

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CHARLES BRISSE

Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 19 (1874), p. 221-264.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19_221_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur le déplacement fini quelconque d'une figure
de forme invariable;*

PAR M. CHARLES BRISSE,

Répétiteur à l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

J'ai démontré, dans un premier Mémoire inséré en 1870 dans ce même Recueil [*], les théorèmes que M. Chasles avait fait connaître en 1843 sur le mouvement infiniment petit d'un solide libre dans l'espace [**]. Je me propose, dans ce second Mémoire, d'établir les théorèmes publiés en 1861 par le même auteur, et relatifs au déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable [***].

Î. — PROPRIÉTÉS RELATIVES AU DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE
DANS SON PLAN [****].

1. « Ces propriétés se rapportent essentiellement au système de deux figures égales, placées d'une manière quelconque dans leur plan.

» On suppose que les deux figures sont superposables par voie de glissement de l'une sur leur plan commun, et conséquemment qu'elles ne peuvent pas être placées symétriquement.

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2^e série, t. XV : Mémoire sur le déplacement des figures.

[**] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XVI : Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace.

[***] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LI et LII : Propriétés relatives au déplacement fini quelconque dans l'espace d'une figure de forme invariable.

[****] Tous les passages guillemetés sont empruntés à M. Chasles.

» Cela étant convenu : *Quelle que soit la position respective des deux figures, il existe toujours un point qui, étant considéré comme appartenant à la première figure, est lui-même son homologue dans la seconde ; de sorte qu'il suffit de faire tourner la seconde figure autour de ce point pour la faire coïncider dans toutes ses parties avec la première* [*].

» Nous appellerons indifféremment point central, ou centre de rotation, ce point dans lequel coïncident deux points homologues des deux figures, et autour duquel on peut faire tourner une des figures pour la faire coïncider avec l'autre. »

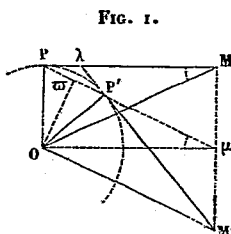
Ce théorème a été démontré dans notre premier Mémoire.

2. « *Que l'on considère dans les deux figures deux droites homologues L, L' et les droites AA', BB', \dots , qui joignent deux à deux leurs points homologues, droites que nous appellerons des cordes :*

» *Les milieux de ces cordes sont sur une droite Λ , qui fait des angles égaux avec les deux droites L, L' .*

» Nous nommerons cette droite Λ la droite milieu relative aux deux droites L, L' . »

Soient P et P' (*fig. 1*) les pieds des perpendiculaires abaissées du point central O sur deux droites homologues L et L' . La droite L est



venue dans sa nouvelle position en restant tangente au cercle OP : donc P' est la position correspondante de P . Soient M et M' les posi-

[*] « Quand le déplacement de la figure est infiniment petit, on en conclut que les normales aux trajectoires des différents points d'une figure en mouvement passent toutes à un instant du mouvement par un même point. Et de là résulte une méthode fort simple de déterminer les normales ou les tangentes des courbes décrites dans le mouvement d'une figure de forme invariable. »

tions correspondantes d'un point quelconque. Abaissons les perpendiculaires $O\varpi$ et $O\mu$ sur PP' et MM' ; elles tomberont en leurs milieux. Les deux triangles OPP' , OMM' sont semblables : donc

$$\frac{O\varpi}{OP} = \frac{O\mu}{OM};$$

mais $O\varpi$ et $O\mu$ font avec OP et OM des angles égaux dans le même sens : donc

$$\text{angle } \varpi O \mu = \text{angle } POM,$$

donc les deux triangles $\varpi O \mu$, POM sont semblables, donc l'angle en ϖ est droit, donc PP' passe par μ . C. Q. F. D.

Les angles $\mu P' M'$, $\mu P M$ sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires à ceux des angles égaux $PO\varpi$, $P'O\varpi$.

3. « *La droite milieu relative à deux droites homologues passe par les pieds des perpendiculaires abaissées du point central sur ces droites.* »

C'est ce qui résulte de la démonstration précédente.

4. « *La perpendiculaire menée du point central sur la droite milieu de deux droites homologues L, L' passe par le point de concours de ces deux droites.* »

$O\varpi$ est, dans la *fig. 1*, cette perpendiculaire, et elle passe bien par le point de rencontre de PM et de $P'M'$, puisque le triangle $\lambda PP'$ est isocèle.

5. « *Les cordes AA', BB', \dots , qui joignent deux à deux les points correspondants des deux droites L, L' , étant projetées orthogonalement sur la droite milieu Λ , ont leurs projections égales entre elles.*

Les triangles semblables déjà considérés donnent

$$MM' = PP' \frac{OM}{OP} \quad \text{ou} \quad PP' = MM' \frac{OP}{OM};$$

or $\frac{OP}{OM}$ est le cosinus de l'angle POM ou de son égal $P\mu M$: donc le théorème est démontré.

6. « Ces cordes enveloppent une parabole tangente aux deux droites L, L' ; le foyer de cette courbe est le point central des deux figures, et sa directrice est la droite milieu Λ des deux droites L, L' . »

Pour que ce théorème soit exact, il faut substituer à la directrice la tangente au sommet.

On a un angle droit $O\mu M'$ dont un côté passe toujours par un point fixe et dont le sommet décrit une droite fixe, il faut trouver l'enveloppe de l'autre côté. O et Λ considérés comme foyer et tangente au sommet d'une parabole suffisent pour la déterminer; mais une droite telle que MM' est tangente à cette parabole: donc elle est l'enveloppe cherchée; L et L' , côtés d'angles droits, sont des tangentes à la parabole.

7. « Deux droites homologues quelconques L, L' font entre elles un angle de grandeur constante et toujours dans le même sens.

» Cet angle est égal à la rotation qu'il faut faire éprouver à l'une des figures autour du point central pour l'amener sur l'autre figure. »

Cela est évident d'après la fig. 1.

8. « Si, autour de deux points homologues O, O' des deux figures, on fait tourner deux droites homologues, leur point d'intersection décrit un cercle qui passe par les deux points O, O' . »

Deux droites homologues quelconques font entre elles un angle égal à la rotation nécessaire pour amener O en O' , et toujours dans le même sens; donc leur point de rencontre décrit un cercle complet, dont une partie capable de la rotation et l'autre de son supplément. Ces segments capables sont décrits sur OO' .

9. « Par un point quelconque on peut toujours mener un système de deux droites homologues et un seul. »

Soient λ le point, Λ la droite milieu relative à un système de droites homologues, O le point central; on a vu que Λ était perpendiculaire à $O\lambda$: donc s'il y a des systèmes de droites homologues, leurs droites milieu ont une direction donnée. Mais par λ on ne peut mener que deux droites inclinées sur cette direction de la demi-rotation, et l'on en peut toujours mener deux: donc le théorème est démontré.

10. « Sur une droite quelconque il existe toujours un système de deux points homologues, et un seul. »

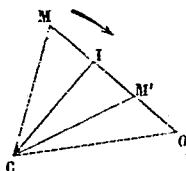
S'il existe sur une droite des systèmes de points homologues, ils ont tous pour milieu le pied de la perpendiculaire abaissée du point central sur cette droite. Mais on ne peut mener que deux droites faisant avec cette perpendiculaire un angle égal à la demi-rotation ; donc le théorème est démontré.

11. « Les points de la première figure, tels que les cordes qui les joignent à leurs homologues dans la deuxième figure concourent en un même point donné O , sont situés sur une circonférence de cercle.

» Cette circonférence passe par le point central des deux figures, par le point donné O et par le point qui, dans la première figure, correspond à ce point O considéré comme appartenant à la seconde figure. »

Soit C (fig. 2) le centre de rotation : par O je mène une droite quelconque OMM' , j'abaisse CI perpendiculaire sur cette droite, et je fais

FIG. 2.



avec elle, en tournant en sens inverse de la rotation, un angle égal à cette demi-rotation ; j'obtiens ainsi un point M , et un seul, répondant à la question. L'angle en M est constant et toujours fait dans le même sens ; donc le lieu du point M est un cercle complet passant par C et par O . Soit O' le point correspondant à O dans la première figure : sur la droite OO' , il n'existe que le système O, O' de points homologues ; donc O' appartient au cercle.

« Réciproquement : Quand un cercle appartenant à la première figure passe par le point central des deux figures, les droites qui joignent ses points à leurs homologues dans la seconde figure passent toutes par un même point du cercle. »

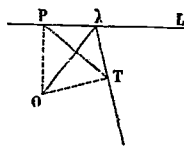
En effet, soit M un point du cercle ; la droite qui le joindra à son

correspondant M' fera avec CM et dans un sens déterminé un angle de grandeur constante; l'arc intercepté sur le cercle à partir de C sera donc aussi constant, et, par suite, toutes les droites telles que MM' iront concourir en un point fixe O de ce cercle.

12. « Si, par chaque point d'une droite donnée L , on mène deux droites homologues dans les deux figures (9), ces droites enveloppent deux paraboles tangentes à la droite L , et ayant pour foyer commun le point central des deux figures. »

J'applique une construction donnée plus haut. Soit λ (fig. 3) un point de L ; je mène $O\lambda$, et je fais avec $O\lambda$, dans un sens déterminé, un

FIG. 3.



angle λOT égal à la demi-rotation. La droite λT abaissée perpendiculairement sur OT est une des deux droites cherchées. Soit P le pied de la perpendiculaire abaissée sur L , menons PT . Le quadrilatère $OP\lambda T$ est inscritible; donc λPT est égal à la demi-rotation; donc le lieu du point T est une droite. On est alors ramené à la question d'enveloppe du n° 6; donc le théorème est démontré.

En prenant toujours la seconde droite homologue, on aurait la seconde parabole.

