JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Mémoire sur les équations différentielles canoniques de la Mécanique

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 19 (1874), p. 265-306.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19__265_0>

Mémoire sur les équations différentielles canoniques de la Mécanique;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Je me propose dans ce Mémoire d'étudier certaines propriétés des équations différentielles canoniques de la Mécanique. Si l'on désigne par $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ les $2n$ variables du problème, et par t le temps, enfin par H une fonction de ces variables, ces équations sont renfermées dans les deux suivantes :

$$(1) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i},$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$.

Il est évident que l'intégration de ces équations peut être, dans des cas particuliers donnés, plus ou moins facilitée par la forme de la fonction H. C'est donc une question intéressante que celle qui consiste à se proposer de transformer un système canonique dans un autre par un changement de variables, qui n'ait d'autre effet que de changer la forme de la fonction H. Je traite cette question dans ce Mémoire.

Imaginons ensuite que les $2n$ variables q_i, p_i satisfassent à des équations en quantités finies, au nombre de $2r$,

$$(2) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_{2r} = 0,$$

r étant $< n$, et que l'on ait, en outre, l'équation

$$(3) \qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta H,$$

en désignant par la caractéristique δ les variations des quantités q_i, p_i

compatibles avec les équations (2), et δH représente la variation de H provenant de l'accroissement de ces variables. Dans le cas où r serait nul, les variations δq_i, δp_i seraient indépendantes, et l'on retrouverait le système des équations (1). Si l'on suppose, au lieu des équations (2), r équations conditionnelles qui renferment les n variables q_i, mais qui ne contiennent pas les variables p_i, ces équations jointes à (3) peuvent, comme je le montre, se rapporter à un problème de Mécanique. Dans ce cas, il est facile de prouver que le système des équations (2) et (3) peut être ramené à un système d'équations canoniques dont le nombre des variables se réduit à $2(n-r)$. Mais il est intéressant d'examiner le cas plus général où les équations conditionnelles données renferment non-seulement les variables q_i, mais encore les variables p_i; or je montre que le système des équations (2) et (3) peut être ramené à un système de $2(n-r)$ équations différentielles canoniques dépendant de la même fonction H, à l'aide du problème de Pfaff; je montre ensuite certains cas où cette réduction peut s'opérer plus facilement.

Le problème de Pfaff étant un problème de Calcul intégral d'une grande complication, il y a lieu de chercher à étudier le système des équations (2) et (3) tel qu'il se présente, et sans le ramener à un système canonique. Or je montre que le fameux théorème de Poisson et Jacobi, relatif aux équations canoniques, et qui permet de déduire, en général, de deux intégrales une troisième, est applicable à mon système d'équations; l'énoncé du théorème prend seulement une forme plus compliquée.

Je donne aussi dans ce Mémoire une théorie des perturbations qui renferme plusieurs considérations nouvelles; enfin j'expose des propriétés nouvelles de la fonction que l'on représente en Analyse par le symbole $[\alpha, \beta]$.

Équations différentielles de la Mécanique. Démonstration très-simple des équations hamiltoniennes.

1. Considérons un système de n points matériels; désignons par m_i la masse de chacun de ces points, et par x_i, y_i, z_i ses coordonnées par

rapport à trois axes rectangulaires, i ayant les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Désignons par

$$(1) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_r = 0$$

les équations qui expriment les liaisons auxquelles le système est assujetti. Imaginons un déplacement virtuel de tous les points du système, et soient en général δx_i, δy_i, δz_i les variations de x_i, y_i, z_i. Posons

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = y'_i, \quad \frac{dz_i}{dt} = z'_i,$$

l'expression de la demi-force vive est

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2 + y'^2 + z_i'^2);$$

supposons qu'il y ait une fonction de forces, que nous représenterons par U, et les équations différentielles du problème sont contenues dans la formule

$$(2) \qquad \sum m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right) = \delta U.$$

En différentiant T, on peut écrire les deux formules

$$2\delta T = \delta\sum m_i\left(x'_i\frac{dx_i}{dt} + y'_i\frac{dy_i}{dt} + z'_i\frac{dz_i}{dt}\right),$$

$$\delta T = \sum m_i\left(x'_i\delta\frac{dx_i}{dt} + y'_i\delta\frac{dy_i}{dt} + z'_i\delta\frac{dz_i}{dt}\right);$$

en changeant l'équation (2) de signe, puis ajoutant δT aux deux membres, nous pourrons la mettre sous cette forme

$$\delta\sum m_i\left(x'_i\frac{dx_i}{dt} + y'_i\frac{dy_i}{dt} + z'_i\frac{dz_i}{dt}\right) - \sum m_i\left(x'_i\delta\frac{dx_i}{dt} + y'_i\delta\frac{dy_i}{dt} + z'_i\delta\frac{dz_i}{dt}\right)$$
$$- \sum m_i\left(\frac{dx'_i}{dt}\delta x_i + \frac{dy'_i}{dt}\delta y_i + \frac{dz'_i}{dt}\delta z_i\right) = \delta T - \delta U.$$

Représentons la fonction $T - U$ par H, et l'équation précédente deviendra

$$\delta\sum m_i\left(x'_i\frac{dx_i}{dt}+y'_i\frac{dy_i}{dt}+z'_i\frac{dz_i}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\sum m_i(x'_i\delta x_i+y'_i\delta y_i+z'_i\delta z_i)=\delta\mathrm{H}.$$

Représentons les quantités x_i, y_i, z_i par la lettre Q affectée de différents indices, et les quantités $m_i x'_i$, $m_i y'_i$, $m_i z'_i$ correspondantes par la lettre P affectée des mêmes indices, de sorte que l'équation précédente deviendra

$$(3)\qquad \delta\left(\mathrm{P}_1\frac{d\mathrm{Q}_1}{dt}+\mathrm{P}_2\frac{d\mathrm{Q}_2}{dt}+\ldots\right)-\frac{d}{dt}(\mathrm{P}_1\,\delta\mathrm{Q}_1+\mathrm{P}_2\,\delta\mathrm{Q}_2+\ldots)=\delta\mathrm{H}.$$

Au moyen des r équations conditionnelles (1), on peut exprimer les variables Q ou x, y, z, qui sont au nombre de $3n$, au moyen de $3n-r$ variables seulement, et de manière que leurs expressions satisfassent identiquement aux équations (1); désignons par q_i ces $3n-r$ nouvelles variables, et choisissons des variables p_i en même nombre que les q_i, et qui satisfassent à l'équation

$$(4)\qquad p_1\,\delta q_1+p_2\,\delta q_2+\ldots+p_k\,\delta q_k=\mathrm{P}_1\,\delta\mathrm{Q}_1+\ldots+\mathrm{P}_{3n}\,\delta\mathrm{Q}_{3n},$$

en posant $3n-r=k$. En prenant les variations virtuelles égales à celles que subissent effectivement les variables q_i, Q_i dans l'instant dt, on déduit de l'équation précédente

$$(5)\qquad p_1\frac{dq_1}{dt}+\ldots+p_k\frac{dq_k}{dt}=\mathrm{P}_1\frac{d\mathrm{Q}_1}{dt}+\ldots+\mathrm{P}_{3n}\frac{d\mathrm{Q}_{3n}}{dt},$$

et, par suite, l'équation (3) devient

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt}+\ldots+p_k\frac{dq_k}{dt}\right)-\frac{d}{dt}(p_1\,\delta q_1+\ldots+p_k\,\delta q_k)=\delta\mathrm{H},$$

ou encore

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1+\ldots+\frac{dq_k}{dt}\delta p_k-\frac{dp_1}{dt}\delta q_1-\ldots-\frac{dp_k}{dt}\delta q_k=\delta\mathrm{H};$$

or il n'existe plus d'équations conditionnelles entre les nouvelles variables, et, comme on a

$$\delta H = \frac{dH}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{dH}{dq_k}\delta q_k + \frac{dH}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{dH}{dp_k}\delta p_k,$$

on en conclut les équations *hamiltoniennes*

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{dH}{dp_1}, \ldots, \quad \dfrac{dq_k}{dt} = \dfrac{dH}{dp_k}, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{dH}{dq_1}, \ldots, \quad \dfrac{dp_k}{dt} = -\dfrac{dH}{dq_k}. \end{array} \right.$$

2. Examinons les variables p; dans l'équation (4), les variations δq sont indépendantes, et l'on en conclut

$$\text{(6)} \qquad p_s = P_1 \frac{dQ_1}{dq_s} + P_2 \frac{dQ_2}{dq_s} + \ldots + P_{3n} \frac{dQ_{3n}}{dq_s}.$$

Telle est la formule qui permettra en général de passer des variables de l'équation (3) à celles de l'équation (A) et des équations (B); mais, en se rappelant ce que représentent les quantités Q, P, on peut obtenir de p_s une autre expression. On a alors, en effet,

$$p_s = \sum m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{dq_s} + y'_i \frac{dy_i}{dq_s} + z'_i \frac{dz_i}{dq_s} \right);$$

or on a, en désignant par $q'_1, q'_2, \ldots$ les dérivées de $q_1, q_2, \ldots$ par rapport à t,

$$\text{(7)} \qquad x'_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{dq_1} q'_1 + \frac{dx_i}{dq_2} q'_2 + \ldots;$$

on en conclut la première des trois équations

$$\frac{dx'_i}{dq'_s} = \frac{dx_i}{dq_s}, \quad \frac{dy'_i}{dq'_s} = \frac{dy_i}{dq_s}, \quad \frac{dz'_i}{dq'_s} = \frac{dz_i}{dq_s},$$

et les deux autres s'obtiennent de même : on a donc enfin

$$\text{(8)} \qquad p_s = \sum m_i \left(x'_i \frac{dx'_i}{dq'_s} + y'_i \frac{dy'_i}{dq'_s} + z'_i \frac{dz'_i}{dq'_s} \right) = \frac{dT}{dq'_s}.$$

D'après cela, on aura la quantité p_s en exprimant T en fonction des variables q et de leurs dérivées q', et, en prenant la dérivée de T par rapport à q'_s. Dans les équations (B), $H = T - U$ doit être exprimé au moyen des variables q_i, p_i : il faut donc exprimer T au moyen de ces variables. Or, de l'équation (5) on conclut

$$p_1 q'_1 + \ldots + p_k q'_k = 2T;$$

il suffit donc de porter dans cette équation les valeurs de $q'_1, q'_2, \ldots$ tirées des k équations (8).

Ce qui fait que la démonstration précédente des équations d'Hamilton est plus simple que celles qu'on a coutume de donner, c'est que nous remplaçons l'équation (2) par l'équation (3), qui est d'une forme plus générale et qui renferme cependant les mêmes propriétés à démontrer. La généralisation a alors pour effet d'obliger à aller au but par la voie la plus directe. Il faut, au contraire, remarquer que l'équation

$$p_s = \frac{dT}{dq'_s}$$

est fondée sur la forme particulière des quantités Q, P. Toutefois, il est facile de démontrer que cette équation a lieu toutes les fois que la fonction donnée H de l'équation (3) se compose d'une fonction $-U$ qui ne renferme que les variables Q et d'une fonction T, homogène et du second degré par rapport aux variables P, qui contient les variables Q d'une manière quelconque.

