'ordonnée du point M peut certainement être fournie par la série; par conséquent, l'arc LR au moins est tout entier dans la région de convergence.

Mais la rencontre R n'est qu'apparente; les coordonnées analytiques du point R de la conjuguée et du point R du périmètre de la région de convergence sont effectivement différentes; car les équations

$$(\alpha' + \beta C\sqrt{-1})(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{c^2}{4},$$

et

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta^2 = \alpha_0^2,$$

où C désigne la caractéristique d'une conjuguée, n'admettent que deux solutions. En effet, la première se décompose en

$$\alpha\alpha' - \beta^2 C = \frac{c^2}{4}, \quad \text{et} \quad \alpha C + \alpha' = 0,$$

et la seconde se réduit à

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha_0\alpha = 0;$$

en éliminant α' entre les deux premières, il vient

$$-C(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{c^2}{4},$$

et, par suite,

$$\alpha = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha_0} = -\frac{c^2}{8C\alpha_0};$$

ce qui conduit pour β à deux valeurs égales et de signes contraires

$$\pm\sqrt{-\frac{c^2}{4C} - \frac{c^4}{64C^2\alpha_0^2}}, \quad \text{ou} \quad \pm\frac{c}{8C\alpha_0}\sqrt{16C\alpha_0^2 - c^2}.$$

Chaque conjuguée n'a donc sur le périmètre de la région de convergence que deux points d'ailleurs imaginaires conjugués, comme il était facile de le prévoir, le point origine étant réel.

Pour la conjuguée KLMNPQ, ces deux points sont L et N, situés sur une même parallèle au diamètre KP de contact avec l'enveloppe imaginaire des conjuguées.

L'arc de la conjuguée en question qui se trouve dans la région de convergence est donc LMN.

La rencontre R ne se présente sur la figure que parce que la partie SJDEAS de la région de convergence est, si l'on peut s'exprimer ainsi, redoublée, ou que les points qui y sont renfermés peuvent être donnés de deux manières différentes par l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \ldots,$$

comme si une partie de la portion du plan qui forme la région de convergence avait été repliée sur elle-même et que la conjuguée dût être tracée sur la portion du plan non repliée ; de sorte que sa rencontre avec la partie repliée du périmètre de la région de convergence ne serait qu'un effet de perspective.

Nous avons trouvé plus haut, pour les abscisses des points de rencontre de la conjuguée C avec le périmètre de la région de convergence,

$$-\frac{c^2}{8C\alpha_0} \pm \frac{c}{8C\alpha_0}\sqrt{-16C\alpha_0^2 - c^2};$$

pour qu'il y ait rencontre effective, il faut que

$$-16C\alpha_0^2 - c^2 > 0,$$

ou que

$$C < -\frac{c^2}{16\alpha_0^2}.$$

Or le dernier point de l'hyperbole réelle dont la série puisse donner l'ordonnée (c'est ici le point E) a pour abscisse $2\alpha_0$; le coefficient angulaire de la tangente en ce point, ou la caractéristique de la conjuguée qui y passe, est

$$-\frac{\frac{c^2}{8\alpha_0}}{2\alpha_0}, \quad \text{ou} \quad -\frac{c^2}{16\alpha_0^2};$$

les conjuguées qui ont des points dans l'intérieur de la région de convergence sont donc exclusivement celles qui touchent l'hyperbole réelle entre E et S.

Lorsque la caractéristique d'une conjuguée se rapproche de l'infini, cette conjuguée tend à s'aplatir suivant l'axe des y, et la branche de droite de cette conjuguée se trouve tout entière dans la région de convergence.

En résumé, la région de convergence se compose de la portion SJDEAS du plan doublée et de la portion DEIBTD simple.

On voit maintenant pourquoi on a trouvé la solution, en apparence étrangère, $x = 0$.

Considérons maintenant l'équation

$$a^2 y^2 + b^2 a^2 = a^2 b^2;$$

les points critiques sont

$$(x = +a,\ y = 0), \quad \text{et} \quad (x = -a,\ y = 0);$$

la courbe d'équilibre entre ces deux points est caractérisée par l'équation

$$(\alpha - a)^2 + \beta^2 = (\alpha + a)^2 + \beta^2,$$

qui se réduit à $\alpha = 0$; cette courbe est donc la conjuguée à ordonnées réelles de l'ellipse proposée, ou l'hyperbole SBS'TB'T'. Le point d'arrêt sera par conséquent en A ou en A', selon que la branche de conjuguée où se trouvera le point origine touchera l'ellipse en un point de l'arc BAB' ou en un point de l'arc BA'B'.

