JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CHARLES BRISSE

Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable (suite)

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 1 (1875), p. 141-180.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__141_0>

Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable (suite);

Par M. Charles BRISSE,
Répétiteur à l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

V. Déplacement d'une figure sphérique sur la sphère. — Déplacement d'un corps solide retenu par un point fixe.

59. « *Quand une figure sphérique éprouve un déplacement fini quelconque sur la sphère, il existe toujours deux points de la figure, diamétralement opposés, qui se retrouvent, après le déplacement, dans leur position primitive, comme si la figure eût simplement tourné autour du diamètre qui joint ces points.* »

Il n'y a qu'à reproduire la démonstration du premier Mémoire en substituant aux droites des arcs de grand cercle.

60. « En d'autres termes :

» *Quand un corps retenu par un point fixe éprouve un déplacement fini quelconque, il existe toujours une certaine droite passant par le point fixe, qui après le déplacement se retrouve dans sa position primitive, comme si le corps avait éprouvé une simple rotation autour de cette droite restée fixe.*

» On peut encore dire que :

» *Quand deux corps égaux, placés d'une manière quelconque dans l'espace, ont un point commun* (*c'est-à-dire un point qui, considéré comme appartenant à l'un des deux corps, soit lui-même son homologue dans l'autre*), *ils ont une infinité d'autres points communs situés tous sur une même droite.* »

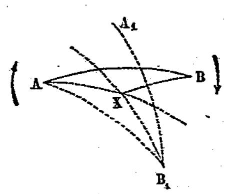
Composition de deux rotations d'un corps autour de deux axes qui se rencontrent.

61. « *Quand un corps retenu par un point fixe* O *éprouve deux rotations successives autour de deux axes* OA, OB, *dont le second est déplacé par la première rotation, l'axe* OX *de la rotation résultante (autour duquel il eût suffi de faire tourner le corps pour l'amener dans sa nouvelle position) fait avec* OA *et* OB *un angle trièdre tel, que des deux angles dièdres qui ont ces droites pour arêtes, le premier est égal à la demi-rotation autour de* OA, *et le second à la demi-rotation autour de* OB *prise en sens contraire.*

» *Quant à la rotation résultante (autour de* OX*), elle est égale au double du supplément de l'angle dièdre qui a* OX *pour arête dans l'angle trièdre.* »

Considérons une sphère de centre O et de rayon quelconque; soient A et B (*fig.* 27) les extrémités des axes. Par une première ro-

Fig. 27.



tation 2α, B vient en B_1; par une seconde rotation 2β de même sens, A vient en A_1, de sorte qu'en définitive AB est venu en A_1B_1. On aura l'axe de la rotation résultante OX, d'après ce qui a été dit, en menant deux arcs de grand cercle, l'un perpendiculaire à AA_1, l'autre à BB_1, qui seront tous deux bissecteurs des angles respectifs : la rotation totale a pour valeur BXB_1, elle est le double du supplément de AXB; BAX est égal à α et ABX à β en tournant en sens contraire.

62. « *Appelons* A, B, X *les trois angles dièdres; on a, entre ces* *angles et l'angle plan des deux axes* OA, OB,

$$\cos X = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos(OA, OB).$$

Par conséquent, en appelant Ω *et* ω *les rotations autour de* OA *et* OB, *et* (Ω, ω) *l'angle de ces deux axes,*

$$\cos X = -\cos\tfrac{1}{2}\Omega \cos\tfrac{1}{2}\omega + \sin\tfrac{1}{2}\Omega \sin\tfrac{1}{2}\omega \cos(\Omega, \omega). \text{ »}$$

C'est la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique appliquée au triangle sphérique ABX.

« *Soit* U *la rotation résultante* (*autour de l'axe* X); *on a, comme il vient d'être dit,*

$$U = 2(180^\circ - X), \quad \text{ou} \quad X = 180^\circ - \tfrac{1}{2}U, \quad \cos X = -\cos\tfrac{1}{2}U.$$

Par suite,

$$\cos\tfrac{1}{2}U = \cos\tfrac{1}{2}\Omega \cos\tfrac{1}{2}\omega - \sin\tfrac{1}{2}\Omega \sin\tfrac{1}{2}\omega \cos(\Omega, \omega).$$

Telle est l'expression de la rotation résultante de deux rotations successives Ω, ω.