3. L'équation (A) présente certains avantages sur les équations (B). En effet, l'équation (A) est encore applicable dans le cas où il n'y a pas de fonction de forces dans le problème de Mécanique; il suffit de convenir que, dans $\delta H = \delta T - \delta U$, δU n'est pas une différentielle totale tant qu'on n'imagine pas les variables exprimées en fonction de t. Un second avantage de l'équation (A) consiste en ce qu'elle peut encore être admise dans le cas où les variables q satisferaient à des équations conditionnelles.

En effet, considérons r' des équations (1),

$$(9) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_{r'} = 0,$$

r' étant $< r$ et pouvant se réduire à zéro; il est possible d'exprimer les variables Q à l'aide de $3n - r'$ variables que nous désignerons par q_1, $q_2, \ldots, q_k$, en faisant $k = 3n - r'$, et de telle sorte que les expressions des variables Q satisfassent identiquement aux équations (9). En substituant ensuite ces expressions dans les $r - r'$ équations (1) qui n'ont pas encore été employées, on aura $r - r'$ équations conditionnelles entre les variables q,

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \ldots.$$

Alors, en posant l'équation (4), on sera encore conduit à l'équation (A), mais dans laquelle les variations δq, δp ne seront plus indépendantes. Les variables p_s seront encore données par la formule

$$p_s = \frac{dT}{dq'_s}.$$

En effet, les variations δq n'étant plus indépendantes dans l'équation (4), l'équation (4) n'entraîne pas nécessairement l'équation (6); mais il sera permis de poser d'abord les k équations renfermées dans l'équation (6), ce qui entraînera l'équation (4). Enfin l'équation (6) conduit comme ci-dessus à l'équation (8).

4. Nous avons admis, dans ce qui précède, que les liaisons ne dépendaient pas du temps t. Il est aisé de modifier notre analyse pour la rendre applicable au cas où ces équations contiennent le temps. Dans ce cas, il faut remarquer que les variations virtuelles ne peuvent se confondre avec les variations effectives, de sorte que l'équation (4) ne conduit plus à l'équation (5).

Les équations de liaison équivalent aux équations qui expriment les $3n$ variables Q_i au moyen des $3n - r$ variables q_i, et qui renferment actuellement le temps t,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \theta_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), \\ Q_2 &= \theta_2(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et si l'on éliminait q_1, $q_2, \ldots$ entre ces $3n$ équations, on aurait un système de r équations équivalant aux équations de liaison données.

Les variations $\delta Q_1, \delta Q_2, \ldots$ de l'équation (4) s'obtiennent en faisant varier $q_1, q_2, \ldots,$ mais en supposant t constant, ainsi que cela résulte du principe des vitesses virtuelles; ainsi l'on a

$$\delta Q_i = \frac{d\theta_i}{dq_1}\delta q_1 + \frac{d\theta_i}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{d\theta_i}{dq_k}\delta q_k.$$

Désignons par θ'_i la dérivée partielle de θ_i par rapport à t, nous aurons, pour la dérivée totale,

$$\frac{dQ_i}{dt} = \theta'_i + \frac{d\theta_i}{dq_1}q'_1 + \ldots + \frac{d\theta_i}{dq_k}q'_k;$$

les variations δq étant arbitraires, on peut faire en particulier et pour toutes les valeurs de $s = 1, 2, \ldots, k$

$$\delta q_s = q'_s\, dt,$$

et il en résulte

$$\delta Q_i = \left(\frac{dQ_i}{dt} - \theta'_i\right) dt.$$

L'équation (4) ne donnera donc plus l'équation (5), mais la suivante :

$$p_1\frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_k\frac{dq_k}{dt} = P_1\frac{dQ_1}{dt} + \ldots + P_k\frac{dQ_k}{dt} - P_1\theta'_1 - \ldots - P_k\theta'_k.$$

Par là, l'équation (3) devient

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_k\frac{dq_k}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1\delta q_1 + \ldots + p_k\delta q_k) = \delta(H - P_1\theta'_1 - P_2\theta'_2 - \ldots).$$

Ainsi l'équation (A) subsiste, pourvu qu'on y change H en

$$H - P_1\theta'_1 - P_2\theta'_2 - \ldots,$$

et les équations (B) subsisteront aussi avec le même changement. Les variables p continueront d'ailleurs à être données par les équations (8).

Transformation d'un système canonique d'équations différentielles dans un pareil système.

5. Considérons l'équation

$$(1)\qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta\mathrm{H},$$

H étant une fonction des $2n$ variables q, p, qui peut même renfermer t. Nous supposons d'abord que les variables q, p ne sont liées par aucune équation conditionnelle, de sorte que l'équation précédente revient aux $2n$ équations renfermées dans les deux suivantes :

$$(2)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_i},\quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dq_i},$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$.

Nous nous proposons de passer des variables q_i, p_i à des variables Q_i, P_i en même nombre, qui satisfassent à des équations canoniques toutes semblables à (2), en sorte que la fonction H reste la même, mais prenne seulement une autre forme.

Pour y parvenir, nous reviendrons à l'équation (1) que nous mettrons sous cette forme

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n\frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1\delta q_1 + \ldots + p_n\delta q_n) = \delta\mathrm{H}.$$

Alors il suffira de choisir des variables Q, P, fonctions des premières, et qui satisfassent à l'équation

$$(3)\qquad \mathrm{P}_1\delta\mathrm{Q}_1 + \ldots + \mathrm{P}_n\delta\mathrm{Q}_n = p_1\delta q_1 + \ldots + p_n\delta q_n;$$

car il en résultera aussi

$$\mathrm{P}_1\frac{d\mathrm{Q}_1}{dt} + \ldots + \mathrm{P}_n\frac{d\mathrm{Q}_n}{dt} = p_1\frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n\frac{dq_n}{dt};$$

on aura donc l'équation

$$\delta\left(P_1\frac{dQ_1}{dt}+\ldots+P_n\frac{dQ_n}{dt}\right)-\frac{d}{dt}(P_1\,\delta Q_1+\ldots+P_n\,\delta Q_n)=\delta H;$$

on en conclut une équation semblable à l'équation (1), dans laquelle les lettres p, q sont remplacées par P, Q, et, par suite, on a les équations

$$\frac{dQ_i}{dt}=\frac{dH}{dP_i},\quad \frac{dP_i}{dt}=-\frac{dH}{dQ_i}.$$

Examinons maintenant comment nous satisferons à l'équation (3). Elle revient à $2n$ équations renfermées dans les deux suivantes :

$$(4)\qquad P_i=p_1\frac{dq_1}{dQ_i}+p_2\frac{dq_2}{dQ_i}+\ldots+p_n\frac{dq_n}{dQ_i},$$

$$(5)\qquad o=p_1\frac{dq_1}{dP_i}+p_2\frac{dq_2}{dP_i}+\ldots+p_n\frac{dq_n}{dP_i},$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2,\ldots, n$.

Des n équations (5) on conclut, en éliminant $p_1, p_2,\ldots, p_n$, que le déterminant

$$\sum\pm\frac{dq_1}{dP_1}\frac{dq_2}{dP_2}\cdots\frac{dq_n}{dP_n}$$

est nul, et, d'après un théorème bien connu, il en résulte qu'il existe entre les variables $q_1, q_2,\ldots, q_n$, qui sont fonctions des variables Q_i, P_i, une relation qui ne renferme pas $P_1, P_2,\ldots, P_n$; cette relation peut s'écrire

$$(6)\qquad \psi(q_1, q_2,\ldots, q_n,\quad Q_1, Q_2,\ldots, Q_n)=o,$$

ψ désignant une fonction arbitraire. En différentiant cette équation successivement par rapport à Q_i et à P_i, on a

$$(7)\qquad \begin{aligned}-\frac{d\psi}{dQ_i}&=\frac{d\psi}{dq_1}\frac{dq_1}{dQ_i}+\frac{d\psi}{dq_2}\frac{dq_2}{dQ_i}+\ldots+\frac{d\psi}{dq_n}\frac{dq_n}{dQ_i},\\ o&=\frac{d\psi}{dq_1}\frac{dq_1}{dP_i}+\frac{d\psi}{dq_2}\frac{dq_2}{dP_i}+\ldots+\frac{d\psi}{dq_n}\frac{dq_n}{dP_i}.\end{aligned}$$

En comparant les n équations renfermées dans cette dernière avec les n équations (5), on a

$$(8)\qquad \frac{d\psi}{dq_1} = \mu p_1,\quad \frac{d\psi}{dq_2} = \mu p_2,\ldots,\quad \frac{d\psi}{dq_n} = \mu p_n,$$

μ étant un facteur indéterminé, et, en comparant (4) avec (7), on a

$$P_i = -\frac{1}{\mu}\frac{d\psi}{dQ_i},$$

ou les n équations

$$(9)\qquad \frac{d\psi}{dQ_1} = -\mu P_1,\quad \frac{d\psi}{dQ_2} = -\mu P_2,\ldots,\quad \frac{d\psi}{dQ_n} = -\mu P_n.$$

Des équations (6) et (8), on peut tirer μ, $Q_1, Q_2,\ldots, Q_n$, puis des équations (9) tirer $P_1, P_2,\ldots, P_n$.

Un cas particulier de la solution précédente mérite d'être remarqué, c'est celui où l'on prend, comme dans le n° 1, pour les variables q_i des fonctions quelconques de $Q_1, Q_2,\ldots, Q_n$; alors les n équations (5) sont identiquement satisfaites, et les P_i sont déterminées par les n équations (4). Ce cas particulier a été donné par Jacobi (*Jacobi's Dynamik*, p. 453).

La résolution de l'équation (1) peut, comme on sait, être remplacée par celle d'une équation aux différences partielles, H étant une fonction de $q_1, q_2,\ldots, q_n, p_1, p_2,\ldots, p_n$,

$$H(p_1, p_2,\ldots, p_n, q_1, q_2,\ldots, q_n);$$

faisons-y

$$p_1 = \frac{dV}{dq_1},\quad p_2 = \frac{dV}{dq_2},\ldots;$$

il suffira de résoudre l'équation aux différences partielles

$$(10)\qquad H\left(\frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2},\ldots, q_1, q_2,\ldots\right) = h,$$

où h est une constante arbitraire, ou plutôt d'en trouver une solution complète. A la transformation de l'équation (1) correspond une transformation de l'équation (10), et la formule

$$P_1\,\delta Q_1 + P_2\,\delta Q_2 + \ldots = p_1\,\delta q_1 + p_2\,\delta q_2 + \ldots$$

montre que la fonction V est la même dans l'équation (10) et dans celle en laquelle elle se transforme.