« Réciproquement : Quand une parabole a son foyer au point central commun aux deux figures, ses tangentes, considérées comme appartenant à l'une des deux figures, rencontrent leurs homologues en des points situés sur une même droite tangente à la parabole. »

C'est évident, il suffit de prendre le raisonnement en sens inverse.

13. « Sur deux droites non homologues menées arbitrairement dans les deux figures, il existe toujours un système de deux points homologues. »

Soit L une des droites considérée comme appartenant à la première

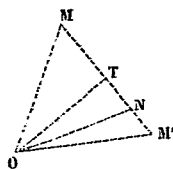
figure, elle aura pour homologue dans la seconde figure une droite L' qui rencontre la seconde droite donnée D' en un seul point homologue d'un point de L .

14. « *Par deux points non homologues, pris arbitrairement dans les deux figures, on peut toujours mener deux droites homologues.* »

Soit A un point considéré comme appartenant à la première figure, et B' un point considéré comme appartenant à la seconde figure. S'il existe un couple de droites homologues passant par A et par B' , celle qui passe par A devra contenir B homologue de B' , et celle qui passe par B' devra contenir A' homologue de A : ce ne pourra donc être que AB et $A'B'$. Ces droites sont d'ailleurs effectivement homologues : donc le théorème est démontré.

15. « *Si l'on divise dans un rapport donné toutes les cordes qui joignent deux à deux les points homologues des deux figures, les points de division forment une troisième figure semblable aux proposées et dans laquelle le point homologue au point central commun à celles-ci est ce point lui-même.* »

FIG. 4.



Soit M (fig. 4) un point de la première figure, on sait comment on obtient M' . Soit N un point tel que

$$\frac{MN}{M'N} = k$$

en grandeur et en signe : tous les triangles tels que OMM' sont semblables comme isocèles ayant même angle au sommet : donc l'angle MON est le même pour tous. On ramène donc la figure ainsi formée

à avoir ses points sur les vecteurs correspondants OM par une rotation MON . On a d'ailleurs

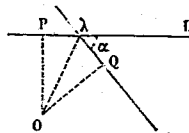
$$\frac{ON}{OM} = \frac{\sin M}{\sin N} = \text{const.};$$

donc les deux figures sont alors semblables et semblablement placées. Pendant la rotation, O qui est à lui-même son homologue reste fixe : donc le théorème est démontré.

16. « Si l'on fait tourner, d'un même angle et dans le même sens, toutes les droites d'une figure autour des points où ces droites rencontrent leurs homologues dans l'autre figure, ces droites, dans leurs nouvelles positions, formeront une troisième figure, semblable aux proposées, et dans laquelle le point homologue au point central commun à celles-ci coïncidera avec ce point. »

Soient PL (fig. 5) une droite de la première figure, O le centre de rotation, OP la perpendiculaire à PL . On sait qu'on obtient λ , point

Fig. 5.



de rencontre de cette droite avec son homologue, en faisant l'angle $PO\lambda$ égal à la demi-rotation. Je fais tourner PL autour de λ d'un angle α ; soit OQ la nouvelle perpendiculaire. L'angle POQ est égal à α , c'est-à-dire constant; donc, par une rotation α de la nouvelle figure autour de O , on amènera toutes les droites à être parallèles à leurs correspondantes, OQ s'appliquant sur OP . Mais

$$OQ = O\lambda \cos(\alpha - \omega),$$

$$OP = O\lambda \cos \omega,$$

d'où

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{\cos(\alpha - \omega)}{\cos \omega} = \text{const.};$$

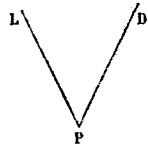
donc les droites correspondantes seront à des distances du point O dans un rapport constant, c'est-à-dire qu'on aura deux figures semblables et semblablement placées. Pendant la rotation, O qui est à lui-même son homologue, reste fixe; donc le théorème est démontré.

17. « Un point fixe P étant donné, les couples de points homologues des deux figures, tels que les cordes qui les joignent deux à deux soient vues de ce point sous un angle de grandeur donnée, sont sur deux coniques qui passent par le point P ;

» Et ces cordes enveloppent une courbe de la quatrième classe et du sixième ordre, qui a trois tangentes doubles dont une, réelle, est située à l'infini, et les deux autres, imaginaires, sont les asymptotes d'un cercle décrit autour du point central commun aux deux figures. »

Je fais au point P (fig. 6) un angle égal à l'angle donné; soient L et D' les deux côtés de cet angle, et cherchons combien sur L peuvent

FIG. 6.



se trouver de points de la première figure satisfaisant aux conditions données. En se reportant au n° 13, on sait qu'il n'existe sur deux droites non homologues qu'un système de deux points homologues, ce qui ne fournit sur L qu'un point de la première figure; mais il pourra y avoir sur L des points provenant d'autres angles de sommet P , ce qui arrivera quand la droite L sera telle que le point cherché se trouve en P . Voyons si cela peut arriver, et combien de fois. Si cela arrive, la droite telle que D' passera par l'homologue de P considéré comme appartenant à la première figure; soit P' ce point. Il suffit alors de faire avec PP' , dans le sens convenable, l'angle donné, pour que cela arrive, et il est clair que cela n'arrive que pour ce cas: donc une droite quelconque ne rencontre le lieu qu'en deux points; donc c'est une conique, et elle passe par P . On voit de plus qu'elle est tangente

à la droite qui fait avec PP' , dans le sens voulu, l'angle donné. On répéterait le même raisonnement pour la seconde figure.

Pour avoir la classe de l'enveloppe des cordes, cherchons combien de ces cordes passent par un point donné O . En se reportant au n° 13, on sait que les points de la première figure, qui, joints à leurs homologues, passent par un point donné O , sont sur un cercle qui passe par C , par O et par O' ; d'après ce qu'on vient de dire, il faut aussi chercher les points sur une conique passant par P . Les points satisfaisant à la question sont donc à l'intersection d'une conique et d'un cercle : donc il y en a quatre, donc il y a quatre tangentes, donc la courbe est de la quatrième classe.

Le cercle dont il est ici question peut se déterminer sans le point O' , en disant qu'il passe par C , par O , et qu'il est tangent en C à une droite qui fait avec CO , dans le sens de la rotation, un angle égal au complément de la demi-rotation.

Par C , menons une droite quelconque CO et la tangente au cercle en C ; elle ne variera pas quand O s'éloignera indéfiniment, mais alors le cercle se réduira à cette tangente et à la droite de l'infini. Le point O est sur cette droite, qui coupe la conique en deux points, et, pour avoir les tangentes, il faut joindre O à ces deux points, ce qui fournit deux fois la droite de l'infini : donc elle est tangente double. Les deux autres tangentes s'obtiennent en menant des parallèles à CO par les points de rencontre de la seconde droite avec la conique; donc, en général, elles sont simples, à moins que cette seconde droite ne soit tangente à la conique, ce qui arrive deux fois; nous connaissons donc trois tangentes doubles.

Supposons que O soit l'un des points circulaires de l'infini, la droite CO sera l'une des asymptotes du cercle C , et l'on sait que la droite qui fait avec CO un angle donné réel est cette droite elle-même; notre cercle se réduit donc ici à la droite de l'infini et à la droite imaginaire CO ; la droite de l'infini fournit, par son intersection avec la conique, la tangente double déjà trouvée; CO coupe la conique en deux points auxquels il faut joindre O pour avoir les tangentes : donc CO est tangente double; on en dirait autant pour le second point circulaire.

Pour avoir le degré de la courbe, cherchons combien il y a de points sur la droite de l'infini, par exemple. Elle est tangente double,

ce qui fait déjà quatre points. Autant il y en a encore, autant la courbe a d'asymptotes qui, différant de la droite à l'infini, sont à distances finies. On sera prévenu qu'on a une asymptote lorsque deux tangentes infiniment voisines de la courbe seront parallèles. Il faut donc chercher quelles sont les droites qui, joignant respectivement deux points infiniment voisins d'une conique à leurs homologues, sont parallèles.

Soient MN , $M'N'$ (*fig. 7*) deux pareilles droites; joignons MM' , NN' , nous aurons les tangentes homologues aux deux coniques. Les milieux des cordes seront sur la droite milieu de L et L' ; mais ces cordes sont parallèles: donc la droite milieu passe par C . C appartient aux deux droites, donc les pieds des perpendiculaires abaissées du centre de rotation sur ces droites se confondent; or ces droites sont distinctes, donc C est le centre de rotation. Il y aura donc autant d'asymptotes que de tangentes par C à la conique, c'est-à-dire deux; donc la courbe est du sixième ordre.

FIG. 7.

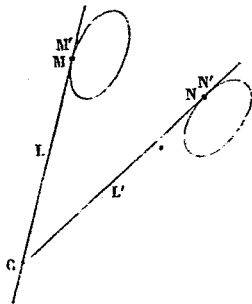


FIG. 8.



18. « Une droite D étant donnée, les couples de droites homologues des deux figures, qui interceptent sur cette droite des segments de longueur donnée, enveloppent deux paraboles tangentes à la droite D ;
 » Et les points de concours de ces couples de droites homologues sont sur une courbe du troisième ordre, qui a un point double situé au point central commun aux deux figures. »

Soit AB' (*fig. 8*) l'un des segments de longueur donnée, et cherchons combien de droites satisfaisant à la question passent par A , ce qui fournira la classe de la courbe enveloppe. En se reportant au n° 14, on voit qu'il ne passe par A et B' qu'un seul système de droites homo-

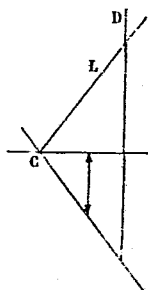
logues. Déplaçons le segment, et voyons si d'autres droites de la première figure passent par A. Puisqu'elles passent déjà par un autre point de D, elles ne pourront passer par A qu'en étant D elle-même. Cela arrivera autant de fois que l'homologue de B' pourra se trouver sur D; mais sur une droite il n'existe qu'un couple de points homologues : donc cela n'arrivera qu'une fois; donc par A ne passent que deux tangentes, donc l'enveloppe des droites de la première figure est une conique.