L'équation du périmètre de la région de convergence, en supposant, par exemple, que le point d'arrêt fût le point A, résulterait de l'élimination de α, β, α', β' entre les équations

$$a^2(\alpha'^2 - \beta'^2) + b^2(\alpha^2 - \beta^2) - a^2 b^2 = 0,$$
$$a^2\alpha'\beta' + b^2\alpha\beta = 0,$$
$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2,$$
$$\alpha + \beta = x \quad \text{et} \quad \alpha' + \beta' = y;$$

elle serait donc du huitième degré. Mais, comme le point origine n'est plus ici déterminé par son abscisse seulement, l'équation trouvée fournirait à la fois les périmètres des régions de convergence relatives aux deux origines

$$x = x_0 \quad \text{et} \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}.$$

Il vaudra donc mieux construire la courbe cherchée sans recourir à son équation.

Supposons le point origine situé sur la conjuguée à abscisses réelles en un point Ω, de sorte que β_0 sera nul et que α_0 sera égal à $O\omega$.

La série pourra donner les ordonnées de tous les points des deux arcs ΩA et ΩC, en supposant $\omega c = \omega a$; mais elle ne pourra donner l'ordonnée d'aucun point de la courbe réelle; par conséquent le point xy restera toujours sur la branche supérieure de la demi-conjuguée à laquelle il appartiendra et β' restera toujours positif. Quant à β, qui est nul au point origine, il sera positif si le point xy appartient à une conjuguée tangente à l'ellipse en un point de la demi-ellipse inférieure, et négatif dans le cas contraire.

Déterminons d'abord les conjuguées que viendra seulement toucher le périmètre de la région de convergence et au delà desquelles, par conséquent, il ne faudra plus chercher de points de la courbe.

Les points de rencontre du périmètre avec la conjuguée C du lieu sont fournis par les équations

$$a^2\alpha'^2 + b^2\alpha^2 - (a^2C^2 + b^2)\beta^2 = a^2b^2,$$
$$a^2C\alpha' + b^2\alpha = 0,$$

et

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta^2 = (a - \alpha_0)^2;$$

en éliminant α' entre les deux premières, on trouve

$$\left(\frac{b^4}{a^2C^2} + b^2\right)\alpha^2 - (a^2C^2 + b^2)\beta^2 = a^2b^2;$$

en éliminant β^2 entre celle-ci et la troisième il vient, réductions faites,

$$(b^2 + a^2c^2)^2\alpha^2 - 2a^2c^2\alpha_0(a^2c^2 + b^2)\alpha - a^6c^4$$
$$+ 2a^5c^4\alpha_0 + 2a^3b^2c^2\alpha_0 - 2a^4b^2c^2 = 0;$$

pour que cette équation ait ses deux racines égales, il faut que

$$a(\alpha_0 - a)c^2 = 2b^2,$$

d'où

$$C = \pm \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{a(\alpha_0 - a)}}.$$

Mais la solution doit se rapporter aussi bien à l'un qu'à l'autre des deux points

$$x_0 = \alpha_0, \quad y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha_0^2},$$

et

$$x_0 = \alpha_0, \quad y_0 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha_0^2}.$$

On aurait donc dû trouver pour C quatre valeurs deux à deux égales et de signes contraires.

Cependant la solution $C = 0$, qui a été supprimée, n'était pas admissible, car en faisant $C = 0$ dans les équations primitives du problème elles deviennent

$$a^2\alpha'^2 + b^2\alpha^2 - b^2\beta^2 = a^2b^2,$$
$$b^2\alpha = 0$$

et

$$\beta^2 = a^2 - 2a\alpha_0,$$

qui donnent

$$\alpha = 0, \quad \beta = \pm\sqrt{a^2 - 2a\alpha_0},$$
$$\alpha' = \sqrt{\frac{2a^2b^2 - 2ab\alpha_0^2}{a^2}}, \quad \beta' = 0,$$

et, comme α_0 est plus grand que a, β et α' seraient imaginaires.

Il résulte de là que les deux valeurs de C trouvées plus haut sont bien les caractéristiques des conjuguées limites de celles que rencontre le périmètre de la région de convergence; du reste ces deux conjuguées limites ayant leurs caractéristiques égales et de signes contraires, cela explique comment elles conviennent aussi bien à l'un qu'à l'autre des deux points

$$x_0 = \alpha_0, \quad y_0 = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2},$$

pris pour origines; seulement les points de contact de chaque conjuguée limite avec les périmètres des deux régions de convergence se trouvent sur les deux branches dans lesquelles cette conjuguée est séparée par son diamètre transverse.

Il n'y aura lieu de faire varier C qu'en dehors des deux valeurs qui viennent d'être obtenues, puisque la valeur initiale de la caractéristique est $\pm\infty$.

Déterminons maintenant les points de contact du périmètre de la région de convergence avec les deux conjuguées limites dont on vient de trouver les caractéristiques.

L'équation en α

$$\begin{aligned}(b^2+a^2c^2)^2\alpha^2 - 2a^2c^2\alpha_0(a^2c^2+b^2)\alpha - a^6c^4 \\ + 2a^5c^4\alpha_0 + 2a^3b^2c^2a^0 - 2a^4b^2c^2 = 0,\end{aligned}$$

ayant ses deux racines égales, lorsqu'on donne à C l'une des valeurs trouvées, l'une d'elles est donnée par la formule

$$\frac{a^2c^2\alpha^0}{a^2c^2+b^2}.$$

Cette valeur de α convient à la fois aux points de contact avec les deux conjuguées limites, puisque α ne dépend que de c^2.