6. Comparons la règle que je viens de donner, pour passer d'un système canonique à un système semblable avec celle qui a été donnée par Jacobi pour résoudre le même problème (*Dynamik*, p. 447). Voici cette règle :

« Supposons $2n$ variables q_i, p_i données par les équations hamiltoniennes

$$(a)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i},\quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i},$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$; soit, de plus,

$$\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$$

une fonction arbitraire des n variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et de n nouvelles variables $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$; déterminons $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, et d'autres P_1, $P_2, \ldots, P_n$ en fonction des premières variables au moyen des équations

$$(b)\qquad \frac{d\psi}{dq_1} = p_1,\qquad \frac{d\psi}{dq_2} = p_2, \ldots,\qquad \frac{d\psi}{dq_n} = p_n,$$

$$(c)\qquad \frac{d\psi}{dQ_1} = -P_1,\quad \frac{d\psi}{dQ_2} = -P_2, \ldots,\quad \frac{d\psi}{dQ_n} = -P_n;$$

les variables Q_i, P_i satisferont aux équations

$$(d)\qquad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{dH}{dP_i},\quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{dH}{dQ_i}. \text{ »}$$

On voit que la règle que j'ai donnée ci-dessus a une grande analogie avec celle de Jacobi ; les équations (8) et (9) sont identiques aux équations (b) et (c), si l'on y fait $\mu = 1$. La solution de Jacobi renferme l'inconnue μ en moins, et, par compensation, elle renferme une équation de moins, qui est

$$\psi = 0.$$

La règle de Jacobi peut se démontrer très-simplement comme il suit.

Le système des équations (a) peut être remplacé par la suivante :

$$(11)\qquad \delta\left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1 \delta q_1 + \ldots + p_n \delta q_n) = \delta H.$$

Or on a, d'après les équations (b),

$$\begin{aligned}
&\delta\left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1 \delta q_1 + \ldots + p_n \delta q_n)\\
&= \delta\left(\frac{d\psi}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{d\psi}{dq_n}\frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{d\psi}{dq_n}\delta q_n\right)\\
&= \delta\left(-\frac{d\psi}{dQ_1}\frac{dQ_1}{dt} - \ldots - \frac{d\psi}{dQ_n}\frac{dQ_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(-\frac{d\psi}{dQ_1}\delta Q_1 - \ldots - \frac{d\psi}{dQ_n}\delta Q_n\right);
\end{aligned}$$

car l'égalité des deux derniers membres revient à

$$\delta \frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt}\delta\psi.$$

En ayant égard aux équations (c), on voit donc que le premier membre de l'équation (11) est égal à l'expression

$$\delta\left(P_1 \frac{dQ_1}{dt} + \ldots + P_n \frac{dQ_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(P_1 \delta Q_1 + \ldots + P_n \delta Q_n),$$

qui est ainsi égal à δH, et l'on en conclut les équations (d).

7. On peut encore imaginer beaucoup d'autres moyens pour passer d'un système canonique à un autre semblable. Nous allons en indiquer quelques autres.

Le système des équations canoniques est renfermé dans une seule

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta H,$$

et celle-ci peut se mettre sous ces deux formes :

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt}+\ldots+p_n\frac{dq_n}{dt}\right)-\frac{d}{dt}(p_1\,\delta q_1+\ldots+p_n\,\delta q_n)=\delta\mathrm{H},$$
$$-\delta\left(q_1\frac{dp_1}{dt}+\ldots+q_n\frac{dp_n}{dt}\right)+\frac{d}{dt}(q_1\,\delta p_1+\ldots+q_n\,\delta p_n)=\delta\mathrm{H};$$

en les ajoutant, on a

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt}-q_1\frac{dp_1}{dt}+p_2\frac{dq_2}{dt}-q_2\frac{dp_2}{dt}+\ldots\right)$$
$$-\frac{d}{dt}(p_1\,\delta q_1-q_1\,\delta p_1+p_2\,\delta q_2-q_2\,\delta p_2+\ldots)=2\,\delta\mathrm{H}.$$

On en conclut aisément que les variables $Q_1, Q_2,\ldots, Q_n, P_1, P_2,\ldots, P_n$ satisferont à un système canonique semblable, si elles satisfont à l'équation

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{aligned}&P_1\,\delta Q_1-Q_1\,\delta P_1+\ldots+P_n\,\delta Q_n-Q_n\,\delta P_n\\&=p_1\,\delta q_1-q_1\,\delta p_1+\ldots+p_n\,\delta q_n-q_n\,\delta p_n,\end{aligned}$$

qui équivaut, comme on sait, à $2n$ équations.

Remarquons encore la transformation indiquée par l'équation

$$2(P_1\,\delta Q_1+\ldots+P_n\,\delta Q_n)=p_1\,\delta q_1-q_1\,\delta p_1+\ldots+p_n\,\delta q_n-q_n\,\delta p_n,$$

et celle qui en résulte par l'échange des grandes lettres avec les petites.

On voit, par ce qui précède, qu'il s'est glissé une inadvertance dans le *Traité de Dynamique*, de Jacobi, à la page 453, où il est dit qu'on vient de donner toutes les transformations possibles d'un système canonique dans un autre. Cette inadvertance s'explique d'ailleurs très-aisément dans une œuvre posthume.

Revenons sur la transformation renfermée dans la formule (A). Posons généralement

$$P_i=R_i\cos\Theta_i,\quad Q_i=R_i\sin\Theta_i,$$
$$p_i=r_i\cos\theta_i,\quad q_i=r_i\sin\theta_i,$$

i étant susceptible des valeurs 1, 2,..., n. La formule (A) deviendra

$$\text{(B)}\qquad R_1^2 d\Theta_1 + \ldots + R_n^2 d\Theta_n = r_1^2 d\theta_1 + \ldots + r_n^2 d\theta_n.$$

Si l'on prend pour les θ des fonctions déterminées des Θ, réciproquement les Θ pourront s'exprimer au moyen des θ et les R seront donnés par la formule

$$R_i^2 = r_1^2 \frac{d\theta_1}{d\Theta_i} + r_2^2 \frac{d\theta_2}{d\Theta_i} + \ldots + r_n^2 \frac{d\theta_n}{d\Theta_i}.$$

Plus généralement on pourrait raisonner sur l'équation (B), ainsi qu'on l'a fait, au n° 5, sur l'équation

$$P_1 \delta Q_1 + \ldots + P_n \delta Q_n = p_1 \delta q_1 + \ldots + p_n \delta q_n.$$

Transformation d'un certain système d'équations dans un système canonique.

8. Supposons encore que les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ satisfassent à l'équation

$$\text{(1)}\qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta H;$$

mais supposons en outre que ces variables soient liées par $2r$ équations conditionnelles

$$\text{(2)}\qquad f_1 = 0,\quad f_2 = 0, \ldots,\quad f_{2r} = 0.$$

Je vais démontrer que ces $2n$ variables peuvent être remplacées par un système de $2n - 2r$ variables $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-r}, P_1, P_2, \ldots, P_{n-r}$ qui satisfont aux $2n - 2r$ équations canoniques

$$\text{(3)}\qquad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{dH}{dP_i},\quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{dH}{dQ_i},$$

i étant susceptible des valeurs 1, 2,..., $n - r$.

Nous pouvons remarquer que ce théorème est déjà démontré au n° 1 de ce Mémoire dans le cas où les équations conditionnelles ne renferment que les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Mettons encore l'équation (1) sous cette forme.

$$\delta\left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1 \delta q_1 + \ldots + p_n \delta q_n) = \delta H;$$

si nous choisissons de nouvelles variables qui satisfassent à l'équation

$$(4) \qquad p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \ldots + p_n \delta q_n = P_1 \delta Q_1 + \ldots + P_{n-r} \delta Q_{n-r},$$

nous aurons

$$\delta\left(P_1 \frac{dQ_1}{dt} + \ldots + P_{n-r} \frac{dQ_{n-r}}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(P_1 \delta Q_1 + \ldots + P_{n-r} \delta Q_{n-r}) = \delta H,$$

et comme les variations $\delta Q_1, \delta Q_2, \ldots, \delta P_1, \delta P_2, \ldots$ seront indépendantes on en conclura les équations (3).

Montrons comment on pourra satisfaire à l'équation (4). En différentiant les équations (2) selon la caractéristique δ, on aura

$$\begin{aligned}
&\frac{df_1}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{df_1}{dq_{n-r}}\delta q_{n-r} + \frac{df_1}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_1}{dp_{n-r}}\delta p_{n-r} \\
&\quad = -\frac{df_1}{dq_{n-r+1}}\delta q_{n-r+1} - \ldots - \frac{df_1}{dq_n}\delta q_n - \frac{df_1}{dp_{n-r+1}}\delta p_{n-r+1} - \ldots - \frac{df_1}{dp_n}\delta p_n, \\
&\frac{df_2}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{df_2}{dq_{n-r}}\delta q_{n-r} + \frac{df_2}{dp_1}\delta p_1 + \ldots + \frac{df_2}{dp_{n-r}}\delta p_{n-r} \\
&\quad = -\frac{df_2}{dq_{n-r+1}}\delta q_{n-r+1} - \ldots - \frac{df_2}{dq_n}\delta q_n - \frac{df_2}{dp_{n-r+1}}\delta p_{n-r+1} - \ldots - \frac{df_2}{dp_n}\delta p_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

De ces $2r$ équations on peut tirer les $2r$ variations $\delta q_{n-r+1}, \ldots, \delta q_n$, $\delta p_{n-r+1}, \ldots, \delta p_n$, et en les portant dans l'équation (4) on aura une équation de cette forme

$$\begin{aligned}
&G_1 \delta q_1 + G_2 \delta q_2 + \ldots + G_{n-r} \delta q_{n-r} + L_1 \delta p_1 + L_2 \delta p_2 + \ldots + L_{n-r} \delta p_{n-r} \\
&\quad = P_1 \delta Q_1 + P_2 \delta Q_2 + \ldots + P_{n-r} \delta Q_{n-r},
\end{aligned}$$

$G_1, G_2, \ldots, L_1, L_2, \ldots$ pouvant, d'après les équations (2), être réduits à ne contenir que les variables $q_1, q_2, \ldots, q_{n-r}, p_1, p_2, \ldots, p_{n-r}$.

La question est donc ramenée à transformer l'expression différentielle du premier membre en une autre qui renferme moitié moins de différentielles des variables. Ce problème est connu sous le nom de *problème de Pfaff*, et l'on sait qu'il est toujours possible.

Il est utile de remarquer que le problème de Pfaff ne peut se résoudre que par des opérations de Calcul intégral d'une grande complication; nous montrerons plus loin comment on pourra éviter ce problème dans certains cas. D'ailleurs la seule possibilité de la réduction des équations (1) et (2) à un système canonique conduit à des conséquences importantes.

Sur des cas où la transformation du système d'équations du n° 8 en un système canonique peut s'effectuer facilement.

9. Nous avons vu que le système d'équations entre les variables q_i, p_i,

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta H, \tag{1}$$

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_r = 0, \tag{2}$$

$$f_{r+1} = 0, \quad f_{r+2} = 0, \quad \ldots, \quad f_{2r} = 0, \tag{3}$$

peut toujours se transformer en un système canonique à l'aide du problème de Pfaff. Nous allons examiner des cas où la transformation pourra s'effectuer sans aucune opération de Calcul intégral.