Prenons le point à l'infini sur D : B' sera aussi à l'infini, son homologue B également; donc la conique est tangente à la droite de l'infini, donc c'est une parabole.

On en dirait autant pour B'.

Je cherche combien il peut y avoir de points de concours de droites homologues sur une droite issue de C. On sait que ces droites font avec celles-ci des angles complémentaires de la demi-rotation; menons deux pareilles droites au point C (*fig. 9*), et inscrivons dans l'angle

FIG. 9.



obtenu une parallèle à D, de longueur égale au segment donné. Il suffit de faire glisser, jusqu'à ce que ce segment soit sur D, pour avoir un des points cherchés. Or on passera par une position et une seule; il n'y a donc qu'un seul point, plus ceux qui, appartenant à d'autres droites, pourraient se trouver sur L, ce qui ne pourrait arriver qu'autant que ces points coïncideraient avec le point C. Or, sur la droite donnée décrivons un segment capable de la rotation, faisons-le glisser sur D, et voyons combien de fois il passera par C : il y passera deux fois; donc C est point double, et la courbe est du troisième ordre.

Propriétés relatives à deux courbes géométriques égales.

19. « *Quand deux courbes égales d'ordre m sont placées d'une manière quelconque dans un plan :*

» *Les droites qui joignent deux à deux les points homologues de ces courbes enveloppent une courbe de la classe de $2m$, et de l'ordre $m(m + 1)$;*

» *Cette courbe a trois tangentes multiples de l'ordre m , dont une, réelle, est à l'infini, et les deux autres, imaginaires, sont les asymptotes d'un cercle qui aurait son centre au point central commun aux deux figures égales auxquelles appartiennent les deux courbes d'ordre m .* »

Pour avoir la classe de l'enveloppe des cordes, cherchons combien de ces cordes passent par un point donné O . En se reportant au n° 13, on sait que les points de la première figure qui, joints à leurs homologues, passent par un point donné O , sont sur un cercle qui passe par C , par O et par O' . Les points satisfaisant à la question sont donc à l'intersection de la courbe d'ordre m et d'un cercle : donc la courbe est de la classe $2m$.

Le cercle dont il est ici question peut se déterminer sans le point O' , en disant qu'il passe par C , par O , et qu'il est tangent en C à une droite qui fait avec CO , dans le sens de la rotation, un angle égal au complément de la demi-rotation.

Par C , menons une droite quelconque CO et la tangente au cercle en C ; elle ne variera pas quand O s'éloignera indéfiniment, mais alors le cercle se réduira à cette tangente et à la droite de l'infini. Le point O est sur cette droite, qui coupe la courbe en m points, et, pour avoir les tangentes, il faut joindre O à ces m points, ce qui fournit m fois la droite de l'infini : donc elle est tangente multiple d'ordre m . Les m autres tangentes s'obtiennent en menant des parallèles à CO par les points de rencontre de la seconde droite avec la courbe; donc en général elles sont simples, à moins que cette seconde droite ne soit tangente à la courbe, ce qui arrivera $m(m - 1)$ fois, et fournira en général autant de tangentes doubles.

Supposons que O soit l'un des points circulaires de l'infini, la droite CO sera l'une des asymptotes du cercle C , et l'on sait que la droite qui fait avec CO un angle donné réel, est cette droite elle-même. Notre cercle se réduit donc ici à la droite de l'infini et à la droite imaginaire CO ; la droite de l'infini fournit, par son intersection avec la courbe, la tangente multiple déjà trouvée, CO coupe la courbe en m points auxquels il faut joindre O pour avoir les tangentes, donc CO est tangente multiple d'ordre m : on en dirait autant pour le second point circulaire.

Pour avoir le degré de la courbe, cherchons combien il y a de points sur la droite de l'infini, par exemple. Elle est tangente multiple d'ordre m , ce qui fait déjà $2m$ points. Autant il y en a encore, autant la courbe a d'asymptotes qui, différant de la droite de l'infini, sont à distance finie. On sera prévenu qu'on a une asymptote lorsque deux tangentes viendront se réunir en une seule. Menons donc par chacun des points de la droite de l'infini toutes les tangentes à la courbe enveloppe, et comptons celles qui se confondent. Pour que cela arrive, nous avons vu qu'il fallait que la droite associée avec CO devînt tangente; or elle le devient $m(m-1)$ fois: la courbe est donc de degré

$$2m + m(m-1) = m^2 + m = m(m+1).$$

20. « *Quand deux courbes égales, de la classe n , sont placées d'une manière quelconque dans leur plan:*

» *Les points d'intersection des tangentes homologues des deux courbes sont sur une courbe d'ordre $2n$ et de la classe $n(n+1)$;*

» *Cette courbe a trois points multiples d'ordre n , dont un, réel, est au point central des deux figures, et les deux autres, imaginaires, sont à l'infini sur un cercle.* »

Ce théorème est corrélatif du précédent, mais on peut le démontrer directement.

Cherchons combien il y a de points du lieu sur L . Un pareil point étant trouvé, la tangente à la parabole du n° 12 devra être une tangente à la courbe donnée; quand cela arrivera, le point d'ailleurs sera bien un point du lieu: donc il y aura autant de points du lieu que de tangentes communes à la parabole de classe 2 et à la courbe de classe n , c'est-à-dire $2n$.

On sait que deux droites homologues font entre elles un angle égal à la rotation ; faisons donc pivoter cet angle autour du point C : autant de fois le côté correspondant à la première figure sera tangent à la courbe, autant d'unités il y aura dans le degré de multiplicité du point C. Or la courbe donnée est de la classe n : donc cela arrivera n fois, donc C est multiple d'ordre n .

Prenons un des points circulaires de l'infini, et faisons pivoter autour de ce point un angle égal à la rotation ; on sait que les côtés de cet angle se confondent, et que tout revient à faire pivoter une droite imaginaire ; on amènera donc cette droite à être n fois tangente à la courbe donnée : donc le point est multiple d'ordre n . On en dirait autant pour le second point circulaire.

Pour avoir la classe de la courbe, cherchons combien par ce point C on peut mener de tangentes à la courbe. Ce point, étant multiple d'ordre n , a n tangentes qui comptent chacune pour deux, ce qui fait $2n$ tangentes.

Pour qu'une droite issue de C soit tangente, il faut qu'elle renferme deux points infiniment voisins. Or, quand un point du lieu est sur une droite issue de C, les deux droites homologues qui le fournissent sont également inclinées d'un angle connu sur ce vecteur ; il faut donc que deux parallèles infiniment voisines de celles-là, menées par le point consécutif du vecteur, soient aussi des tangentes à la courbe : la courbe doit donc avoir deux tangentes infiniment voisines qui soient parallèles. Or, quand cela arrive, la tangente dont il s'agit est une asymptote : il y aura donc autant de tangentes issues de C que d'asymptotes ; mais il y a autant d'asymptotes qu'il y a de points dans lesquels la courbe puisse être coupée par une droite, c'est-à-dire $n(n - 1)$: donc la courbe est de classe

$$2n + n(n - 1) = n^2 + n = n(n + 1).$$

21. « Étant donnée dans le plan de deux figures égales une courbe d'ordre m , si par chaque point de cette courbe on mène les deux droites homologues des deux figures qui se coupent en ce point (9), ces deux droites enveloppent deux courbes de la classe $2m$ et de l'ordre $m(m + 1)$;

» Chacune de ces courbes a trois tangentes multiples d'ordre m ,

dont une, réelle, est à l'infini, et les deux autres, imaginaires, sont les asymptotes d'un cercle ayant son centre au point central des deux figures. »

Considérons la courbe d'ordre m comme appartenant à la première figure, et soit λ (fig. 10) un de ses points; faisons-la tourner de manière à l'amener dans la seconde figure, et soit λ' ce que devient λ ; je mène $\lambda\lambda'$.

Par λ menons les deux droites homologues des deux figures; on sait qu'elles font avec $O\lambda$ des angles égaux au complément de la demi-rotation; donc l'une est $\lambda\lambda'$ et l'autre est symétrique par rapport à $O\lambda$. Relativement à $\lambda\lambda'$, il n'y a qu'à se reporter au n° 19, et le théorème est démontré; relativement à l'autre droite, il n'y a qu'à faire usage du n° 16, et l'on retombe sur le n° 19.

FIG. 10.

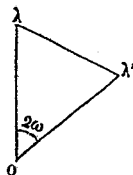
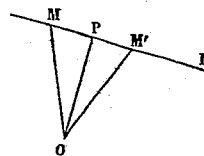


FIG. 11.



22. « Étant donnée dans le plan de deux figures égales une courbe de la classe n , sur chaque tangente à cette courbe se trouvent deux points homologues des deux figures (10) :

» Ces deux points ont pour lieu géométrique deux courbes égales d'ordre $2n$ et de la classe $n(n+1)$;

» Chacune de ces courbes a trois points multiples d'ordre n , dont un, réel, est le point central commun aux deux figures, et les deux autres, imaginaires, sont à l'infini sur un cercle. »

Considérons la courbe de classe n comme appartenant à la première figure, et soit L (fig. 11) une de ses tangentes. Abaissons la perpendiculaire OP , et (10) faisons de part et d'autre des angles égaux à la demi-rotation; nous aurons les points homologues. Faisons tourner la courbe de manière qu'elle fasse partie de la seconde figure, L occupera la position L' et passera par M' ; donc M' est l'intersection

des tangentes homologues des deux courbes, donc on est dans le cas du n° 20. Le lieu des points M n'est autre que celui des points M' , qui a tourné d'un angle égal à la rotation, mais en sens inverse: donc le théorème est démontré.