α' sera fourni par l'équation

$$a^2C\alpha' + b^2\alpha = 0.$$

Enfin β le sera par

$$(\alpha-\alpha_0)^2+\beta^2 = (a-\alpha_0)^2,$$

d'où

$$\beta^2 = 2\alpha_0(\alpha-a) - \alpha^2 + a^2.$$

D'ailleurs, nous savons que β' doit toujours rester positif; par conséquent, la valeur positive de β correspondra à la valeur positive de C, et la valeur négative de β à la valeur négative de C.

Si l'on voulait maintenant construire d'autres points de la courbe, rien ne serait plus aisé.

Les équations

$$\begin{aligned}(b^2+a^2c^2)^2\alpha^2 - 2a^2c^2\alpha_0(a^2c^2+b^2)\alpha - a^6c^4 \\ + 2a^5c^4\alpha_0 + 2a^3b^2c^2\alpha_0 - 2a^4b^2c^2 = 0,\end{aligned}$$

$$a^2C\alpha' + b^2\alpha = 0,$$

$$\beta^2 = 2\alpha_0(\alpha-a) - \alpha^2 + a^2 \quad \text{et} \quad \beta' = C\beta$$

donneraient successivement pour chaque valeur de C les valeurs de α, α', β et β'. β' devant toujours rester positif, β devrait être de même signe que C.

La tangente en A au périmètre de la région de convergence sera évidemment la tangente à l'ellipse, car, les points infiniment voisins de A appartenant à des conjuguées tangentes à l'ellipse en des points infiniment voisins de A, et ces points devant être, sur ces conjuguées, à des distances infiniment petites de leurs points de contact avec l'ellipse, les droites qui les joindront au point A seront infiniment peu inclinées sur la tangente en A à l'ellipse.

Il importe, pour construire la courbe, de savoir si elle présente un point de rebroussement en A, auquel cas elle aurait tous ses points au-dessus de l'axe des x; cherchons donc si elle peut couper l'une des x ailleurs qu'en A.

Si l'on fait $\alpha' = -\beta'$ dans les équations du problème, il vient

$$\alpha^2 - \beta^2 = a^2,$$
$$b^2\alpha\beta = a^2\alpha'^2$$

et

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta^2 = (a - \alpha_0)^2.$$

En ajoutant la première et la troisième, on trouve

$$2\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha - 2a^2 + 2a\alpha_0 = 0,$$

d'où

$$\alpha = \frac{\alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 - 4a\alpha_0 + 4a^2}}{2} = \frac{\alpha_0 \pm (\alpha_0 - 2a)}{2},$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \alpha_0 - a \quad \text{et} \quad \alpha = a.$$

$\alpha = a$ donne $\beta = 0$ et correspond au point A. Considérons dans la solution

$$\alpha = \alpha_0 - a,$$

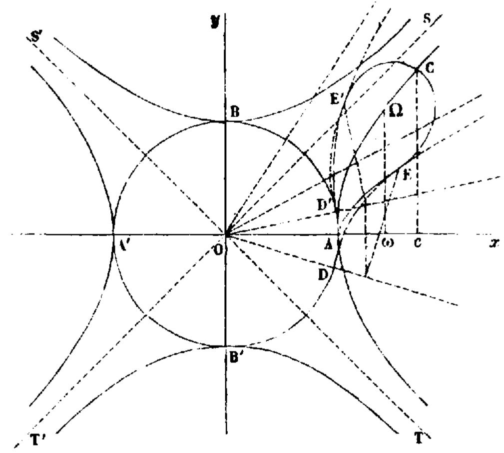
elle donne

$$\beta = \pm\sqrt{\alpha_0(\alpha_0 - 2a)},$$

qui n'est admissible que dès que α_0 dépasse $2a$.

La figure a été faite en supposant $b = a$ et $\alpha_0 = \frac{3}{2}a$. Dans ces hypothèses, les valeurs extrêmes de C sont ± 2, auxquelles correspondent les conjuguées tangentes en D et en D', et la valeur commune des parties

Fig. 4.



réelles des abscisses des points de contact avec le périmètre de la région de convergence sont $\pm \frac{6}{5}$, ce qui fournit les points E et E'.

Le périmètre de la région de convergence est

$$AE'CEA.$$

Les deux exemples que nous venons de discuter sont les plus simples qu'on pût trouver, et il est clair que, pour peu que l'équation du lieu considéré se compliquât un peu, la discussion du problème que nous avions en vue présenterait des difficultés de détail bientôt inabordables, à cause de la longueur des calculs qu'exigerait la résolution des équations; mais la méthode resterait évidemment la même; or, nous n'avions d'autre but que de montrer que cette méthode peut bien réellement fournir la réponse à la question posée.