Supposons que, parmi les équations conditionnelles (2) et (3), les r premières ne renferment que les variables q_i. D'après les équations (2), on peut donc exprimer ces variables au moyen de $n-r$ variables seulement $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-r}$, en sorte que leurs expressions

$$q_1 = \varphi_1(Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-r}), \ldots, \quad q_n = \varphi_n(Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-r}) \tag{4}$$

satisfassent identiquement aux équations (2); et, en éliminant Q_1, $Q_2, \ldots, Q_{n-r}$ entre les équations (4), on trouverait un système de r équations équivalant aux équations (2). Les variables q_i ne sont exprimables au moyen des Q_i que par les formules (4), tandis que les Q_i sont fonctions des q_i d'une infinité de manières.

Mettons l'équation (1) sous cette forme

$$\delta\left(p_1\frac{dq_1}{dt}+\ldots+p_n\frac{dq_n}{dt}\right)-\frac{d}{dt}(p_1\delta q_1+\ldots+p_n\delta q_n)=\delta\mathrm{H},$$

et nous voyons qu'il suffira de déterminer des variables $P_1, P_2,..., P_{n-r}$ qui satisfassent à l'équation

$$(5)\qquad P_1\delta Q_1+\ldots+P_{n-r}\delta Q_{n-r}=p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\ldots+p_n\delta q_n.$$

Par hypothèse, les variables q_i ne dépendent pas des variables P; cette équation équivaut donc aux $n-r$ suivantes :

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} P_1\;\;=p_1\dfrac{dq_1}{dQ_1}+p_2\dfrac{dq_2}{dQ_1}+\ldots+p_n\dfrac{dq_n}{dQ_1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ P_{n-r}=p_1\dfrac{dq_1}{dQ_{n-r}}+p_2\dfrac{dq_2}{dQ_{n-r}}+\ldots+p_n\dfrac{dq_n}{dQ_{n-r}}.\end{array}\right.$$

En différentiant les équations (2), on a

$$\begin{array}{l}\dfrac{df_1}{dq_1}\delta q_1+\dfrac{df_1}{dq_2}\delta q_2+\ldots+\dfrac{df_1}{dq_n}\delta q_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \dfrac{df_r}{dq_1}\delta q_1+\dfrac{df_r}{dq_2}\delta q_2+\ldots+\dfrac{df_r}{dq_n}\delta q_n=0;\end{array}$$

multiplions ces équations par des fonctions inconnues $\mu_1, \mu_2, .., \mu_r$ et retranchons-les de l'équation (5), nous aurons, en égalant à zéro les coefficients des variations δq,

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} P_1\dfrac{dQ_1}{dq_1}+P_2\dfrac{dQ_2}{dq_1}+\ldots+P_{n-r}\dfrac{dQ_{n-r}}{dq_1}=p_1+\mu_1\dfrac{df_1}{dq_1}+\ldots+\mu_r\dfrac{df_r}{dq_1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ P_1\dfrac{dQ_1}{dq_n}+P_2\dfrac{dQ_2}{dq_n}+\ldots+P_{n-r}\dfrac{dQ_{n-r}}{dq_n}=p_n+\mu_1\dfrac{df_1}{dq_n}+\ldots+\mu_r\dfrac{df_r}{dq_n}.\end{array}\right.$$

Comme nous l'avons dit, les Q_i sont fonctions des q_i d'une infinité de manières, et l'on obtient l'une quelconque d'entre elles en formant

$n-r$ combinaisons des équations (4) et en résolvant les équations résultantes par rapport à $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-r}$; alors on aura à porter les expressions de ces dernières quantités dans les premiers membres des équations (7).

Les n équations (7) jointes aux r équations (3) permettent de tirer $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ en fonction des variables P_i et q_i et par suite en fonction des variables P_i, Q_i.

Il est évident que la méthode précédente sera applicable toutes les fois que l'on pourra combiner les équations conditionnelles données de manière à obtenir r équations distinctes qui ne renferment que le système des variables q_i ou celui des variables p_i, et ceci se présentera toutes les fois que le nombre des variables p_i ou celui des variables q_i qui entreront dans les équations conditionnelles (2) et (3) ne sera pas plus grand que r.

Remarquons encore que chaque variable q_i est conjuguée à une variable p_i, mais que les n variables q_i et les n variables p_i ne forment pas deux systèmes essentiellement distincts.

En effet posons

$$p_s = q'_s \quad \text{et} \quad q_s = -p'_s,$$

et l'équation (1) peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_{s-1}}{dt}\delta p_{s-1} + \frac{dq'_s}{dt}\delta p'_s + \frac{dq_{s+1}}{dt}\delta p_{s+1} + \ldots \\ -&\frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_{s-1}}{dt}\delta q_{s-1} - \frac{dp'_s}{dt}\delta q'_s - \frac{dp_{s+1}}{dt}\delta q_{s+1} - \ldots = \delta H; \end{aligned}$$

p_s prend ainsi la place de q_s, et $-q_s$ celle de p_s. Il suit de là que la méthode précédente est aussi applicable toutes les fois que l'on pourra combiner les équations conditionnelles données, de manière à obtenir un système de r équations distinctes, qui ne renferme pas plus d'une variable de chacun des n couples

$$q_1, p_1, \quad q_2, p_2, \quad q_3, p_3, \ldots.$$

10. Examinons le cas où il serait donné seulement r équations conditionnelles

$$f_1 = 0 \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_r = 0$$

ne renfermant que les variables q_i. En différentiant une quelconque d'entre elles, on aura

$$\frac{df_s}{dq_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{df_s}{dq_2}\frac{dq_2}{dt}+\ldots=0;$$

mais, dans le cas actuel, l'équation (1) donne

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{dH}{dp_1},\quad \frac{dq_2}{dt}=\frac{dH}{dp_2},\ldots;$$

on a donc

$$\frac{df_s}{dq_1}\frac{dH}{dp_1}+\frac{df_s}{dq_2}\frac{dH}{dp_2}+\ldots=0,$$

qu'on peut écrire plus simplement

$$[f_s, H]=0.$$

La théorie précédente peut donc encore être appliquée, pourvu qu'on y fasse

$$f_{r+1}=[f_1, H],\quad f_{r+2}=[f_2, H],\ldots,\quad f_{2r}=[f_r, H].$$

Au reste, ce cas se trouve traité au n° 1.

On pourrait faire une application de ce cas particulier à l'intéressant Mémoire de Bour *Sur les mouvements relatifs* (*Journal de M. Liouville*, t. VIII, 1863). En appliquant les formules (6), on obtient immédiatement, sous la forme canonique, les équations du mouvement relatif d'un système à liaisons quelconques, que Bour obtient par un calcul comparativement très-long, qui s'étend de la page 11 à la page 19 du tome cité.

Abaissement du nombre des équations conditionnelles.

11. Soit l'équation

$$(1)\qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1+\ldots+\frac{dq_n}{dt}\delta p_n-\frac{dp_1}{dt}\delta q_1-\ldots-\frac{dp_n}{dt}\delta q_n=\delta H,$$

et les $2r$ équations conditionnelles

$$(2)\qquad f_1=0,\quad f_2=0,\ldots,\quad f_{2r}=0.$$

Nous avons vu qu'on peut réduire ce système d'équations à un système canonique; on abaisse ainsi le nombre r à zéro et le nombre n à $n-r$. Mais il n'est pas sans intérêt d'examiner les cas où l'on pourra abaisser les nombres n et r d'un nombre d'unités moindre que r, sans effectuer aucune opération de Calcul intégral, car on s'approchera ainsi du système canonique.

Supposons que les équations (2) ne renferment que k des variables p_i que nous désignerons par $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et que k soit $< 2r$ et $> r$. (Si k était plus petit que r, on serait ramené à la question du nº **9**.)

Des équations (2), éliminons $p_1, p_2, \ldots, p_k$, il en résultera $2r-k$ équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \quad \varphi_{2r-k} = 0, \tag{3}$$

qui ne renfermeront que les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Prenons ensuite k des équations (2) qui soient distinctes des équations (3), et puissent par conséquent, avec ces dernières, remplacer les équations (2), et partageons-les en deux groupes, que nous disposons ainsi sur deux lignes :

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_{2r-k} = 0, \tag{4}$$

$$f_{2r-k+1} = 0, \ldots, \quad f_k = 0. \tag{5}$$

Au moyen des équations (3), nous pouvons exprimer les n variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ au moyen de $n - 2r + k$ variables seulement, que nous désignerons par $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-2r+k}$. Puis choisissons des variables $P_1, P_2, \ldots, P_{n-2r+k}$, de manière à avoir

$$P_1\,\delta Q_1 + \ldots + P_{n-2r+k}\,\delta Q_{n-2r+k} = p_1\,\delta q_1 + \ldots + p_n\,\delta q_n;$$

cette équation revient à celle-ci :

$$\left\{\begin{array}{l} P_1\left(\dfrac{dQ_1}{dq_1}\delta q_1 + \dfrac{dQ_1}{dq_2}\delta q_2 + \ldots + \dfrac{dQ_1}{dq_n}\delta q_n\right) + P_2\left(\dfrac{dQ_2}{dq_1}\delta q_1 + \ldots + \dfrac{dQ_2}{dq_n}\delta q_n\right) + \ldots \\ = p_1\,\delta q_1 + \ldots + p_n\,\delta q_n. \end{array}\right. \tag{6}$$

Les variables q_i s'expriment d'une manière unique au moyen des variables Q_i; les variables Q_i, au contraire, s'expriment au moyen des

q_i d'une infinité de manières. Imaginons une de ces manières, de sorte que les dérivées des Q_i, par rapport aux q_i, sont alors parfaitement déterminées.

Différentions les équations (3), puis multiplions-les par des coefficients indéterminés $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2r-k}$; enfin ajoutons-les à l'équation (6); nous en déduirons les n équations suivantes :

$$(7)\quad\left\{\begin{array}{l} P_1\dfrac{dQ_1}{dq_1}+P_2\dfrac{dQ_2}{dq_1}+\ldots+P_{n-2r+k}\dfrac{dQ_{n-2r+k}}{dq_1}=p_1+\mu_1\dfrac{d\varphi_1}{dq_1}+\ldots+\mu_{2r-k}\dfrac{d\varphi_{2r-k}}{dq_1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ P_1\dfrac{dQ_1}{dq_n}+P_2\dfrac{dQ_2}{dq_n}+\ldots+P_{n-2r+k}\dfrac{dQ_{n-2r+k}}{dq_n}=p_n+\mu_1\dfrac{d\varphi_1}{dq_n}+\ldots+\mu_{2r-k}\dfrac{d\varphi_{2r-k}}{dq_n}. \end{array}\right.$$

Réunissons les n équations (7) aux équations (4), et nous aurons $n+2r-k$ équations pour déterminer les $n+2r-k$ variables p_1, $p_2, \ldots, p_n$ et $\mu_1, \mu_2, \ldots$ en fonction des P_i et q_i; par suite, on pourra déterminer les variables p_i en fonction des P_i et Q_i.