23. « Si, dans les deux théorèmes 19 et 20, on suppose que les deux courbes données soient infiniment voisines, comme il arrive quand une courbe éprouve un déplacement infiniment petit (lequel est toujours une rotation autour d'un point fixe), les deux théorèmes prennent les énoncés suivants :

» *Quand le sommet d'un angle droit, dont un côté tourne autour d'un point fixe, glisse sur une courbe d'ordre m , l'autre côté enveloppe une courbe de la classe $2m$ et de l'ordre $m(m+1)$;*

» *Cette courbe a trois tangentes multiples d'ordre m , dont une, réelle, est à l'infini, et les deux autres, imaginaires, sont les asymptotes d'un cercle qui aurait son centre au point fixe. »*

En effet, les droites qui joignaient les points homologues deviennent des perpendiculaires aux vecteurs.

24. « *Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes d'une courbe de la classe n est une courbe d'ordre $2n$ et de la classe $n(n+1)$;*

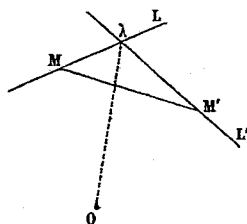
» *Cette courbe a trois points multiples d'ordre n , dont un, réel, est le point fixe autour duquel tourne le premier côté de l'angle, et les deux autres, imaginaires, sont à l'infini sur un cercle. »*

En effet, la droite qui joint le point fixe au point de rencontre de deux tangentes homologues est bissectrice de leur angle: elle devient donc la perpendiculaire.

25. « *Étant données deux courbes égales de la classe n , si par chaque couple de points homologues de ces deux courbes on mène un cercle passant par le point central O commun aux deux figures que ces courbes représentent, tous les cercles ainsi déterminés auront pour enveloppe une courbe d'ordre $2n$ et de la classe $n(n+1)$; cette courbe a trois points multiples d'ordre n , dont un, réel, situé au point O , et les deux autres, imaginaires, situés à l'infini sur un cercle. »*

Soient L et L' (*fig. 12*) deux tangentes homologues, M , M' leurs points de contact; on sait que MM' est tangente à une parabole ayant O

FIG. 12.



pour foyer et tangente à L et L' . Le cercle circonscrit au triangle $M\lambda M'$ passe, d'après une propriété connue, par O : donc le cercle passant par M , M' et O passe par λ . Les deux points suivants des courbes de la classe n seront sur L et L' , qui sont les tangentes, et le cercle passant par ces points et O passera par λ ; donc λ est le point de rencontre du cercle avec sa position infiniment voisine, c'est-à-dire un point de l'enveloppe: on est donc ramené au n° 20.

26. « Si l'on suppose que les deux courbes soient infiniment voisines, le théorème prend cet énoncé :

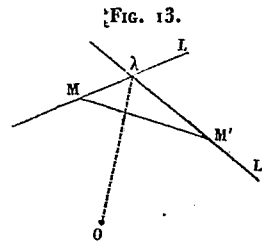
» *Si les rayons vecteurs menés d'un point fixe O à tous les points d'une courbe de la classe n sont pris pour diamètres d'autant de cercles, la courbe enveloppe de ces cercles est une courbe d'ordre $2n$ et de la classe $n(n+1)$, qui a trois points multiples d'ordre n , dont un, réel, est le point O , et les deux autres, imaginaires, sont à l'infini sur un cercle. »*

En effet, M et M' sont infiniment voisins, et MM' est perpendiculaire sur OM . Le cercle décrit par O , M , M' a donc OM pour diamètre.

27. « *Étant données deux courbes égales d'ordre m , si l'on conçoit chaque couple de tangentes homologues des deux courbes, et la parabole tangente à ces deux droites et ayant son foyer au point central O commun aux deux figures :*

» *Toutes les paraboles ainsi déterminées auront pour enveloppe une courbe de la classe $2m$ et de l'ordre $m(m+1)$; cette courbe a trois tangentes multiples d'ordre m , dont une, réelle, est située à l'infini, et les deux autres, imaginaires, sont les asymptotes d'un cercle ayant son centre en O .* »

Soient L, L' (fig. 13) un couple de tangentes homologues, M, M' leurs points de contact. Nous connaissons l'enveloppe de MM' ; je cherche



le point de contact de cette droite avec son enveloppe. Sa position infiniment voisine passera par les points infiniment voisins de M et M' , et sera tangente à la parabole ayant O pour foyer et L, L' pour tangentes; donc le point de contact de MM' avec son enveloppe est aussi son point de contact avec la parabole. Une parabole infiniment voisine de celle-là sera tangente à la droite infiniment voisine de MM' , en un point infiniment voisin du point de contact trouvé; donc la limite du point d'intersection des deux paraboles est le point de contact de la parabole primitive avec MM' ; or ce point appartient à l'enveloppe de MM' : on retombe donc sur le n° 19.

28. « Qu'on suppose les deux courbes infiniment voisines, on en conclura ce théorème :

» *Si d'un point fixe O on abaisse une perpendiculaire sur chaque tangente d'une courbe d'ordre m , et que par le pied de la perpendiculaire on mène une parabole qui touche cette tangente en ce point et ait pour foyer le point O :*

» *Toutes les paraboles ainsi menées auront pour enveloppe une courbe de la classe $2m$ et de l'ordre $m(m+1)$, qui aura trois tangentes mul-*

tiples d'ordre m , dont une, réelle, est à l'infini, et les deux autres, imaginaires, sont les asymptotes d'un cercle ayant son centre en O . »

En effet, en se reportant au n° 6, on voit qu'à la condition pour la parabole d'être tangente à MM' on peut substituer celle d'être tangente à PP' , en appelant P, P' les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur L et L' . Le point de contact est d'ailleurs entre P et P' ; or, quand les deux courbes sont infiniment voisines, P et P' se confondent : donc la parabole passe par P , et elle est tangente en ce point à la droite L .

Composition des rotations et des translations finies, dans un plan.

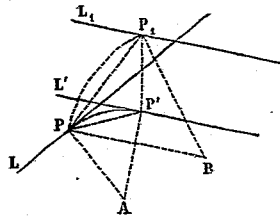
29. « Une rotation finie autour d'un point A peut être remplacée par une autre rotation égale et de même sens, autour d'un autre point quelconque B , et par une translation;

» Cette translation est égale à deux fois la distance des deux centres de rotation, multipliée par le sinus de la demi-rotation. »

Il suffit de démontrer la proposition pour une droite à laquelle la figure serait invariablement liée.

Soient L (*fig. 14*) une droite, P le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur cette droite. Par suite d'une rotation 2ω autour de A ,

FIG. 14.



P vient en P' et L' fait avec L , dans le sens de la rotation, un angle égal à 2ω .

Faisons tourner L autour de B d'un angle 2ω dans le même sens que tout à l'heure; la nouvelle position L_1 , faisant avec L un angle 2ω , sera parallèle à L' ; il suffira donc de donner à la droite une translation égale et parallèle à $P'P$, pour l'amener en L' .

En faisant tourner PA de $\frac{\pi}{2} - \omega$, on l'amène en PP'; de même PB est amené en PP₁; donc P, PP' = BPA. On a aussi

$$PP_1 = 2PB \sin \omega, \quad PP' = 2PA \sin \omega,$$

d'où

$$\overline{P_1P'}^2 = 4 \sin^2 \omega (\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2PA \cdot PB \cos BPA),$$

$$\overline{P_1P'}^2 = 4 \sin^2 \omega \cdot \overline{AB}^2,$$

$$P_1P' = 2 \sin \omega \cdot AB,$$

ce qu'il fallait démontrer.

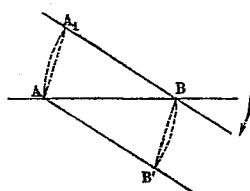
Il est beaucoup plus simple, puisqu'on est libre de choisir la droite, de prendre AB; le théorème est alors évident, et l'on a de suite

$$BB' = 2AB \sin \omega.$$

« Réciproquement : Une rotation autour d'un point et une translation peuvent être remplacées par une rotation unique égale à la rotation proposée et de même sens. »

Supposons qu'on ait à effectuer une rotation autour du point B (fig. 15) et une translation BB'; considérons la droite qui fait avec BB' dans le sens de la rotation, un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \omega$, et en B' la droite qui fait avec BB' le même angle; le point A de rencontre de ces deux droites sera le point cherché.

FIG. 15.



30. « Quand une figure plane éprouve deux rotations successives autour de deux points A, B, nous entendons que la première rotation

a lieu autour du point A, qui reste fixe pendant cette rotation, et que la seconde a lieu ensuite autour d'un point B', qui est la position qu'a prise le point B en vertu de la première rotation.

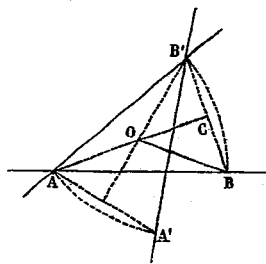
» Cela convenu : *Deux rotations successives d'une figure autour de deux points A, B produisent une rotation unique autour d'un point O.*

» *Cette rotation est égale à la somme ou à la différence des deux rotations proposées, selon qu'elles ont lieu dans le même sens ou en sens contraire; et le centre O de cette rotation se détermine par cette considération, que les trois points A, B et O sont les sommets d'un triangle ABO dont les angles en A et en B sont égaux aux demi-rotations proposées, le premier de ces angles étant formé dans le sens de la première rotation et le second en sens contraire à celui de la seconde rotation. Le troisième angle O est égal au supplément de la [*] rotation résultante. Il suit de là que les trois côtés du triangle sont proportionnels aux sinus des demi-rotations qui ont lieu autour de ses sommets.*

» Il ne faut pas perdre de vue que la première rotation et la rotation résultante ont bien lieu effectivement autour des deux points A et O du triangle, et que la seconde rotation ne se fait pas autour du sommet B, mais bien autour du point B', où ce point B vient se placer par l'effet de la première rotation. »

Considérons une droite AB (fig. 16) de la première figure, et voyons

Fig. 16.



ce qu'elle devient. Par l'effet de la première rotation, B vient en B' et A reste fixe; par l'effet de la seconde rotation, que nous sup-

[*] Il faut la demi-rotation.

posons de même sens que la première, B' reste fixe et A vient en A'; de sorte que, en définitive, AB est venu en A'B'. Or on sait qu'on peut amener une droite d'une position à une autre par une seule rotation. Le centre O se détermine en élevant des perpendiculaires AO, B'O à AA' et BB' en leurs milieux. Il est bien clair que, ayant d'abord dévié la droite d'un certain angle, puis d'un autre dans le même sens, la déviation totale est la somme des déviations. On peut remarquer aussi que la moitié de la déviation totale au B'OC est égale à la somme des demi-déviations partielles B'AO, AB'O, comme angle extérieur d'un triangle.