» *Si, dans le triangle sphérique* AXB, *on abaisse du sommet* X *sur le côté opposé* AB *un arc perpendiculaire* p, *on a, comme on sait,*

$$\sin X \sin p = \sin A \sin B \sin AB,$$

ou

$$\sin\tfrac{1}{2}U \sin p = \sin\tfrac{1}{2}\Omega \sin\tfrac{1}{2}\omega \sin(\Omega, \omega). \text{ »}$$

Le triangle rectangle ainsi formé nous donne

$$\sin p = \sin A \sin AX,$$

et la proportion des sinus appliquée au triangle ABX

$$\sin AX = \sin B \frac{\sin AB}{\sin X},$$

d'où résulte la formule indiquée.

VI. Déplacement d'un corps solide libre dans l'espace.

63. « *Quand deux corps égaux* V, V′ *sont placés d'une manière quelconque dans l'espace, par chaque point de l'un on peut mener une droite telle, que son homologue dans l'autre corps lui est parallèle et dirigée dans le même sens; toutes les droites ainsi menées sont parallèles entre elles.* »

On sait qu'on peut amener V en V′ par un mouvement hélicoïdal autour d'un certain axe XX′. Soient a et a' deux points correspondants; par ces deux points menons des parallèles à XX′, nous aurons les droites dont il est question.

64. « Il suit de là que :

» *Tout déplacement d'un corps solide dans l'espace peut s'effectuer d'une infinité de manières, au moyen d'une translation suivie d'une rotation autour d'une droite fixe.*

» *La translation est égale et parallèle au déplacement effectif d'un point du corps pris arbitrairement.*

65. » *Quand deux corps égaux sont placés d'une manière quelconque dans l'espace, il existe toujours une droite qui, considérée comme appartenant au premier corps, coïncide en direction avec son homologue dans le second corps.*

» Nous appellerons cette droite *axe central commun* aux deux corps.

66. » L'existence de cette droite forme la propriété la plus importante dans la théorie du déplacement d'un corps solide; elle donne lieu immédiatement à cette conséquence :

» *Tout déplacement d'un corps solide dans l'espace peut s'effectuer par une rotation autour d'une droite qui glisse sur elle-même.*

» Ce mouvement est semblable à celui d'une vis dans son écrou; par conséquent on peut dire que :

» *Tout déplacement d'un corps dans l'espace peut s'effectuer au moyen d'une vis à laquelle le corps serait fixé.*

» Nous verrons plus loin comment on détermine la position de l'axe et le pas de la vis, quand les positions que doivent prendre trois points du corps sont données.

» Lorsque nous considérerons deux corps égaux, au point de vue du déplacement de l'un d'eux, nous appellerons leur axe central commun *axe central de rotation.*

67. » *Les plans menés par l'axe central et par deux points homologues quelconques de deux corps égaux font entre eux un angle de grandeur constante et toujours dans le même sens de rotation;*

» *Et la projection orthogonale de la corde qui joint deux points homologues quelconques des deux corps, sur l'axe central, est de grandeur constante.*

» Cette projection, que nous désignerons par E, est la quantité de glissement de l'axe central sur lui-même; et l'angle constant formé autour de cet axe, que nous désignerons par U, exprime la rotation du corps autour de l'axe central.

68. » Si l'on considère dans deux corps égaux V, V' deux droites homologues L, L', on pourra, au moyen d'une rotation autour d'une certaine droite fixe λ, amener la droite L sur L', de manière que les points homologues des deux droites coïncident (47); et ensuite, par une rotation autour de L', faire coïncider les deux corps. Donc :

» *Tout déplacement d'un corps dans l'espace peut s'effectuer, d'une infinité de manières, au moyen de deux rotations successives autour de deux droites.*

» L'une de ces droites peut être prise arbitrairement; nous verrons plus loin comment l'autre se détermine, et comment on détermine aussi la grandeur des rotations à effectuer autour des deux droites. »

Des cordes qui joignent deux à deux les points homologues de deux corps égaux.