Substituons les valeurs des q_i et p_i en fonction des Q_i, P_i dans les $2(k-r)$ équations (5), et nous aurons ainsi $2(k-r)$ équations conditionnelles entre les Q_i, P_i, avec l'équation

$$\frac{dQ_1}{dt}\delta P_1+\ldots+\frac{dQ_{n-2r+k}}{dt}\delta P_{n-2r+k}-\frac{dP_1}{dt}\delta Q_1-\ldots-\frac{dP_{n-2r+k}}{dt}\delta Q_{n-2r+k}=\delta H;$$

nous avons donc abaissé les nombres n et r des équations (1) et (2) de ces $2r-k$ unités.

On doit remarquer que, si $2r$ est plus grand que n ou égal à n, la méthode précédente sera toujours applicable en y faisant $k=n$; car on pourra alors toujours éliminer les n variables p entre les équations (2). Le nombre $n-2r+k$ devient $2(n-r)$; ainsi le nombre n de l'équation (1) sera abaissé à $2(n-r)$, et le nombre des équations conditionnelles se réduira au même nombre.

Introduction des dérivées principales de H *dans le système des équations précédemment étudiées.*

12. Imaginons une fonction quelconque φ des variables $q_1, q_2, \ldots$, $q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, et supposons que ces variables satisfassent à $2r$

équations

$$(1)\qquad f_1 = 0,\quad f_2 = 0, \ldots,\quad f_{2r} = 0.$$

En différentiant l'expression de φ, nous aurons

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dq_1} dq_1 + \frac{d\varphi}{dq_2} dq_2 + \ldots + \frac{d\varphi}{dq_n} dq_n + \frac{d\varphi}{dp_1} dp_1 + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_n} dp_n,$$

et, en différentiant les équations (1), nous aurons

$$0 = \frac{df_1}{dq_1} dq_1 + \frac{df_1}{dq_2} dq_2 + \ldots + \frac{df_1}{dq_n} dq_n + \frac{df_1}{dp_1} dp_1 + \ldots + \frac{df_1}{dp_n} dp_n,$$
$$0 = \frac{df_2}{dq_1} dq_1 + \frac{df_2}{dq_2} dq_2 + \ldots + \frac{df_2}{dq_n} dq_n + \frac{df_2}{dp_1} dp_1 + \ldots + \frac{df_2}{dp_n} dp_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multiplions ces équations respectivement par des fonctions des mêmes variables que nous désignerons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et ajoutons-les à l'expression de $d\varphi$; nous obtiendrons ainsi $d\varphi$ sous une autre forme dépendante des fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Les coefficients de $dq_1, dq_2, \ldots, dp_1, dp_2, \ldots$, forment un groupe de dérivées *virtuelles* de la fonction φ. Représentons-les ainsi :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dq_1}\right) &= \frac{d\varphi}{dq_1} + \lambda_1 \frac{df_1}{dq_1} + \lambda_2 \frac{df_2}{dq_1} + \ldots + \lambda_{2r} \frac{df_{2r}}{dq_1},\\ \left(\frac{d\varphi}{dq_2}\right) &= \frac{d\varphi}{dq_2} + \lambda_1 \frac{df_1}{dq_2} + \lambda_2 \frac{df_2}{dq_2} + \ldots + \lambda_{2r} \frac{df_{2r}}{dq_2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dp_1}\right) &= \frac{d\varphi}{dp_1} + \lambda_1 \frac{df_1}{dp_1} + \lambda_2 \frac{df_2}{dp_1} + \ldots + \lambda_{2r} \frac{df_{2r}}{dp_1},\\ \left(\frac{d\varphi}{dp_2}\right) &= \frac{d\varphi}{dp_2} + \lambda_1 \frac{df_1}{dp_2} + \lambda_2 \frac{df_2}{dp_2} + \ldots + \lambda_{2r} \frac{df_{2r}}{dp_2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Suivant la notation habituelle, posons, u et v étant deux fonctions quelconques des variables,

$$\begin{aligned}[u, v] = {} & \frac{du}{dq_1}\frac{dv}{dp_1} + \frac{du}{dq_2}\frac{dv}{dp_2} + \ldots + \frac{du}{dq_n}\frac{dv}{dp_n}\\ & - \frac{du}{dp_1}\frac{dv}{dq_1} - \frac{du}{dp_2}\frac{dv}{dq_2} - \ldots - \frac{du}{dp_n}\frac{dv}{dq_n}.\end{aligned}$$

Alors, si nous multiplions les équations (2) respectivement par $\frac{df_i}{dp_1}$, $\frac{df_i}{dp_2},\ldots$, et les équations (3) par $\frac{df_i}{dq_1}$, $\frac{df_i}{dq_2},\ldots$, et que nous retranchions la somme des secondes de celle des premières, nous aurons

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d\varphi}{dq_1}\right)\frac{df_i}{dp_1}+\left(\frac{d\varphi}{dq_2}\right)\frac{df_i}{dp^2}+\ldots+\left(\frac{d\varphi}{dq_n}\right)\frac{df_i}{dp_n}\\ -&\left(\frac{d\varphi}{dp_1}\right)\frac{df_i}{dq_1}-\left(\frac{d\varphi}{dp_2}\right)\frac{df_i}{dq_2}-\ldots-\left(\frac{d\varphi}{dp_n}\right)\frac{df_i}{dq_n}\\ &=[\varphi, f_i]+[f_1,f_i]\lambda_1+[f_2,f_i]\lambda_2+\ldots+[f_{2r},f_i]\lambda_{2r},\end{aligned}$$

et, comme i est susceptible des valeurs $1, 2,\ldots, 2r$, cette équation en renferme $2r$ distinctes. Adoptons maintenant, pour les fonctions λ_1, $\lambda_2,\ldots$, celles qui annulent le second membre de l'équation précédente, et qui sont, par suite, les solutions de ces $2r$ équations,

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{l}\quad * \qquad\qquad [f_2,f_1]\lambda_2+[f_3,f_1]\lambda_3+\ldots+[f_{2r},f_1]\lambda_{2r}=[f_1,\varphi],\\ [f_1,f_2]\lambda_1 \qquad * \qquad +[f_3,f_2]\lambda_3+\ldots+[f_{2r},f_2]\lambda_{2r}=[f_2,\varphi],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [f_1,f_{2r}]\lambda_1+[f_2,f_{2r}]\lambda_2+[f_3,f_{2r}]\lambda_3+\ldots+ \quad * \quad =[f_{2r},\varphi].\end{array}\right.$$

Les dérivées virtuelles de φ satisfont donc aux $2r$ équations renfermées dans la suivante :

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{df_i}{dp_1}\left(\frac{d\varphi}{dq_1}\right)+\frac{df_i}{dp_2}\left(\frac{d\varphi}{dq_2}\right)+\ldots+\frac{df_i}{dp_n}\left(\frac{d\varphi}{dq_n}\right)\\ -&\frac{df_i}{dq_1}\left(\frac{d\varphi}{dp_1}\right)-\frac{df_i}{dq_2}\left(\frac{d\varphi}{dp_2}\right)-\ldots-\frac{df_i}{dq_n}\left(\frac{d\varphi}{dp_n}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2,\ldots, 2r$.

Quand les quantités λ ont les valeurs déterminées par les équations (4), nous donnons aux dérivées virtuelles de φ le nom de *dérivées principales*, et nous désignerons de plus l'expression

$$\varphi'=\varphi+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_{2r} f_{2r}$$

sous le nom de *forme principale* de la fonction φ. D'après l'équation (5), on voit que la forme principale de φ satisfait aux $2r$ équations

$$[f_1, \varphi'] = 0, \quad [f_2, \varphi'] = 0, \ldots, \quad [f_{2r}, \varphi'] = 0.$$

Si le nombre des équations (1) était impair, le déterminant des équations (4) serait nul, et ces équations incompatibles. C'est pour cette raison que nous avons supposé ce nombre pair.

13. Revenons à l'équation

$$(1) \qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta q_n = \delta \mathrm{H},$$

H étant une fonction des variables q_i, p_i que nous supposons liées par $2r$ équations conditionnelles

$$(2) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_{2r} = 0.$$

En introduisant des multiplicateurs indéterminés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2r}$, on déduit des équations (1) et (2)

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dp_1} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dp_1} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dp_1} + \ldots + \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dp_1}, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dp_2} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dp_2} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dp_2} + \ldots + \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dp_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}\right.$$

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{dp_1}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dq_1} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dq_1} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dq_1} + \ldots + \lambda_{2r} \dfrac{df_{2n}}{dq_1}, \\ -\dfrac{dp_2}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dq_2} + \lambda_1 \dfrac{df_1}{dq_2} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{dq_2} + \ldots + \lambda_{2r} \dfrac{df_{2r}}{dq_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si l'on différentie une des équations (2) $f_i = 0$, on a

$$\frac{df_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{df_i}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{df_i}{dp_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{df_i}{dp_2}\frac{dp_2}{dt} + \ldots = 0;$$

et, en remplaçant les dérivées des q_i, p_i, d'après les équations (3) et (4), on a

$$[f_i, \mathrm{H}] + \lambda_1 [f_i, f_1] + \lambda_2 [f_i, f_2] + \ldots = 0;$$

on en conclut que les multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ satisfont aux $2r$ équations suivantes :

$$\begin{array}{l} \quad * \qquad [f_2, f_1]\lambda_2 + [f_3, f_1]\lambda_3 + \ldots + [f_{2r}, f_1)\lambda_{2r} = [f_1, \mathrm{H}], \\ [f_1, f_2]\lambda_1 \quad * \qquad + [f_3, f_2]\lambda_3 + \ldots + [f_{2r}, f_2]\lambda_{2r} = [f_2, \mathrm{H}], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Or il résulte de ces équations que les seconds membres des équations (3) et (4) sont les dérivées principales de la fonction H, et, en les représentant au moyen des dérivées immédiates placées entre parenthèses, on a, au lieu des équations (3) et (4),

$$\begin{array}{l} \dfrac{dq_1}{dt} = \left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_1}\right), \quad \dfrac{dq_2}{dt} = \left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_2}\right), \ldots, \quad \dfrac{dq_n}{dt} = \left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_n}\right), \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dq_1}\right), \quad \dfrac{dp_2}{dt} = -\left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dq_2}\right), \ldots, \quad \dfrac{dp_n}{dt} = -\left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dq_n}\right). \end{array}$$

Théorème sur la variation des constantes arbitraires.

14. Considérons les $2n$ équations

$$\dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dp_i}, \quad \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{dq_i}, \tag{1}$$

dans lesquelles H est une fonction quelconque des q_i, p_i et de t et i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$. Ces équations renferment celles de la Dynamique, mais elles sont plus générales; car, dans la Mécanique, H est assujetti à être la somme de deux fonctions, dont l'une ne renferme que les variables q_i et le temps t, et dont l'autre est homogène et du second degré par rapport aux variables p_i.

Supposons que l'on ait obtenu les valeurs des q_i, p_i qui dépendront de $2n$ constantes arbitraires et de t. Adoptons la caractéristique D pour désigner les accroissements des quantités q_i, p_i et de la fonction H quand ces constantes subissent de certaines variations.