Dans le triangle AOB, A est égal à la demi-déviatiion première et B à la demi-déviatiion seconde, puisqu'il est égal à AB'O, d'où il résulte que O est le supplément de la demi-rotation résultante, ce qui se voit aussi sur la figure.

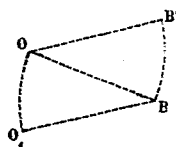
On raisonnerait de même pour les rotations de sens inverse.

31. « Réciproquement : Une rotation unique peut se remplacer d'une infinité de manières par deux rotations autour de deux points.

» L'un de ces points étant donné, l'autre sera pris arbitrairement sur une droite déterminée de position. »

Supposons qu'on ait à faire une rotation unique, de grandeur déterminée, autour d'un point O (fig. 17), et essayons de la remplacer par deux rotations, dont l'une autour d'un point B, par exemple.

FIG. 17.



Dans la rotation autour de O, B vient en B', et la rotation est alors unique. Revenons à la première position et donnons à la figure une rotation arbitraire autour de B, de même sens que la première, O vient en O'. Il s'agit maintenant, par une rotation unique, d'amener O, B en O'B'; or on sait que cela est possible, et, pour avoir le centre de ro-

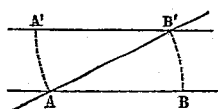
tation, il suffit d'élever des perpendiculaires au milieu des cordes OO , et BB' ; mais, B étant donné, BB' l'est aussi, la perpendiculaire aussi; donc, l'un des points étant donné, l'autre est sur une droite déterminée de position.

32. « Deux rotations égales et de sens contraires produisent une translation.

» Ces deux rotations forment ce qu'on appelle un *couple de rotations*. »

Soient A et B (*fig. 18*) les deux centres de rotations, et considérons la droite AB ; par suite de la première rotation, AB viendra en AB' ; par

FIG. 18.



suite de la seconde, AB' viendra en $A'B'$, et comme les deux rotations sont égales, les angles $A'B'A$, BAB' sont égaux; donc les deux droites sont parallèles, donc on aurait pu amener AB en $A'B'$ par une translation égale et parallèle à BB' .

II. PROPRIÉTÉS RELATIVES A DEUX FIGURES SYMÉTRIQUES PLACÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS LE MÊME PLAN.

33. « Le système de deux figures égales, mais construites symétriquement et placées d'une manière quelconque dans le même plan, donne lieu à des propriétés très-différentes de toutes celles qui précèdent; ces propriétés méritent d'être connues, quoiqu'on ne les ait point encore étudiées, que nous sachions du moins. D'ailleurs cette question spéciale rentre directement dans la théorie générale du déplacement d'une figure dans l'espace et ne doit point y être omise; car deux figures planes symétriques, situées dans le même plan, deviennent superposables au moyen de deux rotations. Qu'on fasse tourner, en effet, une des deux figures autour d'une droite quelconque du plan

commun, pour la rabattre, par une rotation de 180 degrés, sur le même plan, alors elle est superposable à l'autre figure au moyen d'une seconde rotation autour de leur point central commun.

» Nous ne citons dans ce moment que ce moyen de superposer les deux figures l'une à l'autre, qui est évident; mais nous verrons, en parlant du déplacement d'une figure à trois dimensions, que la superposition peut se faire d'une manière plus générale par deux rotations autour de deux droites, dont l'une est prise arbitrairement dans l'espace. »

Considérons une figure plane comme faisant partie d'un solide invariable, et appliquons cette figure dans son plan en la retournant; un point du corps, qui était d'abord au-dessous du plan, va maintenant se trouver au-dessus. Chacun des points de la figure plane a décrit, d'après ce qui a été démontré dans notre premier Mémoire, des arcs d'hélice dont les cordes sont toutes dans le plan : ces cordes ont donc une projection nulle sur la perpendiculaire au plan; mais la corde d'un point qui n'est pas dans le plan a sur cette droite une projection finie; donc elle n'est pas l'axe du déplacement: il faut donc chercher l'axe dans le plan même. Chacun des points de la figure plane ayant alors décrit des demi-spires, les cordes de ces demi-spires sont toutes divisées en parties égales par l'axe du déplacement. S'il n'y avait qu'une rotation, l'axe et ses points n'auraient pas bougé; mais, comme il y a ensuite un glissement, tous les points sont déplacés, donc :

34. « Quand deux figures, qui ont été construites symétriquement, sont placées d'une manière quelconque dans le même plan, elles n'ont pas en général de point commun.

» C'est-à-dire qu'il n'existe pas, comme dans deux figures égales et superposables par voie de glissement de l'une sur le plan commun, un point qui, considéré comme appartenant à la première figure, soit lui-même son homologue dans la seconde figure.

35. » Si deux figures égales symétriquement ont un point commun, elles sont nécessairement symétriques par rapport à une droite qui passe par ce point. »

Car, si elles ont un point commun, la corde de ce point est nulle :

donc l'axe du déplacement passe par ce point, et le déplacement n'est qu'une rotation autour de cet axe; donc cet axe est un axe de symétrie.

36. « *Étant données deux figures égales par symétrie, placées d'une manière quelconque dans le même plan :*

» 1° *Les bissectrices des angles de deux droites homologues quelconques sont parallèles à deux droites fixes. »*

Le glissement ne changeant rien au parallélisme, ne considérons que la rotation. L'axe de rotation est alors bissecteur de l'angle de deux droites homologues, et sa perpendiculaire aussi: donc le théorème est démontré.

2° « *Par chaque point d'une figure on peut mener deux droites parallèles à leurs homologues dans l'autre figure; ces deux droites sont rectangulaires. »*

Négligeons encore le glissement; les seules droites qui dans la rotation restent parallèles à elles-mêmes sont celles qui sont parallèles ou perpendiculaires à l'axe de rotation, dont le théorème est démontré.

3° « *Les deux figures ont toujours une droite commune, dans le sens de laquelle il suffit de faire glisser une des figures pour la placer symétriquement à l'autre, l'axe de symétrie étant cette droite commune. »*

Cette droite est l'axe du déplacement et, en faisant glisser d'une quantité égale et contraire au demi-pas de l'hélice, on amène les deux figures à être symétriques.

4° « *Les cordes qui joignent deux à deux les points homologues des deux figures ont leurs milieux sur la droite commune. »*

C'est ce que l'on a démontré plus haut.

5° « *Les projections orthogonales de ces cordes sur cette droite sont égales entre elles. »*

Car elles sont égales au demi-pas de l'hélice.

37. « *Une droite L étant prise arbitrairement dans la première figure, il existe toujours un point O autour duquel il suffit de faire tourner la seconde figure pour l'amener dans une position symétrique à*

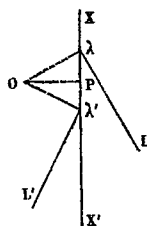
la première, l'axe de symétrie étant la droite L sur laquelle est venue se placer son homologue L' de la seconde figure. »

En effet, marquons sur L deux points quelconques A et B, et sur L' leurs homologues A' et B'. On sait qu'il existe un point O autour duquel il suffit de faire tourner A'B' pour l'amener en AB, et les deux figures sont alors placées symétriquement.

« Réciproquement : Un point O étant pris arbitrairement, il existe deux droites homologues L et L' dans les deux figures, telles que, par une rotation de la seconde autour du point O, la droite L' vient se placer sur la droite L, et les deux figures se trouvent dans une position de symétrie par rapport à cette droite. »

Soient XX' (fig. 19) l'axe du déplacement et O le point donné; abaissons la perpendiculaire OP, et prenons de part et d'autre de P des lon-

FIG. 19.



gueurs Pλ, Pλ' égales au demi-glissement; menons Oλ, Oλ' et par λ, λ' des perpendiculaires à ces droites: ce seront les droites L et L', comme cela est évident.

38. « Il existe entre la droite L, le point O et la rotation à effectuer autour de ce point, la relation suivante :

» La distance du point O à la droite L, multipliée par le sinus de la demi-rotation, donne un produit constant qui est égal à la demi translation dans le sens de la droite commune aux deux figures, qui suffit pour placer l'une des figures symétriquement à l'autre (36, 3^o). »

Soit 2ω la rotation, la fig. 19 donne

$$O\lambda \sin \omega = \frac{1}{2} \lambda\lambda' = \text{const.}$$

39. « Le point O et la rotation à effectuer autour de ce point donnent encore lieu à cette autre relation :

» *La distance du point O à la droite commune aux deux figures, multipliée par la tangente de la demi-rotation, fait un produit égal à la demi-translation dans le sens de la droite commune.* »

On a

$$\frac{\frac{1}{2}\lambda\lambda'}{OP} = \text{tang } \omega, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2}\lambda\lambda' = OP \text{ tang } \omega.$$

« On peut dire encore que ce produit est égal à la moitié de la projection orthogonale, sur la droite commune, de la corde qui joint deux points homologues quelconques des deux figures (36, 4°). »

Puisque λ et λ' sont deux points homologues, et que $\lambda\lambda'$ est leur projection.