69. « *Si la corde* AA', *qui joint deux points homologues* A, A' *des deux corps* V, V', *est considérée comme appartenant à l'un des deux* *corps, son homologue dans l'autre corps est aussi une corde, et ces deux droites se rencontrent.*

» Réciproquement, *quand deux droites homologues se rencontrent, chacune d'elles est une corde.* »

Considérons AA′ comme appartenant au premier corps; l'homologue de A dans le second corps est A′, l'homologue de A′ est A″; la droite homologue de AA′ est A′A″ : c'est une corde, car A″ est dans le second corps l'homologue A′ du premier, et ces deux droites se rencontrent puisqu'elles ont A′ commun.

Soit A′ le point de rencontre de deux droites homologues L et L′; A′ considéré comme appartenant au second corps a pour homologue un point A du premier corps situé sur L; A′ considéré comme appartenant au premier corps a pour homologue un point A″ situé sur L′ : donc L et L′ sont des cordes.

70. « *La droite d'intersection de deux plans homologues* P, P′ *est toujours une corde.*

» Réciproquement, *par une corde on peut toujours mener deux plans homologues, et deux seulement.* »

Considérons D′, intersection des deux plans, comme appartenant au second corps : elle a pour homologue une droite D située sur P; soit a le point de rencontre de D et D′; a considéré comme appartenant au premier corps a pour homologue un point a' du second corps situé sur D′ : donc D′ est une corde.

Soit une corde D′, je la considère comme appartenant au second corps : elle a pour homologue dans le premier une droite D qui la rencontre (**69**); je la considère comme appartenant au premier : elle a pour homologue dans le second une droite D″ qui la rencontre : les plans DD′, D′D″ sont donc homologues, et ce sont les seuls.

71. « *Quand deux droites homologues se rencontrent, et sont par conséquent deux cordes* (**69**), *leur droite milieu est aussi une corde.* »

Soient A, A′, A″ les trois points que l'on connaît déjà; AA′ et A′A″ sont homologues; la droite milieu passe par le milieu de AA′ et de A′A″; mais ces milieux sont homologues : donc la droite milieu est une corde.

72. « *Quand deux cordes* AA′, BB′ *se rencontrent, les droites* AB, A′B′ *sont aussi des cordes.* »

De ce que AA′, BB′ se rencontrent, il résulte que AB et A′B′ se rencontrent aussi; mais ce sont des droites homologues : donc (**69**) ce sont des cordes.

73. « *Quand la droite d'intersection de deux plans homologues* P, P′ *rencontre la droite d'intersection de deux autres plans homologues* Q, Q′, *la droite d'intersection des deux plans* P, Q *et celle des deux plans* P′, Q′ *sont deux cordes.* »

La droite d'intersection des deux plans P, Q et celle des deux plans P′, Q′ sont deux droites homologues. La droite d'intersection des plans P, P′ et la droite d'intersection des plans Q, Q′ sont dans un même plan. La droite d'intersection des deux plans P, Q rencontre celle des deux plans P, P′, puisqu'elles sont toutes deux dans le plan P; elle rencontre aussi celles des plans Q, Q′ : elle est donc dans leur plan; on en dirait autant de l'intersection de P′, Q′ : donc nos droites homologues se rencontrent, donc (**69**) ce sont deux cordes.

74. « *Quand les cordes qui joignent deux à deux des points homologues de deux corps sont situées dans un même plan, elles enveloppent une parabole; et les points des deux corps auxquels appartiennent ces cordes sont situés sur deux droites tangentes à cette courbe.* »

Soient A, B, C, A′, B′, C′ des points des deux corps satisfaisant à la question; si A, B et C ne sont pas en ligne droite, ils déterminent un plan. Soit P ce plan, il a pour homologue le plan P′ des points A′, B′, C′, et, d'après l'énoncé, ces deux plans coïncident. Soit I le point de rencontre avec l'axe central, j'amène le premier corps sur le second par une rotation suivie d'une translation : dans la rotation I reste fixe, dans la translation il se déplace; donc P et P′ ne peuvent pas coïncider; donc les points dont il est question ne peuvent être qu'en ligne droite.

La droite des points A, B, C et celle des points A′, B′, C′ sont dans un même plan, elles sont d'ailleurs homologues : donc (**6**) les cordes qui joignent leurs points homologues enveloppent une parabole tangente aux droites ABC, A′B′C′.

On a vu que par une corde on peut toujours mener deux plans homologues et deux seulement : nous pourrons donc dire que, si l'on prend des plans du premier corps qui rencontrent leurs homologues du second suivant des droites situées dans un plan donné, toutes ces droites envelopperont une parabole.

