# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



P. TCHEBICHEF


**Sur les valeurs limites des intégrales**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 19 (1874), p. 157-160.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19__157_0>

# SUR LES VALEURS LIMITES DES INTÉGRALES;

PAR M. P. TCHEBICHEF.

(Lu au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, à Lyon.)

Dans un Mémoire très-intéressant, sous plus d'un rapport, que M. Bienaymé a lu à l'Académie des Sciences, en 1833, et que l'on trouve imprimé dans les *Comptes rendus*, et reproduit dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville (2e série, t. XII, 1867), sous le titre : *Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés*, l'illustre savant donne une méthode qui mérite une attention toute particulière. Cette méthode consiste dans la détermination de la valeur limite de l'intégrale

$$\int_0^a f(x)\,dx,$$

d'après les valeurs des intégrales

$$\int_0^A f(x)\,dx,\quad \int_0^A xf(x)\,dx,\quad \int_0^A x^2 f(x)\,dx,$$

où $A > a$ et $f(x)$ une fonction inconnue, assujettie seulement à la condition de garder le signe $+$ entre les limites d'intégration. La démonstration simple et rigoureuse de la loi de Bernoulli, que l'on trouve dans ma Note, sous le titre : *Des valeurs moyennes* [*], n'est qu'un des résultats que l'on tire aisément de la méthode de M. Bienaymé, et d'après laquelle il est parvenu lui-même à démontrer une proposition sur les probabilités, d'où la loi de Bernoulli découle directement.

En cherchant à tirer tout le parti possible sur les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

des valeurs des intégrales

$$\int_A^B f(x)dx,\quad \int_A^B xf(x)dx,\quad \int_A^B x^2 f(x)dx,\quad \int_A^B x^m f(x)\,dx,$$

où l'on a

$$A < a,\quad B > b,$$

et où $f(x)$ reste positive, je suis parvenu à reconnaître que ces recherches conduisent à des théorèmes d'un nouveau genre, concernant le développement de l'expression

$$\int_A^B \frac{f(x)}{z-x}\,dx$$

en fraction continue, qui joue un si grand rôle dans la théorie des séries. Voici, par exemple, un de ces théorèmes :

*Si* $\frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}$ *est une des fractions convergentes de* $\int_A^B \frac{f(x)}{z-x}\,dx$, *que l'on trouve en développant cette expression en fraction continue*

$$\cfrac{1}{\alpha z + \beta + \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2} + \cdots}},$$

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, de M. Liouville, 2^e série, t. II.

*et que*

$$z_1,\ z_2, \ldots,\ z_l,\ z_{l+1}, \ldots,\ z_{n-1},\ z_n, \ldots,\ z_m$$

*soient les racines de l'équation*

$$\psi(z) = 0,$$

*rangées suivant leur grandeur : toutes les fois que la fonction $f(x)$ reste positive entre les limites $z = A$, $z = B$, la valeur de l'intégrale*

$$\int_{z_l}^{z_n} f(x)\,dx$$

*surpasse la somme*

$$\frac{\varphi(z_{l+1})}{\psi'(z_{l+1})} + \frac{\varphi(z_{l+2})}{\psi'(z_{l+2})} + \ldots + \frac{\varphi(z_{n-2})}{\psi'(z_{n-2})} + \frac{\varphi(z_{n-1})}{\psi'(z_{n-1})}$$

*et reste au-dessous de celle-ci :*

$$\frac{\varphi(z_l)}{\psi'(z_l)} + \frac{\varphi(z_{l+1})}{\psi'(z_{l+1})} + \ldots + \frac{\varphi(z_{n-1})}{\psi'(z_{n-1})} + \frac{\varphi(z_n)}{\psi'(z_n)}.$$

Comme exemple des problèmes qu'on parvient à résoudre par cette méthode, je citerai celui-ci :

Étant donnés la longueur, le poids, le lieu du centre de gravité et le moment d'inertie d'une droite matérielle de densité inconnue et variable d'un point à l'autre, trouver les limites les plus proches du poids d'un tronçon de cette droite.

En supposant qu'il s'agisse d'évaluer le poids d'un tronçon de la ligne compté d'un de ses bouts, dont la distance du centre de gravité est égale à $d$, et en désignant par $l$, $p$ la longueur et le poids de la ligne entière, par $k$ son moment d'inertie autour de l'axe passant par son centre de gravité et perpendiculaire à elle, par $x$, $z$ la longueur et le poids du tronçon en question, on parvient à cette solution :

*Tant que $x$ est au-dessous de $d - \frac{k}{(l-d)p}$, le poids $z$ reste compris* *entre zéro et* $\frac{kp}{(d-x)^2p+k}$; *dans le cas où* $x$ *surpasse* $d+\frac{k}{dp}$, *ce poids reste entre les limites* $p$ *et* $\frac{(d-x)^2p}{(d-x)^2p+k}$; *enfin, si* $x$ *reste compris entre* $d-\frac{k}{(l-d)p}$ *et* $d+\frac{k}{(l-d)p}$, *la valeur de ce poids est comprise entre les quantités* $\frac{(x-d)(l-d)p+k}{lx}$, $\frac{(l+d-x)(l-d)p-k}{l(l-x)}$.