40. « A chaque droite L correspond un point O, et à chaque point O correspond une droite L (37) :

» *Quand les droites L passent par un même point, les points O sont sur une même droite; et réciproquement, quand des points O sont en ligne droite, les droites L passent par un même point.* »

Si des droites L passent par un même point l , leurs homologues L' passent aussi par un même point l' homologue de l ; donc les points O sont sur la perpendiculaire élevée à ll' en son milieu.

Pour démontrer la réciproque, il suffit de prendre deux positions de O sur la droite : on détermine ainsi L et L' , L_1 et L'_1 et, par suite, deux points fixes l et l' .

« En outre, le rapport anharmonique de quatre points est égal à celui des quatre droites. »

Le rapport anharmonique de quatre points O en ligne droite est égal au rapport anharmonique de quatre points P, et celui-ci au rapport anharmonique de quatre points λ , puisque $P\lambda$ est une constante. Or ce dernier rapport est celui du faisceau de quatre droites L : donc le théorème est démontré.

41. « Il s'ensuit que : *Des droites L quelconques, d'une part, et les*

points O qui leur correspondent, d'autre part, forment deux figures corrélatives [*]. »

La propriété précédente est la définition même des figures corrélatives.

« Par conséquent, si les droites L enveloppent une conique, les points O sont sur une autre conique; etc., etc. »

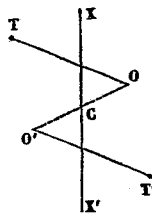
Car, par un point, on ne peut mener que deux tangentes L à la conique, et, par conséquent, sur la droite corrélatrice du point, il n'y a que deux points O .

42. « Quand deux figures égales symétriquement sont placées d'une manière quelconque dans le même plan :

• 1° Si autour de deux points homologues on fait tourner deux droites homologues, leur point d'intersection décrit une hyperbole équilatère, qui a pour l'une de ses asymptotes la droite commune aux deux figures. »

Car les droites homologues font entre elles des angles égaux dans le même sens; on a donc deux faisceaux homographiques, qui par l'intersection de leurs rayons correspondants déterminent une conique. On sait que, par un point d'une figure, il passe toujours deux droites parallèles à leurs homologues dans l'autre figure, que ces deux droites sont rectangulaires, et que l'une d'elles est parallèle à la droite com-

FIG. 20.



me; donc la conique est une hyperbole équilatère ayant pour direction asymptotique la droite commune aux deux figures.

La tangente en O' (fig. 20) à la conique est l'homologue de OO'

[*] « Voir *Traité de Géométrie supérieure*, p. 413. »

considérée comme appartenant à la première figure; la tangente en O est l'homologue de OO' considérée comme appartenant à la seconde figure : ces deux tangentes sont donc parallèles; par suite, OO' est un diamètre, C le centre et XX' une asymptote.

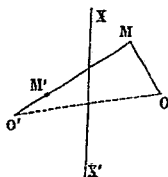
« 2° Les cordes, qui joignent deux à deux les points homologues de deux droites homologues, enveloppent une parabole tangente à ces deux droites, et tangente en son sommet à la droite commune aux deux figures. »

Car ces cordes tracent sur les deux droites des divisions homographiques dont les parties sont respectivement égales. Si L et L' sont ces deux droites, λ et λ' les points où elles rencontrent XX' , λ et λ' sont homologues et la parabole est tangente à la droite commune. La direction limite d'une corde qui joint deux points homologues quand ces points s'éloignent indéfiniment est perpendiculaire à XX' ; or cette direction limite est celle de l'axe de la parabole; XX' est donc une tangente perpendiculaire à l'axe, et, par suite, la tangente au sommet.

45. « Les points d'une figure, qui sont tels que les droites qui les joignent à leurs homologues passent toutes par un même point pris arbitrairement, sont situés sur une hyperbole équilatère qui passe par ce point, et dont une des asymptotes est la droite commune aux deux figures. »

Soit M (fig. 21) un point de la première figure, M' son homologue dans la seconde, O' le point donné, O l'homologue de O' dans la pre-

FIG. 21.



mière figure; menons OM ; le point M est l'intersection des rayons homologues OM , $O'M'$: on retombe ainsi sur le paragraphe (42, 1°).

« Et réciproquement, toute hyperbole équilatère, dont une des asym-

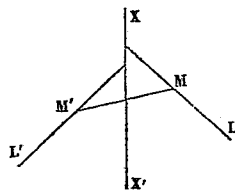
ptotes est la droite commune aux deux figures, jouit de la propriété que les droites qui joignent ses points, considérés comme appartenant à une des deux figures, à leurs homologues dans l'autre figure, passent toutes par un même point de l'hyperbole. »

Soit M (fig. 21) un point de l'hyperbole considéré comme appartenant à la première figure; déterminons à l'aide de ce point O et O', et appliquons l'énoncé du paragraphe (42, 1°) à ces deux points, nous obtiendrons une hyperbole équilatère coïncidant avec celle-ci, puisqu'elles satisfont à plus de cinq conditions communes; donc le théorème est démontré.

44. « Quand des droites d'une figure rencontrent leurs homologues en des points situés sur une droite fixe, prise arbitrairement, ces droites enveloppent une parabole tangente à cette droite, et qui touche en son sommet la droite commune aux deux figures. »

Soit L' (fig. 22) la droite fixe; considérons-la comme appartenant à la seconde figure, et soit L son homologue dans la première.

FIG. 22.



Soit M' le point de rencontre de deux droites homologues, considérons-le comme appartenant à la seconde figure : la droite de la première figure passera par M homologue de M'; les deux droites homologues sont donc MM' et une autre droite passant par M'; cherchons l'enveloppe des droites MM'; on retombe ainsi sur le paragraphe (42, 2°).

« Et réciproquement, toute parabole tangente en son sommet à la droite commune aux deux figures jouit de la propriété que toutes ses tangentes, considérées comme appartenant à une des deux figures, rencontrent leurs homologues en des points situés sur une même droite qui est une tangente à la parabole. »

Soit MM' une des tangentes à cette parabole considérée comme appartenant à la première figure : prenons son homologue dans la seconde figure, nous aurons M' , par suite L' , puis L . Appliquons alors l'énoncé du paragraphe (42, 2°), nous obtiendrons une parabole coïncidant avec celle-ci, puisqu'elles satisfont à plus de quatre conditions communes; donc le théorème est démontré.

45. « Nous ne nous étendrons pas davantage sur les propriétés auxquelles donne lieu le système de deux figures égales symétriquement. On voit qu'elles sont très-différentes, comme nous l'avons annoncé, de celles qui appartiennent à deux figures superposables. Une différence principale provient de ce que les figures symétriques ont toujours, quelle que soit leur position, une droite commune qui n'existe pas dans les figures superposables, tandis que celles-ci ont un point commun qui n'existe pas dans les autres.

» Mais les propriétés géométriques, dans ces deux systèmes, ont une analogie constante. C'est qu'en effet les deux systèmes ne sont que des cas particuliers de deux figures homographiques quelconques. Et même on n'appréciera bien le caractère distinctif des unes et des autres qu'en les comparant au cas général de deux figures homographiques.

» Nous dirons donc :

» *Premièrement, deux figures égales superposables sont deux figures homographiques dont un des trois points communs est réel, et les deux autres sont imaginaires à l'infini, et dont une des trois droites communes est réelle et située à l'infini, et les deux autres sont imaginaires.*

» *Secondement, deux figures égales symétriques sont deux figures homographiques qui n'ont que deux points communs et deux droites communes : un des deux points est à l'infini, et une des deux droites est aussi à l'infini.*

» Pour concevoir deux figures homographiques n'ayant que deux points communs et deux droites communes, il suffit de supposer que des trois points A, B, C communs à deux figures homographiques, en général, le troisième, C par exemple, s'approche indéfiniment du point A , en conservant la direction donnée AC . Quand le point C sera infiniment

voisin du point A, on dira que les deux figures n'ont plus que deux points communs A et B, et deux droites communes AB et AC.

» Il suffit d'exprimer, dans la construction géométrique des deux figures, que les deux divisions homographiques formées par les points homologues situés sur la droite commune AC ont leurs deux points doubles coïncidents en A; ou bien que les deux faisceaux homographiques formés par les droites homologues des deux figures autour du point commun B ont leurs deux rayons doubles coïncidents suivant BA. »

III. DÉPLACEMENT D'UNE LIGNE DROITE DANS L'ESPACE.

46. « Quand une droite L, sur laquelle sont marqués des points A, B, C, ..., est transportée en L' dans un autre lieu de l'espace, où ces points ont les positions A', B', C', ... :

» 1° Les cordes AA', BB', ... sont toutes parallèles à un même plan sur lequel les deux droites L, L' sont également inclinées. »

Une droite, sur laquelle sont marqués des points, a été déplacée d'une manière arbitraire dans l'espace : ne pourrait-on pas la ramener à sa position première par une simple rotation autour d'un axe convenablement choisi?

Soient A et B deux points de la droite qui viennent respectivement en A' et B' : AA' est la corde d'un arc de cercle, BB' également, et ces deux arcs de cercle sont dans des plans parallèles.

Les directions de AA' et BB' déterminent un plan auquel l'axe de rotation doit être perpendiculaire : il y a donc tout au plus une solution quant à la direction.

Si l'axe existe, il est dans un plan perpendiculaire à AA' en son milieu, il est également dans un plan perpendiculaire à BB' en son milieu; il est donc l'intersection de ces deux plans. On peut encore dire : projetons A, B, A', B' sur un plan perpendiculaire à l'axe; puisqu'il n'y a eu qu'une simple rotation, la projection de AB est égale à celle de A'B' et il suffit de chercher le point central de ces deux projections.