75. « *Quand les cordes qui joignent deux à deux des points homologues des deux corps passent par un même point, ces cordes sont les arêtes d'un cône du second ordre; et les points des deux corps sont situés sur deux courbes à double courbure du troisième ordre.*

» *Toute droite menée par deux points de l'une de ces courbes est une corde.* »

J'ai démontré ce théorème dans mon premier Mémoire.

Soient M le point; A et B deux points de la première courbe du troisième ordre, A′ et B′ leurs homologues sur la seconde; AA′ et BB′ se rencontrent en M : donc AB et A′B′ se rencontrent; mais ce sont des droites homologues : donc ce sont des cordes.

Direction et grandeur d'une corde dont le point milieu est donné.

76. « Nous appellerons *corde relative* à un point la corde qui a ce point pour milieu.

» *La corde relative à un point est normale à la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe central.* »

Soient A et A′ deux points homologues, et a leur point milieu, AA′ est une corde du cylindre qui a pour axe l'axe central : donc le théorème est démontré.

77. « *Soit a le point milieu d'une corde AA′, on a, quant à la direction de cette corde, en appelant X l'axe central et r la distance du point a à cet axe,*

$$\operatorname{tang}(a\mathrm{A}, \mathrm{X}) = \frac{r \operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{U}}{\frac{1}{2}\mathrm{E}};$$

et, quant à la grandeur de la corde,

$$\overline{a\mathrm{A}}^2 = r^2 \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\mathrm{U} + \tfrac{1}{4}\mathrm{E}^2. \text{ »}$$

La *fig.* 28 donne

$$\operatorname{tang}(a\mathrm{A}, \mathrm{X}) = \frac{\mathrm{A}'\alpha}{\frac{1}{2}\mathrm{E}} = \frac{r \operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{U}}{\frac{1}{2}\mathrm{E}},$$

et

$$\overline{a\mathrm{A}}^2 = r^2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{U} + \tfrac{1}{4}\mathrm{E}^2.$$

78. « Connaissant trois cordes quelconques AA′, BB′ et CC′, on détermine la corde relative à un point m, ainsi :

» *Soient a, b, c les milieux des trois cordes; on mène par ces points les plans normaux aux cordes respectives. Les traces des deux premiers*

Fig. 28.

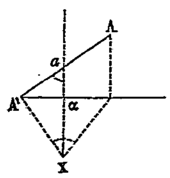
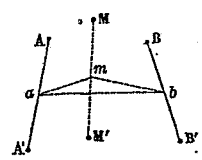


Fig. 29.



sur le plan mab se rencontrent en un point i par lequel passera le plan normal à la corde cherchée mené par son milieu m (**49**). *On détermine de même sur le plan mac un point i′ par lequel passera le même plan normal. Ce plan est donc déterminé, et, par suite, la corde cherchée* MM′ *l'est aussi, du moins en direction.*

» *Pour déterminer les deux points homologues* M, M′ *sur cette droite, on la considère comme appartenant au premier corps, et l'on cherche son homologue dans le second corps; celle-ci rencontrera la corde en son point* M′ *qui appartient au second corps; et, prenant sur la corde* $m\mathrm{M} = m\mathrm{M}'$, *on a le point* M *du premier corps.*

» Autrement : *Les projections orthogonales de la demi-corde m*M *sur les droites ma et mb sont égales à celles des demi-cordes a*A, *b*B *sur ces mêmes droites, respectivement* (**46**, 3°). *D'où s'ensuit la détermination du point* M. »

Il suffit de regarder la *fig.* 29.

Propriétés relatives à deux droites homologues.

79. « *Deux droites homologues sont également éloignées de l'axe central, et font des angles égaux avec cet axe.* »

Soient L et L′ ces deux droites; j'amène L sur L′ par une rotation autour de l'axe central, qui n'altère ni l'angle ni la distance, et par une translation qui n'altère rien non plus : donc le théorème est démontré.