Multiplions les équations (1) par $\mathrm{D}p_i$ et $-\mathrm{D}q_i$, ajoutons-les et sommons par rapport à i; nous aurons l'équation

$$(2)\qquad \sum_i (dq_i \mathrm{D}p_i - dp_i \mathrm{D}q_i) = \mathrm{DH}dt,$$

qui est entièrement analogue à l'équation (1) du numéro précédent.

Désignons par Δ une caractéristique qui se rapporte à d'autres variations des constantes arbitraires, et différentions l'équation précédente selon Δ; nous aurons

$$\sum_i (d\Delta q_i \mathrm{D}p_i + dq_i \Delta \mathrm{D}p_i - d\Delta p_i \mathrm{D}q_i - dp_i \Delta \mathrm{D}q_i) = \Delta \mathrm{DH}dt.$$

Nous obtiendrons une équation également vraie, si nous permutons les caractéristiques D et Δ

$$\sum_i (d\mathrm{D}q_i \Delta p_i + dq_i \mathrm{D}\Delta p_i - d\mathrm{D}p_i \Delta q_i - dp_i \mathrm{D}\Delta q_i) = \mathrm{D}\Delta \mathrm{H}dt.$$

Retranchons ces deux équations l'une de l'autre, en remarquant que les deux signes $\mathrm{D}\Delta$ et $\Delta\mathrm{D}$ sont équivalents, et nous obtenons

$$\sum_i d(\Delta q_i \mathrm{D}p_i - \mathrm{D}q_i \Delta p_i) = 0;$$

nous en concluons que

$$(3)\qquad \sum_i (\Delta q_i \mathrm{D}p_i - \mathrm{D}q_i \Delta p_i)$$

est indépendant du temps. C'est l'important théorème donné par Lagrange (*Mécanique analytique*, section V, § 1).

Si les variations selon Δ se rapportent à l'accroissement $\Delta\alpha$ d'une seule constante α et les variations selon D à l'accroissement $\mathrm{D}\beta$ d'une autre constante β, le théorème de Lagrange exprime que la formule

$$\sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha}\frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dq_i}{d\beta}\frac{dp_i}{d\alpha}\right)$$

est indépendante du temps.

On peut généraliser le théorème précédent en supposant que les q_i, p_i satisfont à l'équation

$$(4)\qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1+\ldots+\frac{dq_n}{dt}\delta p_n-\frac{dp_1}{dt}\delta q_1-\ldots-\frac{dp_n}{dt}\delta q_n=\delta \mathrm{H},$$

et que les variables q_i satisfont à des équations conditionnelles : alors le système de ces équations se rencontre aussi en Mécanique; mais, pour généraliser encore davantage, supposons des équations conditionnelles qui renferment non-seulement les variables q_i, mais encore les variables p_i

$$f_1=0,\quad f_2=0,\ldots,\quad f_{2r}=0.$$

D'après ce que nous avons vu au n° **13**, nous serons conduits aux équations

$$\frac{dq_i}{dt}=\left(\frac{d\mathrm{H}}{dp_i}\right),\quad \frac{dp_i}{dt}=-\left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_i}\right),$$

dont les seconds membres représentent les dérivées principales de la fonction H. Si l'on remarque que l'on a

$$\left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_1}\right)\mathrm{D}q_1+\ldots+\left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_n}\right)\mathrm{D}q_n+\left(\frac{d\mathrm{H}}{dp_1}\right)\mathrm{D}p_1+\ldots+\left(\frac{d\mathrm{H}}{dp_n}\right)\mathrm{D}p_n=\mathrm{DH},$$

on obtiendra encore l'équation (2) et, en suivant exactement la méthode exposée ci-dessus, on trouvera aussi que l'expression (3) est indépendante de t.

Sur la théorie des perturbations.

15. Supposons encore que les $2n$ variables q_i, p_i satisfassent à l'équation (4) et aux $2r$ équations conditionnelles

$$(1)\qquad f_1=0,\quad f_2=0,\ldots,\quad f_{2r}=0;$$

on en conclut les $2n$ équations

$$(2)\qquad \frac{dq_i}{dt}=\left(\frac{d\mathrm{H}}{dp_i}\right),\quad \frac{dp_i}{dt}=-\left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_i}\right).$$

Les valeurs des q_i, p_i en fonction de t ne doivent contenir que $2(n-r)$ constantes arbitraires; représentons-les par

$$(3)\qquad \begin{cases} q_i = \varphi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2(n-r)}), \\ p_i = \psi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2(n-r)}). \end{cases}$$

Imaginons ensuite que H subisse un accroissement Ω et qu'on adopte encore pour formes des solutions les expressions (3), mais alors en considérant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ comme des fonctions de t; on aura

$$\frac{dq_i}{dt} + \frac{dq_i}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{dq_i}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dt} + \ldots = \left(\frac{dH}{dp_i}\right) + \left(\frac{d\Omega}{dp_i}\right),$$

$$\frac{dp_i}{dt} + \frac{dp_i}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{dp_i}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dt} + \ldots = -\left(\frac{dH}{dq_i}\right) - \left(\frac{d\Omega}{dq_i}\right).$$

Retranchons les équations (2) des précédentes, et il en résulte

$$\frac{dq_i}{d\alpha_1}d\alpha_1 + \frac{dq_i}{d\alpha_2}d\alpha_2 + \ldots = \left(\frac{d\Omega}{dp_i}\right)dt,$$

$$\frac{dp_i}{d\alpha_1}d\alpha_1 + \frac{dp_i}{d\alpha_2}d\alpha_2 + \ldots = -\left(\frac{d\Omega}{dq_i}\right)dt.$$

Multiplions ces équations par $-\delta p_i$, δq_i, et sommons par rapport à i; nous aurons

$$(4)\qquad \delta\Omega = \sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha_1}\delta p_i - \frac{dp_i}{d\alpha_1}\delta q_i\right)\frac{d\alpha_1}{dt} + \sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha_2}\delta p_i - \frac{dp_i}{d\alpha_2}\delta q_i\right)\frac{d\alpha_2}{dt} + \ldots.$$

Comme les quantités α n'ont été supposées qu'en nombre égal à $2(n-r)$, elles ne sont liées par aucune équation conditionnelle; si donc on désigne par β une quelconque des quantités α, on aura

$$\frac{d\Omega}{d\beta} = \sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha_1}\frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dp_i}{d\alpha_1}\frac{dq_i}{d\beta}\right)\frac{d\alpha_1}{dt} + \sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha_2}\frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dp_i}{d\alpha_2}\frac{dq_i}{d\beta}\right)\frac{d\alpha_2}{dt} + \ldots$$

Si l'on pose généralement

$$\sum_i \left(\frac{dq_i}{d\alpha}\frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dp_i}{d\alpha}\frac{dq_i}{d\beta}\right) = (\alpha, \beta),$$

cette formule deviendra

$$\frac{d\Omega}{d\beta} = (\alpha_1, \beta)\frac{d\alpha_1}{dt} + (\alpha_2, \beta)\frac{d\alpha_2}{dt} + \ldots,$$

ou

$$(5) \qquad \frac{d\Omega}{d\beta} = \sum_{s=1}^{s=2(n-r)} (\alpha_s, \beta)\frac{d\alpha_s}{dt}.$$

D'après ce que nous avons vu (nº **14**), les quantités (α_s, β) sont indépendantes de t. Si l'on suppose $r = 0$, cette équation devient la formule de perturbation de Lagrange; on voit donc que cette formule subsiste sans modifications par l'introduction des équations conditionnelles (1).

Si les fonctions α peuvent se partager en deux groupes de $n - r$ quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-r}$, qui satisfont aux équations

$$(6) \qquad (\alpha_i, \alpha_k) = 0, \quad (\beta_i, \beta_k) = 0, \quad (\alpha_i, \beta_k) = 0, \quad (\alpha_i, \beta_i) = 1,$$

où i et k sont deux nombres différents, les $2(n - r)$ équations renfermées dans l'équation (5) deviennent

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{d\Omega}{d\beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\alpha_i}.$$

16. Supposons ensuite que l'on intègre les $2n$ équations

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_i}\right),$$

séparément des équations conditionnelles; alors les q_i, p_i ne renfermeront plus seulement $2(n - r)$ constantes arbitraires comme précédemment, mais elles s'exprimeront au moyen de t et de $2n$ constantes. Toutefois, le nombre des constantes arbitraires du problème doit se réduire à $2(n - r)$; on obtiendra les $2r$ relations qui lient les constantes trouvées en portant les expressions des q_i, p_i dans les équations (1); d'où l'on conclut que t doit s'y éliminer de lui-même.

Ainsi, au lieu des équations (3), nous devrons écrire

$$q_i = \varphi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}),$$
$$p_i = \psi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ étant liés par $2r$ équations conditionnelles.

Ce problème conduira encore à l'équation (4), que nous pouvons mettre sous cette forme

$$\delta\Omega = \sum_\alpha (\alpha, \alpha_1) \frac{d\alpha}{dt} \delta\alpha_1 + \sum_\alpha (\alpha, \alpha_2) \frac{d\alpha}{dt} \delta\alpha_2 + .\ . + \sum_\alpha (\alpha, \alpha_{2n}) \frac{d\alpha}{dt} \delta\alpha_{2n},$$

où le signe $\sum$ s'étend à toutes les valeurs de α, qui sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$.

Dans le cas particulier où les fonctions α peuvent être partagées en deux groupes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, qui satisfont aux équations (6), on a

$$\begin{aligned}\delta\Omega = &- \frac{d\beta_1}{dt} \delta\alpha_1 - \frac{d\beta_2}{dt} \delta\alpha_2 - \ldots - \frac{d\beta_n}{dt} \delta\alpha_n \\ &+ \frac{d\alpha_1}{dt} \delta\beta_1 + \frac{d\alpha_2}{dt} \delta\beta_2 + \ldots + \frac{d\alpha_n}{dt} \delta\beta_n,\end{aligned}$$

et cette équation équivaut, comme on sait, aux équations

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \left(\frac{d\Omega}{d\beta_i}\right), \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\left(\frac{d\Omega}{d\alpha_i}\right),$$

les dérivées principales de Ω par rapport aux quantités α et β étant prises d'après les $2r$ équations conditionnelles qui lient ces quantités.

17. Poisson a donné des formules de perturbation résolues par rapport aux dérivées des éléments troublés, dans le cas où les équations conditionnelles disparaissent; ces formules fournissent par conséquent la résolution des équations (5), par rapport aux dérivées des quantités α, lorsque r est nul. Mais ces formules cessent tout à fait d'être applicables, lorsqu'on suppose, entre les variables du problème, des équations conditionnelles; nous allons chercher les formules par lesquelles on les doit remplacer.

Supposons encore entre les $2n$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2 \ldots p_n$ les $2r$ équations finies

$$(7) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_{2r} = 0,$$

et les équations différentielles

$$(8) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_i}\right),$$

dans lesquelles i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n$ et H peut renfermer t, outre les variables q_i, p_i.