On peut encore faire usage du théorème sur les droites coupées par des plans parallèles.

d'où

$$\operatorname{tang} x = \frac{OP}{O\varpi} \operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\cos \omega} = \operatorname{const.};$$

donc le lieu est une droite, et il est clair sur la figure qu'elle fait des angles égaux avec L et L'.

Considérons par L un plan parallèle à L', et par L' un plan parallèle à L, et une série de droites comprises entre les deux plans, ces droites auront leurs milieux sur un plan parallèle à L et à L'; donc Λ est dans ce plan.

Au lieu du calcul précédent, on pourrait dire que le lieu, étant l'intersection de deux plans, est une droite.

« 3° Les projections orthogonales de ces cordes AA', BB', ..., sur la droite Λ , sont toutes égales entre elles. »

Menons par Λ le plan vertical $\varpi\mu$; abaissons du point M une perpendiculaire sur ce plan, et par le pied une perpendiculaire sur Λ , nous aurons projeté M μ sur Λ . La première opération fournit PP', et la seconde donne PP' $\cos \alpha$ ou const.; donc le théorème est démontré.

« 4° Les plans menés par les milieux des cordes AA', BB', ..., perpendiculairement à ces droites, passent tous par une même droite λ . »

Ils passent en effet tous par l'axe de rotation.

« 5° Les trois droites, qui mesurent les plus courtes distances de λ à L, à L' et à Λ , sont situées dans un même plan perpendiculaire à la droite λ , et les deux premières rencontrent les deux droites L, L', respectivement, en deux points homologues. »

Le théorème est évident pour les droites L et L', et comme l'angle O $\varpi\mu$ est droit, que O ϖ est dans le plan de projection, l'angle dont O $\varpi\mu$ est la projection est également droit.

« 6° Il suffit de faire tourner la droite L autour de λ pour l'amener sur L', et faire coïncider les points A, B, C, ... avec leurs homologues A', B', C', ... »

C'est ce qui a été établi dès le début.

47. « Par conséquent :

» Tout déplacement fini quelconque d'une droite dans l'espace

peut s'effectuer par une simple rotation de la droite autour d'un axe fixe.

48. » Nous appellerons la droite Λ , lieu des milieux des cordes AA' , BB' , ..., droite milieu des deux L , L' .

» Il résulte du théorème 3° que : *Quand une corde AA' , qui joint deux points homologues des deux droites L , L' , est perpendiculaire à la droite milieu Λ , toutes les autres cordes BB' , ... sont aussi perpendiculaires à cette droite.* »

Pour que leurs projections puissent être nulles.

IV. DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS L'ESPACE.

49. » *Quand deux figures planes égales, dont les points A , B , C , ... de l'une correspondent aux points A' , B' , C' , ... de l'autre, sont placées d'une manière quelconque dans l'espace :*

» 1° *Les milieux a , b , c , ... des cordes AA' , BB' , ... sont situés sur un même plan Π , lequel fait des angles égaux avec les plans P , P' des deux figures.* »

Considérons trois points A , B , C et leurs homologues A' , B' , C' des deux figures, qui suffisent pour définir le déplacement. Les points milieux a , b , c déterminent un plan Π . La droite milieu L , relative à BC et $B'C'$, passe par b et c et est dans le plan Π ; il en est de même pour M , droite milieu de CA et de $C'A'$ et pour N droite milieu de AB et $A'B'$. Soit maintenant un point quelconque D du plan P , et son homologue D' du plan P' , d le milieu de la corde DD' . Menons par D une droite à travers le triangle ABC , et son homologue par D' à travers $A'B'C'$; ces deux droites ont une droite milieu qui passe par les milieux des cordes des points où elles rencontrent les côtés des triangles; donc cette droite milieu est dans le plan Π , et, par suite, le point d situé sur cette droite.

Le plan P rencontre Π suivant une droite D , dont l'homologue D' est sur P' , la droite milieu de D et D' est sur Π et sur un plan parallèle à D et D' ; donc D' est dans un plan parallèle à Π ; donc elle est l'intersection de Π et de P' . Soient A et B deux points de D , A' et B' leurs

homologues sur D' , C et C' deux autres points homologues de P et P' ; Π étant le plan milieu, C et C' sont de part et d'autre à égale distance de Π . On a donc deux triangles ABC , $A'B'C'$ égaux, ayant leurs bases dans un même plan, et leurs sommets à la même distance de ce plan; donc ils ont dû tourner d'angles égaux avec Π , pour arriver à cette position.

» 2° Les plans perpendiculaires à ces cordes, menés par leurs milieux, passent tous par un même point du plan Π . »

Soient A, B, C (*fig. 24*) trois points, et A', B', C' leurs homologues. J'appelle α le plan perpendiculaire à AA' en son milieu, β et γ les deux autres. Soient D un quatrième point, D' son homologue : je mène par D une droite à travers le triangle ABC , et par D' son homologue à travers $A'B'C'$. Les plans correspondant à m, n, D se coupent suivant une même droite. Le plan correspondant à m passe par l'intersection de α et β ; celui correspondant à n passe par l'intersection de α et γ ; donc l'intersection des plans m et n passe par le point commun à α, β, γ . Or le plan D contient cette intersection; donc il passe aussi par α, β, γ .

FIG. 24.

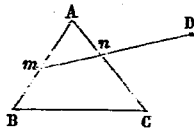
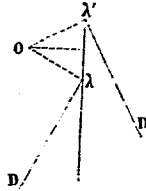


FIG. 25.



Soient D et D' (*fig. 25*) les intersections de P et P' avec Π ; en se reportant au déplacement d'une figure plane dans son plan, on voit que la droite milieu fait des angles égaux avec D et D' , et passe par les pieds des perpendiculaires abaissées du point central sur ces droites. Si P et P' faisaient des angles égaux avec Π dans le même sens, ils se rencontreraient sur la verticale de O en deux points homologues, et Π ne serait plus le plan milieu; donc ils sont inclinés en sens inverse. Mais alors en O se projettent deux points homologues dont O est le milieu : cette corde est donc verticale, et Π passe par le point de rencontre de α, β, γ .

En se reportant au théorème (46, 3°), on voit que le point O est le point cherché.

« 3° *Ce point se distingue de tous les autres, en ce que la corde dont il est le milieu est perpendiculaire au plan Π .*

» Nous appellerons ce plan Π plan milieu des deux plans P, P', et le point unique en question foyer de ce plan milieu.

50. » Le plan Π rencontre les deux plans P, P' suivant deux droites L, L' :

» 1° *Ces droites sont homologues dans les deux figures que l'on considère dans ces plans ;*

» 2° *La droite milieu Λ de ces deux droites est située dans le plan Π ;*

» 3° *Les plans menés par les milieux des cordes qui joignent les points homologues des deux droites, perpendiculairement à ces cordes, passent par une même droite λ ;*

» 4° *Cette droite est la corde qui joint deux points homologues des deux figures, et dont le milieu se trouve au foyer du plan Π (49, 3°) ;*

» 5° *On amènera la droite L sur la droite L' par une rotation autour de cette droite λ ; puis, en faisant tourner le plan P autour de la droite L, on fera coïncider les deux figures l'une sur l'autre.*

51. » Par conséquent :

» *Tout déplacement d'une figure plane dans l'espace peut s'effectuer au moyen de deux rotations successives autour de deux droites rectangulaires, dont l'une est inclinée sur le plan de la figure, et l'autre est située dans ce plan ; la première de ces droites, perpendiculaire au plan milieu relatif aux deux positions du plan de la figure, est menée par le foyer de ce plan, et la dernière est la trace, sur ce plan milieu, du plan de la figure dans sa première position.*

» Il est clair que les deux rotations peuvent être simultanées, c'est-à-dire que, pendant que la trace L du plan de la figure sur le plan milieu tourne autour de la première droite fixe, ou simplement autour du foyer de ce plan milieu, le plan de la figure peut tourner autour de cette droite mobile L.

52. » Le déplacement d'une figure plane dans l'espace peut se faire d'une autre manière, par deux rotations autour de deux droites rectangulaires, ainsi qu'il suit :

» Appelons D' la droite d'intersection des deux plans P, P' , et considérons cette droite comme appartenant à la seconde figure ; soit D son homologue dans la première figure : cette droite D est située dans le premier plan, de sorte que ce plan contient deux droites homologues D, D' , relatives aux deux figures, respectivement. On fera coïncider ces deux droites au moyen d'une rotation autour d'une droite fixe, perpendiculaire au plan ; puis, par une rotation autour de la droite D , on fera coïncider les deux plans eux-mêmes, c'est-à-dire les deux figures. Par conséquent :

» *Tout déplacement d'une figure plane dans l'espace peut s'effectuer au moyen de deux rotations successives, la première autour d'une certaine droite perpendiculaire au plan de la figure, et la seconde autour d'une seconde droite située dans ce plan lui-même.*

» Les deux rotations peuvent être simultanées comme ci-dessus ; on concevra que le plan de la figure tourne sur lui-même autour de la droite fixe qui lui est perpendiculaire, et que la figure, se détachant de son plan, tourne autour de la seconde droite, pendant que cette droite tourne elle-même autour de la première.

» Nous verrons, en parlant du déplacement d'un corps quelconque, qu'il y a beaucoup d'autres systèmes de deux rotations autour de deux droites, dont l'une peut être prise arbitrairement, par lesquels se peut effectuer le déplacement d'une figure plane dans l'espace.

53. « *La droite d'intersection des plans P, P' de deux figures égales est une corde, c'est-à-dire que sur cette droite se trouvent deux points homologues des deux figures.* »

Ramenons, en effet, P' sur P par une rotation autour de la droite d'intersection : les points homologues qui pouvaient se trouver sur cette droite s'y trouvent encore ; mais on sait (10) que sur une droite quelconque il existe toujours un système de points homologues et un seul : donc le théorème est démontré.