80. « *Par un point de l'espace on peut toujours mener deux droites homologues* D, D′. *Chacune de ces droites est une corde.*

» *La droite* D *appartenant à la première figure est la droite qui joint le point donné, considéré comme appartenant à la seconde figure, à son homologue dans la première figure; et la droite* D′ *de la seconde figure est celle qui joint le point donné, considéré comme appartenant à la première figure, à son homologue dans la deuxième figure.*

81. » *Si, par chaque point d'une droite* L, *on mène les deux droites homologues* D, D′ *qui se rencontrent en ce point, les droites* D *du premier corps forment un paraboloïde hyperbolique qui passe par la droite* L, *et par la droite qui correspond dans le premier corps à cette droite* L *considérée comme appartenant au second corps.* »

Soit a' le point où D rencontre L; a' considéré comme appartenant au second corps a pour homologue a du premier corps situé sur D et sur L_1 homologue de L dans le premier corps : donc la surface engendrée par D contient L_1; mais (**46**, 1°) les cordes, telles que aa', sont parallèles à un même plan : donc la surface est un paraboloïde hyperbolique.

« *Pareillement les droites* D′ *du second corps forment un paraboloïde qui passe par la droite* L *et par la droite qui correspond dans le second corps à cette droite* L *considérée comme appartenant au premier corps.*

» Cas particulier. — *Si la droite* L *est l'intersection de deux plans homologues, les deux droites homologues qu'on peut mener par chaque point de cette droite sont situées dans les deux plans, respectivement;*

et les deux paraboloïdes deviennent des paraboles situées dans ces deux plans (**74**). »

82. « *Si, par chaque point d'une droite quelconque* L, *on mène les deux droites homologues qui passent par ce point, lesquelles déterminent un plan :*

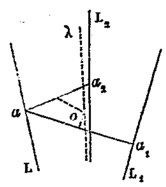
» 1° *Tous les plans ainsi déterminés enveloppent une développable du quatrième ordre ;*

» 2° *Par un point quelconque on peut mener trois plans tangents à cette surface ;*

» 3° *Chacun de ces plans coupe la surface suivant une parabole.* »

Considérons L (*fig.* 30) comme appartenant à la seconde figure, elle aura pour homologue dans la première L_1, et, considérée comme

Fig. 30.



appartenant à la première, elle aura pour homologue dans la seconde L_2. Soient a, a_1, a_2 trois points correspondants; le paraboloïde de LL_2 n'est autre que le paraboloïde de LL_1, qui a tourné d'un certain angle autour de λ (**46**, 4°); la droite aa_2 est l'intersection de deux plans homologues.

On sait par les propriétés des surfaces du second ordre que les plans, tels que a_1aa_2, enveloppent une développable du quatrième degré, à laquelle on ne peut mener que trois plans tangents par un point, et que chacun de ces plans la coupe suivant une parabole.

83. « Cas particulier. — Si la droite L est l'intersection de deux plans homologues, le théorème prend cet énoncé :

» *Si, par chaque point de la droite d'intersection* L *de deux plans homologues, on mène deux droites homologues, lesquelles sont situées dans* *ces plans, respectivement* (**81**), *et enveloppent deux paraboles tangentes à la droite* L, *le plan de deux droites enveloppe une développable du quatrième ordre.* »

Voir les nos **55** et **56**.

84. « *Par chacune des cordes qui joignent les points homologues de deux droites homologues* L, L′ *passent deux plans homologues :*

» 1° *Ces plans enveloppent deux développables du quatrième ordre;*

» 2° *La droite d'intersection de deux de ces plans, appartenant à un même corps, est une corde.* »

Voir le no **82**.

85. « *Si, autour de deux droites homologues* L, L′, *on fait tourner deux plans homologues, leur droite d'intersection engendre un hyperboloïde.* »

En effet, les deux faisceaux de plans sont homographiques, L et L′ sont deux génératrices de l'autre système.

« Cas particulier. — *Si les deux droites homologues* L, L′ *se rencontrent, la droite d'intersection des deux plans homologues décrit un cône du second ordre.*

86. » *Quand deux plans homologues doivent avoir leur droite d'intersection sur un plan fixe :*

» 1° *Cette droite enveloppe une parabole;*

» 2° *Les deux plans enveloppent deux développables du quatrième ordre.* »

On a vu (**70**) que la droite d'intersection de deux plans homologues est une corde, (**74**) que les cordes situées dans un plan enveloppent une parabole.

Si l'on suppose (**82**) que L et L_2 tournent jusqu'à être dans un même plan, aa_2 devient la droite dont il est ici question, et les deux plans enveloppent deux développables du quatrième ordre.