Concevons que l'on ait intégré ces équations et que l'on ait trouvé pour intégrales les $2n - 2r$ équations

$$(9) \quad \begin{cases} \beta_1 = \psi_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t), \\ \beta_2 = \psi_2(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_{2(n-r)} = \psi_{2(n-r)}(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t), \end{cases}$$

dans lesquelles $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2(n-r)}$ désignent des constantes arbitraires qui n'entrent pas dans les seconds membres.

Dans la Mécanique, si la fonction de forces ne dépend pas de t, H en est aussi indépendant, et alors on peut supposer que t ne se présente que dans une des équations (9), et additivement à la constante qui y entre.

Imaginons ensuite que l'on ait à résoudre le même problème dans lequel la fonction H est seulement remplacée par $\mathrm{H} + \Omega$, de sorte que Ω est la fonction perturbatrice, et Ω est en général une très-petite quantité. Les équations (7) subsistent encore, mais les équations (8) sont remplacées par

$$(10) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{d(\mathrm{H}+\Omega)}{dp_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{d(\mathrm{H}+\Omega)}{dq_i}\right).$$

Alors les fonctions des q_i, p_i qui forment les seconds membres des équations (9) n'ont plus des valeurs constantes; mais leurs dérivées sont en général de très-petites quantités qu'il s'agit de déterminer.

Ces fonctions, que nous désignerons par la lettre β, sont définies par les équations (9), et ces équations, jointes aux $2r$ équations (7), pourraient servir à exprimer les $2n$ variables q_i, p_i, au moyen des quantités β et de t, et d'une seule manière.

Désignons par $\alpha = \psi$ une intégrale du problème *sans perturbations*, c'est-à-dire une des équations (9), dans laquelle α est la constante arbitraire. En différentiant cette équation, on a

$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\psi}{dq_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{d\psi}{dp_i}\left(\frac{dp_i}{dt}\right)\right] + \frac{d\psi}{dt},$$

et le dernier terme est nul, si t ne se présente pas explicitement dans ψ; en ayant égard aux équations (8), on obtient

$$(11)\qquad 0=\sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{d\psi}{dq_i}\left(\frac{dH}{dp_i}\right)-\frac{d\psi}{dp_i}\left(\frac{dH}{dq_i}\right)\right]+\frac{d\psi}{dt}.$$

Passons ensuite au problème *avec perturbations*, nous devrons alors regarder, dans l'équation $\alpha=\psi$, α comme une fonction de t, et, en la différentiant, nous aurons

$$\frac{d\alpha}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\psi}{dq_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{d\psi}{dp_i}\frac{dp_i}{dt}\right)+\frac{d\psi}{dt},$$

les dérivées des variables $q_i\ p_i$ étant fournies par les équations (10), et il en résulte

$$(12)\qquad \frac{d\alpha}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\frac{d\psi}{dq_i}\left(\frac{d(H+\Omega)}{dp_i}\right)-\frac{d\psi}{dp_i}\left(\frac{d(H+\Omega)}{dq_i}\right)\right\}+\frac{d\psi}{dt}.$$

Retranchons les deux dernières équations l'une de l'autre, et, dans le résultat, mettons la lettre α au lieu de ψ, ce qui ne pourra plus maintenant entraîner de confusion, et nous avons

$$\frac{d\alpha}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{d\alpha}{dq_i}\left(\frac{d\Omega}{dp_i}\right)-\frac{d\alpha}{dp_i}\left(\frac{d\Omega}{dq_i}\right)\right].$$

La fonction Ω peut s'exprimer au moyen des quantités β et de t, et d'une seule manière, et, d'après une propriété démontrée dans mon Mémoire sur les dérivées principales (*Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 164), les dérivées principales de Ω par rapport aux variables $q_i\ p_i$ sont données par les formules

$$\left(\frac{d\Omega}{dq_i}\right)=\sum_\beta\frac{d\Omega}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right),\qquad \left(\frac{d\Omega}{dp_i}\right)=\sum_\beta\frac{d\Omega}{d\beta}\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right);$$

on a donc

$$\frac{d\alpha}{dt}=\sum_\beta\frac{d\Omega}{d\beta}\sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{d\alpha}{dq_i}\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right)-\frac{d\alpha}{dp_i}\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right)\right].$$

On a d'ailleurs

$$\left(\frac{d\beta}{dq_i}\right) = \frac{d\beta}{dq_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dq_i} + \mu_2(\beta)\frac{df_2}{dq_i} + \ldots + \mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dq_i},$$
$$\left(\frac{d\beta}{dp_i}\right) = \frac{d\beta}{dp_i} + \mu_1(\beta)\frac{df_1}{dp_i} + \mu_2(\beta)\frac{df_2}{dp_i} + \ldots + \mu_{2r}(\beta)\frac{df_{2r}}{dp_i},$$

en prenant pour $\mu_1(\beta)$, $\mu_2(\beta)$,... les quantités qui satisfont aux $2r$ équations

$$\begin{array}{l} + [f_2,f_1]\mu_2(\beta) + [f_3,f_1]\mu_3(\beta) + \ldots + [f_{2r},f_1]\mu_{2r}(\beta) = [f_1,\beta], \\ [f_1,f_2]\mu_1(\beta) + + [f_3,f_2]\mu_3(\beta) + \ldots + [f_{2r},f_2]\mu_{2r}(\beta) = [f_2,\beta], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

En remplaçant les dérivées principales des quantités β par les expressions ci-dessus, on a enfin

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_\beta \frac{d\Omega}{d\beta}\{[\alpha,\beta] + \mu_1(\beta)[\alpha,f_1] + \mu_2(\beta)[\alpha,f_2] + \ldots + \mu_{2r}(\beta)[\alpha,f_{2r}]\},$$

qui est la formule cherchée.

Cette dernière formule peut être considérée comme provenant de la résolution des équations (5) par rapport aux dérivées des éléments troublés; donc, puisque les quantités (α_s, β) sont indépendantes du temps t, il en est de même de l'expression

$$[\alpha,\beta] + \mu_1(\beta)[\alpha,f_1] + \mu_2(\beta)[\alpha,f_2] + \ldots.$$

La formule de perturbation que je viens de donner est évidemment exacte, quelles que soient les limites dans lesquelles Ω puisse varier; mais si Ω reste toujours très-petit ainsi que ses dérivées, les quantités $\frac{d\alpha}{dt}$ seront elles-mêmes très-petites, les quantités α varieront très-peu, et l'on aura une valeur approchée d'une des quantités α par une quadrature, en regardant le coefficient de $\frac{d\Omega}{d\beta}$ comme constant, et en ne regardant comme variable, dans Ω qui est fonction des α et de t, que la quantité t.

Théorème relatif à l'intégration d'un système d'équations précédemment considéré.

18. Supposons entre les $2n$ variables q_i, p_i l'équation

$$(a)\qquad \frac{dq_1}{dt}\delta p_1+\ldots+\frac{dq_n}{dt}\delta p_n-\frac{dp_1}{dt}\delta q_1-\ldots-\frac{dp_n}{dt}\delta q_n=\delta \mathrm{H},$$

et les équations conditionnelles

$$(b)\qquad f_1=0,\quad f_2=0,\ldots,\quad f_{2r}=0.$$

Nous avons démontré (nº **8**) qu'on peut remplacer les $2n$ variables q_i, p_i par $2n-2r$ variables $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2,\ldots, \mathrm{Q}_{n-r}$, $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2,\ldots, \mathrm{P}_{n-r}$ indépendantes entre elles, et qui satisfont aux $2n-2r$ équations différentielles canoniques renfermées dans les deux équations

$$(1)\qquad \frac{d\mathrm{Q}_i}{dt}=\frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{P}_i},\quad \frac{d\mathrm{P}_i}{dt}=-\frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{Q}_i},$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2,\ldots, n-r$.

La quantité $[\alpha, \beta]$ est formée avec les dérivées de α et β par rapport aux variables q_i, p_i; formons une quantité qui se compose de la même manière, au moyen des dérivées de α et β par rapport aux variables Q_i, P_i, et posons

$$\begin{aligned}[\alpha, \beta]'=&\frac{d\alpha}{d\mathrm{Q}_1}\frac{d\beta}{d\mathrm{P}_1}+\frac{d\alpha}{d\mathrm{Q}_2}\frac{d\beta}{d\mathrm{P}_2}+\ldots+\frac{d\alpha}{d\mathrm{Q}_{n-r}}\frac{d\beta}{d\mathrm{P}_{n-r}}\\ &-\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}_1}\frac{d\beta}{d\mathrm{Q}_1}-\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}_2}\frac{d\beta}{d\mathrm{Q}_2}-\ldots-\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}_{n-r}}\frac{d\beta}{d\mathrm{Q}_{n-r}}.\end{aligned}$$

Comme il n'existe pas d'équations conditionnelles entre les variables Q_i, P_i, la formule de perturbation du numéro précédent par l'emploi de ces variables se change en la suivante :

$$(2)\qquad \frac{d\alpha}{dt}=\sum_\beta \frac{d\Omega}{d\beta}[\alpha, \beta]'.$$

Les coefficients des dérivées de Ω doivent être les mêmes dans les deux formules, et l'on en conclut

$$(3)\quad [\alpha, \beta]' = [\alpha, \beta] + \mu_1(\beta)[\alpha, f_1] + \mu_2(\beta)[\alpha, f_2] + \ldots + \mu_{2r}(\beta)[\alpha, f_{2r}].$$

D'après le célèbre théorème de Poisson, si

$$\alpha = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}$$

sont deux intégrales du système d'équations canoniques (1), alors la formule

$$(4)\qquad [\alpha, \beta]' = \text{const.}$$

est également une intégrale de ces équations, à moins que le premier membre ne soit identiquement constant.

Ce théorème provient d'ailleurs de ce que, dans la formule (2), les coefficients des dérivées de Ω sont indépendants de t, ainsi qu'on en a fait la remarque à la fin du n° **17**.

Si des variables Q_i, P_i on revient aux variables q_i, p_i, on obtient le théorème suivant :

Théorème. — *Supposons que*

$$\alpha = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}$$

soient deux intégrales du système des équations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_{2r} = 0,$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_1}\right), \quad \frac{dq_2}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_2}\right), \ldots, \quad \frac{dq_n}{dt} = \left(\frac{dH}{dp_n}\right),$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_1}\right), \quad \frac{dp_2}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_2}\right), \ldots, \quad \frac{dp_n}{dt} = -\left(\frac{dH}{dq_n}\right),$$

alors l'équation

$$[\alpha, \beta] + \mu_1(\beta)[\alpha, f_1] + \ldots + \mu_{2r}(\beta)[\alpha, f_{2r}] = \text{const.}$$

sera aussi une intégrale de ce système d'équations, à moins que le premier membre ne soit identiquement constant.

Ce qui augmente l'importance de ce théorème, c'est que le passage des variables q_i, p_i aux variables Q_i, P_i ne peut se faire que par des opérations très-difficiles du Calcul intégral, de sorte qu'il ne serait pas commode d'appliquer la formule (4).