54. « La droite D' , intersection des deux plans P, P' , étant consi-

dérée comme appartenant à la première figure, il lui correspond, dans le plan P' , une droite D'' , qui est son homologue dans la deuxième figure.

» Un point a' de la droite D' étant considéré comme appartenant à la deuxième figure, il lui correspond dans la première un point a situé sur la droite D ; et au même point a' , considéré comme appartenant à la première figure, correspond, dans la deuxième, un point a'' situé sur la droite D'' .

» Si l'on considère la droite aa' comme appartenant à la première figure, la droite qui lui correspond dans la deuxième figure est la droite $a'a''$.

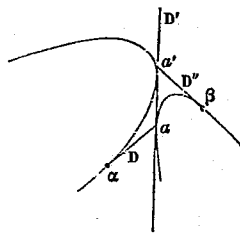
» Ainsi, par chaque point a' de la droite d'intersection D' des deux plans P, P' , on peut mener dans ces plans respectivement deux droites homologues $a'a$ et $a'a''$.

55. » Ces deux droites enveloppent deux paraboles qui font partie respectivement de deux figures égales contenues dans les plans P, P' ; et les points de contact des deux droites sur ces courbes sont deux points homologues. »

Ces cordes, étant homologues, enveloppent des courbes égales, et leurs points de contact sont homologues; les courbes enveloppes sont des paraboles en vertu du théorème (6).

« Les deux paraboles sont tangentes à la droite D' en deux points différents qui limitent la corde située sur cette droite (55). »

FIG. 26.



D'après le théorème (6), les deux paraboles sont tangentes à D' (fig. 26). Or à D' , tangente de la première figure, correspond D'' ,

tangente de la seconde; et à D' , tangente de la seconde, correspond D , tangente de la première. Considérons a comme appartenant à la première D , son homologue sera sur D' ; considérons a' comme appartenant à la seconde D'' , son homologue sera sur D' . Mais il n'existe (53) qu'un système de points homologues sur D' ; donc à a correspond a' , et à a' correspond a , d'où il résulte que $aa = aa' = a'\beta$. En un mot, a de la première a pour homologue a' de la seconde, α de la première a de la seconde, a' de la seconde a de la première, et β de la seconde a' de la première.

56. « *Le plan de deux droites $a'a$, $a'a''$, tangentes à ces deux paraboles, enveloppe une surface développable du quatrième ordre, dont la génératrice est la droite qui joint les points de contact des droites $a'a$, $a'a''$ avec les deux paraboles, respectivement.* »

Le plan des droites $a'a$, $a'a''$ enveloppe une surface développable, puisqu'il passe d'une position à une autre d'une manière parfaitement définie. Prenons l'intersection de deux positions infiniment voisines du plan, nous aurons une génératrice. Or il suffit, pour cela, de prendre les intersections des traces des deux positions du plan sur les plans des deux figures, et de les joindre. Mais ces intersections sont les points de rencontre de tangentes infiniment voisines à chacune des paraboles; on a donc pour génératrice la droite qui joint les points de contact.

Pour avoir l'ordre de la surface, je cherche l'ordre de la courbe d'intersection par le plan milieu. Soient L une droite du premier plan, L' son homologue dans le second, Λ leur droite milieu; la droite L coupe la parabole en deux points, L' aussi; donc sur Λ existent deux points de l'intersection, plus ceux qui pourraient provenir de droites joignant des points homologues n'appartenant ni à L ni à L' . Soient m , m' deux pareils points, a et a' deux des quatre points d'intersection des paraboles par L et L' . Considérons les droites am , $a'm'$, elles auront même droite milieu que L et L' ; am coupe D en un point d , et $a'm'$ coupe D' en un point d' , qui sont homologues: le milieu de dd' est sur $\lambda\lambda'$, il doit être aussi sur Λ : donc il doit être au point de rencontre de $\lambda\lambda'$ avec Λ ; mais les cordes telles que dd' enveloppent une parabole à laquelle on peut mener deux tangentes par le point de rencontre de $\lambda\lambda'$

avec Λ ; l'une de ces tangentes fournit les droites L et L' , et l'autre la droite cherchée. Chaque point de rencontre de L avec la parabole fournit donc deux points sur Λ ; donc il y a en tout quatre points sur Λ , donc la surface est du quatrième ordre.

La question revient d'ailleurs au fond à la suivante : On donne deux droites L et L' , leur droite milieu Λ et trois points a, a', α correspondants sur ces trois droites. Combien par a passe-t-il de droites ayant même droite milieu que L et L' ? Une.

57. « Cette développable jouit des propriétés suivantes :

» 1° Par un point quelconque de l'espace, on ne peut lui mener que trois plans tangents;

» 2° Son arête de rebroussement est une courbe à double courbure du troisième ordre;

» 3° Chacune des cordes qui joignent les points du plan P à leurs homologues du plan P' est la droite d'intersection de deux plans tangents à la développable;

» Et réciproquement, la droite d'intersection de deux plans tangents quelconques à la développable est une corde qui joint deux points homologues des deux plans;

» 4° Par un point de l'espace il ne passe que trois de ces cordes; deux peuvent être imaginaires, la troisième est toujours réelle. »

Dans le déplacement qu'a subi P pour arriver en P' , si l'on cherche les points dont les trajectoires ont pour cordes des droites passant par un point M , on sait qu'on trouve ces points sur une courbe à double courbure du troisième ordre. Cette courbe ne coupe P qu'en trois points, dont deux peuvent être imaginaires. Donc, par un point M de l'espace, il ne passe que trois cordes joignant des points du plan P à leurs homologues du plan P' , et l'une d'elles est toujours réelle.

Soient p et p' deux points homologues des plans P et P' ; par ces deux points, on peut mener aux deux paraboles homologues quatre tangentes homologues respectivement. Le plan des deux premières tangentes est tangent à la surface développable, le plan des deux autres également; donc la droite pp' est l'intersection de deux plans tangents à la développable.

Considérons deux plans tangents à la développable; le premier aura

pour traces sur P et P' deux tangentes homologues en des points homologues, le second également; donc les points d'intersection des tangentes sur P et P' déterminés par des constructions homologues seront homologues, donc la droite d'intersection des deux plans tangents est une corde qui joint deux points homologues des deux plans.

Cherchons à mener à la développable des plans tangents par un point quelconque M; les intersections de ces plans entre eux donneront des droites telles que pp' ; or, par un point M, il n'en passe que trois: donc il y a au plus trois plans tangents; d'ailleurs ils existent en vertu de la réciproque du 3°.

J'ajouterai que ces deux plans tangents peuvent devenir imaginaires, quand deux des droites le deviennent; il n'y a de réel que le plan qui renferme les deux droites imaginaires conjuguées.

On aurait encore pu dire: Considérons un plan tangent quelconque; il coupe suivant une courbe du quatrième ordre qui renferme déjà la double droite de contact: le reste est donc une conique. Soit M un point quelconque du plan: les plans tangents à la surface qu'on pourra mener par M auront pour traces sur le plan donné des tangentes à la conique; donc il y en a au plus deux. D'ailleurs ils existent, car, la conique étant sur la surface, il passe par chacun de ses points une génératrice de la surface qui détermine le plan tangent. Si le point M est à l'intérieur de la conique, les deux plans tangents sont imaginaires.

58. « *Quand les deux figures situées d'une manière quelconque dans l'espace sont deux courbes égales d'ordre m , les droites qui joignent deux à deux leurs points homologues forment une surface réglée de l'ordre $2m$.* »

Pour avoir l'ordre de la surface, je cherche l'ordre de la courbe d'intersection par le plan milieu. Soient L une droite du premier plan, L' son homologue dans le second, Δ leur droite milieu; la droite L coupe la courbe en m points, L' aussi; donc, sur Δ , existent m points de l'intersection, plus ceux qui pourraient provenir de droites joignant des points homologues n'appartenant ni à L ni à L'. Soient m , m' deux pareils points, a et a' deux des $2m$ points d'intersection des courbes par L et L'; considérons les droites am , $a'm'$, elles auront même droite milieu que L et L'; am coupe D en un point d , et $a'm'$ coupe D' en un

point d' , qui sont homologues; le milieu de dd' est sur $\lambda\lambda'$, il doit être aussi sur Λ : donc il doit être au point de rencontre de $\lambda\lambda'$ avec Λ ; mais les cordes telles que dd' enveloppent une parabole à laquelle on peut mener deux tangentes par le point de rencontre de $\lambda\lambda'$ avec Λ , l'une de ces tangentes fournit les droites L et L' et l'autre la droite cherchée. Chaque point de rencontre de L avec la courbe fournit donc deux points sur Λ ; donc il y a en tout $2m$ points sur Λ , donc la surface est de l'ordre $2m$.

« Si les deux courbes ont un point commun, c'est-à-dire un point qui, considéré comme appartenant à la première, soit lui-même son homologue dans la seconde, la surface réglée est de l'ordre $2m - 1$. »

Soient M le point commun, MT la tangente à la première courbe, MT' la tangente homologue à la seconde. Quand les points que l'on joint se rapprochent de M , la droite qui les joint tend à être parallèle au plan TMT' . Quand on est en M , les points à joindre sont confondus, et la droite qui les joint est arbitraire, mais contenue dans le plan qui renferme les points voisins, c'est-à-dire dans le plan TMT' ; la surface de l'ordre $2m$ admet donc un plan, donc elle descend à l'ordre $2m - 1$.

« Et si les deux courbes ont deux points communs, la surface réglée est simplement un cylindre de l'ordre m . »

Car il y a simple rotation, et les cordes sont parallèles.

« Ainsi, par exemple : Deux coniques égales étant placées d'une manière quelconque dans l'espace, les droites qui joignent deux à deux leurs points homologues forment une surface réglée du quatrième ordre.

» Si les deux coniques ont un point commun, la surface est du troisième ordre.

» Et si les deux coniques ont deux points communs, la surface est un cylindre du second ordre. »

(La suite prochainement.)