87. « *Il existe toujours dans un plan quelconque* Q *deux droites homologues* D, D′. *Chacune de ces droites est une corde.*

» *La droite* D *appartenant à la première figure est l'intersection du* *plan* Q, *considéré comme appartenant à la seconde figure, par son homologue dans la première figure; et la droite* D' *de la seconde figure est l'intersection du même plan* Q, *considéré comme appartenant à la première figure, par son homologue dans la seconde figure.* »

Ces deux droites homologues se rencontrent : donc (**69**) chacune d'elles est une corde.

88. « *Quand plusieurs plans passent par une même droite* L, *il existe dans chacun d'eux un système de deux droites homologues* D, D' *appartenant respectivement aux deux corps :*

» 1° *Les droites* D *du premier corps forment un hyperboloïde, et les droites* D' *du second corps un second hyperboloïde;*

» 2° *Les deux droites homologues* D, D' *contenues dans chaque plan se rencontrent en un point; et le lieu de tous ces points est une courbe à double courbure du troisième ordre;*

» 3° *Par une droite quelconque on peut mener quatre plans tangents à cette courbe, de sorte que la développable dont cette courbe est l'arête de rebroussement est du quatrième ordre.* »

Soit P un plan passant par L; soient L_1 la position correspondant à L dans la première figure, et P_1 la position correspondant à P; P_1 passe par L_1; mais D est l'intersection de P et de P_1 : on retombe donc sur le n° **85**.

Soit L_2 la position correspondant à L dans la seconde figure; l'hyperboloïde des droites D passe par L et L_1, celui des droites D' par L et L_2: ces deux surfaces ayant une génératrice commune se coupent donc suivant une courbe du troisième ordre, lieu des points de rencontre des droites D et D'.

On sait qu'à cette courbe du troisième ordre on ne peut mener que quatre plans tangents par une droite. Or, quand un plan sera tangent, il contiendra une caractéristique de la surface : il n'y a donc que quatre caractéristiques qui rencontrent la droite; en d'autres termes, la droite ne rencontre la surface qu'en quatre points : donc le théorème est démontré.

« Observation. — *Si la droite* L *est une corde, les deux hyperboloïdes deviennent des cônes du second ordre.* »

En effet, dans ce cas, L et L_1 se rencontrent en un point, et l'intersection de P et P_1 passe par ce point.

89. « *Si, autour de deux points homologues, on fait tourner deux droites homologues* D, D', *qui se rencontrent :*

» 1° *Chacune des deux droites décrit un cône du second ordre;*

» 2° *Leur point de rencontre décrit une courbe à double courbure du troisième ordre;*

» 3° *Toute droite qui s'appuie en deux points sur cette courbe est une corde.* »

Soient a_1, a_2 deux points homologues; alors a_1a_2 est une corde, et l'on retombe sur l'observation du n° **88**.

Ces deux cônes ayant une génératrice commune a_1a_2, le reste de l'intersection qui est le lieu cherché est une courbe à double courbure du troisième ordre.

Enfin il n'y a qu'à se reporter au n° **75** pour la dernière partie de l'énoncé.

90. « *Si, autour de deux points homologues, on fait tourner deux plans homologues, leur droite d'intersection s'appuie, dans toutes ses positions, en deux points (réels ou imaginaires), sur la courbe à double courbure du troisième ordre, lieu des points d'intersection des droites homologues tournant autour des deux points fixes.* »

Soient a_1, a_2 les deux points; menons deux plans homologues P_1, P_2; il s'agit de chercher combien il y a de droites homologues issues de a_1 qui rencontrent celles issues de a_2 en des points situés sur l'intersection de P_1 et P_2. Or toutes les droites issues de a_1 qui rencontrent celles issues de a_2 sont (**89**) sur un cône du second degré : donc il n'y en a que deux, et les deux points ainsi obtenus sont sur la courbe du troisième ordre.

« Réciproquement : *Toute droite qui s'appuie en deux points sur cette courbe est l'intersection de deux plans homologues qui passent, respectivement, par les deux points fixes.* »

Car ces plans contiennent, respectivement, deux droites homologues.