Le théorème précédent n'est qu'un corollaire de la formule (3); j'ai déjà fait remarquer ailleurs que la formule (3) avait été donnée par Jacobi dans le cas où les équations conditionnelles ne renferment que les variables q_i, et alors cette formule prend une forme toute différente et plus compliquée. Dans ce cas, en effet, en désignant, comme au n° **10**, par

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_r = 0$$

les équations de condition données, il faut faire, dans la formule (3),

$$f_{r+1} = [f_1, \mathrm{H}], \quad f_{r+2} = [f_2, \mathrm{H}], \ldots, \quad f_{2r} = [f_r, \mathrm{H}].$$

Il convient aussi de faire observer que la formule que Jacobi a démontrée s'appuie sur une transformation particulière des variables q_i, p_i en les variables Q_i, P_i, ce qui l'oblige à donner deux pages entières à l'énoncé de son problème (*Nova Methodus*, § 38, *OEuvres*, t. III). Dans mon théorème, au contraire, la transformation des q_i, p_i en les Q_i, P_i se faisant dans un système canonique quelconque, son énoncé est très-simple. On pourrait encore faire remarquer que la transformation, adoptée par Jacobi, des variables q_i, p_i dans les variables Q_i, P_i, n'est pas applicable à l'équation

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \ldots + \frac{dq_n}{dt}\delta p_n - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \ldots - \frac{dp_n}{dt}\delta p_n = \delta \mathrm{H}$$

prise dans toute sa généralité; elle s'appuie essentiellement sur la forme particulière qu'elle prend dans la Dynamique, où H se compose de la somme d'une fonction $-\mathrm{U}$ qui ne renferme que les variables q_i, et d'une fonction T des p_i, q_i, qui est homogène et du second degré par rapport aux variables p_i. Toutefois on peut reconnaître que, par les considérations du § 49 du Mémoire de Jacobi, on peut s'affranchir de cette dernière restriction.

On voit, d'après ces réflexions, en combien de manières la formule (3) est généralisée, de sorte que je crois pouvoir dire que le théorème renfermé dans cette formule était entièrement nouveau, lorsque je l'ai énoncé pour la première fois (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1873, t. LXVI, p. 1193).

Propriétés de l'expression $[\alpha, \beta]$.

19. Nous avons vu dans le n° **18** que les $2n$ variables q_i, p_i, qui satisfont aux équations (a) et (b), peuvent être remplacées par $2(n-r)$ variables Q_i, P_i fonctions des premières, et qui satisfont à un système de $2(n-r)$ équations différentielles canoniques, et que, en posant

$$[\alpha, \beta]' = \sum_{i=1}^{i=n-r} \left(\frac{d\alpha}{dQ_i} \frac{d\beta}{dP_i} - \frac{d\alpha}{dP_i} \frac{d\beta}{dQ_i} \right),$$

on a la formule

$$(1) \qquad [\alpha, \beta]' = [\alpha, \beta] + \mu_1(\beta)[\alpha, f_1] + \ldots + \mu_{2r}(\beta)[\alpha, f_{2r}].$$

Il importe de démontrer que, dans cette formule, α et β peuvent être considérés comme deux fonctions quelconques des variables Q_i, P_i ou q_i, p_i; en sorte que cette formule servira à remplacer l'expression $[\alpha, \beta]'$, où α et β sont deux fonctions quelconques des variables Q_i, P_i par une autre expression qui ne renferme que les variables q_i, p_i.

En effet, dans la théorie exposée ci-dessus,

$$(2) \qquad \alpha = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}$$

étaient deux intégrales du système canonique renfermé dans les équations

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{dH}{dP_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{dH}{dQ_i},$$

où i est susceptible des valeurs $1, 2, \ldots, n-r$. On a donc, en différentiant les équations (2),

$$(3)\qquad [\alpha, \mathrm{H}]' + \frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad [\beta, \mathrm{H}]' + \frac{d\beta}{dt} = 0.$$

Ainsi la théorie précédente suppose qu'on peut trouver une fonction H qui satisfasse à ces deux équations; ce qui limite les fonctions qu'on peut prendre pour α et β. Mais imaginons que l'on ait obtenu la formule qui donne l'expression $[\alpha, \beta]'$ au moyen des variables q_i, p_i, lorsque α et β sont deux fonctions quelconques. Les variables q_i, p_i sont des fonctions des variables Q_i, P_i qui ne dépendent pas de la fonction H, ni de t, ainsi qu'on peut s'en assurer par le n° **8**; pareillement, la formule considérée qui donne $[\alpha, \beta]'$ est indépendante de H. Si donc on suppose ensuite que, dans cette formule, α et β satisfassent aux équations (3), il ne s'ensuivra aucune réduction; donc, réciproquement, la formule (1) trouvée, dans la supposition que les équations (3) sont satisfaites, peut être étendue à deux fonctions quelconques.

20. Au lieu de la fonction donnée pour α, mettons dans la formule (1) l'expression

$$(\alpha) = \alpha + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_{2r} f_{2r},$$

en choisissant pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ les multiplicateurs qui donnent à α sa forme principale. D'après ce que nous avons vu au n° **12**, on a

$$[(\alpha), f_1] = 0, \quad [(\alpha), f_2] = 0, \quad [(\alpha), f_{2r}] = 0.$$

Donc tous les termes qui suivent le premier dans le second membre de la formule (1) s'annulent, et l'on a

$$(4)\qquad [\alpha, \beta]' = [\alpha + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_{2r} f_{2r}, \beta].$$

Il est évident que je n'ai pas à mettre (α) au lieu de α dans le premier membre; car α, dans ce premier membre, est exprimé au moyen des variables Q_i, P_i, ce qui ne peut avoir lieu que d'une seule manière.

De même, si β a sa forme principale, on a

$$\mu_1(\beta) = 0, \quad \mu_2(\beta) = 0, \ldots, \quad \mu_{2r}(\beta) = 0,$$

et l'on conclut encore de la formule (1)

$$[\alpha, \beta]' = [\alpha, (\beta)]$$

ou

$$(5) \qquad [\alpha, \beta]' = [\alpha, \beta + \mu_1(\beta) f_1 + \mu_2(\beta) f_2 + \ldots + \mu_{2r}(\beta) f_{2r}] .$$

Cette dernière formule se vérifie très-aisément; car, en la développant, on obtient

$$\begin{aligned}[\alpha, \beta]' = [\alpha, \beta] + \mu_1(\beta)[\alpha, f_1] + \mu_2(\beta)[\alpha, f_2] + \ldots \\ + [\alpha, \mu_1(\beta)] f_1 + [\alpha, \mu_2(\beta)] f_2 + \ldots,\end{aligned}$$

et comme $f_1, f_2, \ldots$ sont nuls, on retrouve l'équation (1).

Aux formules (4) et (5) on peut évidemment ajouter cette autre

$$[\alpha, \beta]' = [(\alpha), (\beta)] = [\alpha + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots, \quad \beta + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots],$$

et cette dernière revient encore à la suivante, qui est formée au moyen des dérivées principales de α et de β,

$$\begin{aligned}[\alpha, \beta]' = \left(\frac{d\alpha}{dq_1}\right)\left(\frac{d\beta}{dp_1}\right) + \left(\frac{d\alpha}{dq_2}\right)\left(\frac{d\beta}{dp_2}\right) + \ldots \\ - \left(\frac{d\alpha}{dp_1}\right)\left(\frac{d\beta}{dq_1}\right) - \left(\frac{d\alpha}{dp_2}\right)\left(\frac{d\beta}{dq_2}\right) - \ldots.\end{aligned}$$

Les formules (4) et (5) montrent que l'on peut modifier les formes des fonctions α et β, d'après les équations conditionnelles, de manière à rendre l'expression $[\alpha, \beta]$ indépendante du choix des variables q_i, p_i. On peut voir, d'après mon Mémoire sur les dérivées principales, qu'il existe, pour les expressions de α et β, d'autres formes qui conduisent également à ce but. Toutefois, je considère les précédentes formules comme les plus simples et les plus curieuses.

21. Dans le n° **15**, nous avons trouvé la formule de perturbation

$$\frac{d\Omega}{d\beta} = \sum_{s=1}^{s=2(n-r)} (\alpha_s, \beta) \frac{d\alpha_s}{dt},$$

en posant

$$(6) \qquad (\alpha_s, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{dq_i}{d\alpha} \frac{dp_i}{d\beta} - \frac{dp_i}{d\alpha} \frac{dq_i}{d\beta} \right).$$

Si l'on suppose que les variables q_i, p_i soient transformées en les variables Q_i, P_i, le coefficient de $\frac{d\alpha_s}{dt}$ est généralement remplacé dans cette formule par

$$(7) \qquad (\alpha_s, \beta)' = \sum_{i=1}^{i=(n-r)} \left(\frac{dQ_i}{d\alpha} \frac{dP_i}{d\beta} - \frac{dP_i}{d\alpha} \frac{dQ_i}{d\beta} \right).$$

On en conclut que les deux dernières expressions sont égales, et qu'on a

$$(\alpha_s, \beta)' = (\alpha_s, \beta).$$

Je terminerai en démontrant cette formule, où n'entrent que les variables q_i, p_i, supposées assujetties à des équations conditionnelles :

$$\begin{aligned} &[\alpha_i, \alpha_1]'(\alpha_1, \alpha_k) + [\alpha_i, \alpha_2]'(\alpha_2, \alpha_k) + \ldots + [\alpha_i, \alpha_{2(n-r)}]'(\alpha_{2(n-r)}, \alpha_k) \\ &= 0 \text{ si } i \text{ est différent de } k, \\ &= -1 \text{ si } i = k, \end{aligned}$$

les premiers facteurs des termes du premier membre étant donnés par la formule

$$(8) \qquad [\alpha_i, \alpha_s]' = \sum_{u=1}^{u=n} \left[\left(\frac{d\alpha_i}{dq_u} \right) \left(\frac{d\alpha_s}{dp_u} \right) - \left(\frac{d\alpha_i}{dp_u} \right) \left(\frac{d\alpha_s}{dq_u} \right) \right],$$

et les seconds facteurs étant formés d'après la formule (6).

En effet, d'après une formule connue, on a, en exprimant les $2(n-r)$ fonctions α, au moyen des variables Q_i, P_i,

$$[\alpha_i, \alpha_1]'(\alpha_1, \alpha_k)' + [\alpha_i, \alpha_2]'(\alpha_2, \alpha_k)' + \ldots + [\alpha_i, \alpha_{2(n-r)}]'(\alpha_{2(n-r)}, \alpha_k)'$$
$$= 0 \text{ si } i \text{ est différent de } k,$$
$$= -1 \text{ si } i = k,$$

en posant

$$(9) \qquad [\alpha_i, \alpha_s]' = \sum_{u=1}^{u=n} \left(\frac{d\alpha_i}{dQ_u} \frac{d\alpha_s}{dP_u} - \frac{d\alpha_i}{dP_u} \frac{d\alpha_s}{dQ_u} \right),$$

et $(\alpha_s, \alpha_k)'$ étant formé d'après la formule (7).

Or on a

$$(\alpha_s, \alpha_k)' = (\alpha_s, \alpha_k),$$

et les deux expressions (8) et (9) sont équivalentes. On en conclut la formule à démontrer.