91. « *Quand deux plans homologues tournent autour de deux* *droites homologues, leur droite d'intersection est une corde, et les deux points homologues situés sur cette droite sont sur deux courbes à double courbure du troisième ordre.* »

La droite d'intersection de deux plans homologues (**70**) est toujours une corde. De plus (**88**, 2°), si D est cette intersection, D_1 son homologue dans la première figure, ces droites sont les seules dans le plan mené par une des droites, celle de la *première figure; donc leur point de rencontre est une courbe à double courbure du troisième ordre.*

92. « *Angle de deux droites homologues* D, D′ :

$$\sin\tfrac{1}{2}(D, D') = \sin\tfrac{1}{2}U \sin(D, X). \text{ »}$$

Je mène par un point O (*fig.* 31) de l'axe central des parallèles à D et à D′, et je prends OD = OD′, ID est perpendiculaire à OX. On a

$$ID = OD \sin(D, X), \quad \tfrac{1}{2}DD' = ID \sin\tfrac{1}{2}U = OD \sin\tfrac{1}{2}(D, D'),$$

d'où

$$\sin\tfrac{1}{2}(D, D') = \sin\tfrac{1}{2}U \sin(D, X).$$

93. « *Angle qu'un plan parallèle à deux droites homologues* D, D′ *fait avec l'axe central :*

$$\operatorname{tang}(\overline{DD'}, X) = \cos\tfrac{1}{2}U \operatorname{tang}(D, X). \text{ »}$$

On a (*fig.* 31)

$$\operatorname{tang}(\overline{DD'}, X) = \frac{IK}{IO} = \frac{ID \cos\frac{1}{2}U}{OD \cos(D, X)} = \cos\tfrac{1}{2}U \operatorname{tang}(D, X).$$

94. « *Direction dans l'espace d'un plan parallèle à deux droites homologues.*

» *La trace d'un tel plan sur un plan* H, *perpendiculaire à l'axe central, est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle que font les projections sur le plan* H *des droites qui mesurent les plus courtes distances de l'axe central aux deux droites homologues.* »

Les plus courtes distances sont en projection perpendiculaires à ID et à ID′ et leur bissectrice est perpendiculaire à IK : donc le théorème est démontré.

« Cette trace et l'angle que le plan demandé fait avec l'axe central (93) déterminent la direction de ce plan.

95. » *Plus courte distance de deux droites homologues* D, D′.

» La droite D est déterminée de position par sa plus courte distance r à l'axe central, et par l'angle (D, X) qu'elle fait avec cet axe. Soit γ sa plus courte distance à la droite homologue D′; on a

$$\gamma = \frac{2r\sin\frac{1}{2}U + E\cos\frac{1}{2}U\,\mathrm{tang}(D, X)}{\sqrt{1 + \mathrm{tang}^2(D, X)\cos^2\frac{1}{2}U}}. \text{ »}$$

Je ne fais d'abord subir à D que la rotation; soient alors T et T′

Fig. 31.

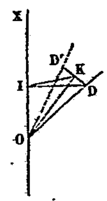
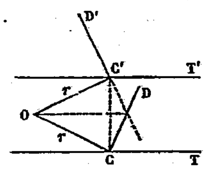


Fig. 32.



(*fig.* 32) les traces de deux plans parallèles à D et à D′ menés respectivement par chacune de ces droites, on a

$$CC' = 2r\sin\tfrac{1}{2}U.$$

J'abaisse maintenant T′ parallèlement à lui-même de la quantité E; T′ se déplace de manière que CC′ augmente d'une quantité C′C″, telle que

$$\frac{C'C''}{E} = \mathrm{tang}(\overline{DD'}, X), \quad C'C'' = E\,\mathrm{tang}(\overline{DD'}, X),$$

d'où

$$CC'' = 2r\sin\tfrac{1}{2}U + E\cos\tfrac{1}{2}U\,\mathrm{tang}(D, X).$$

Soit γ la plus courte distance des deux plans; on a

$$\gamma = CC'' \cos(\overline{DD'}, X),$$

d'où

$$\gamma = \frac{2r \sin\frac{1}{2}U + E\cos\frac{1}{2}U \operatorname{tang}(D, X)}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2(D, X)\cos^2\frac{1}{2}U}}.$$

« Le numérateur du second membre exprime la distance de deux droites parallèles, lesquelles sont les traces, sur un plan perpendiculaire à l'axe central, des deux plans menés par les deux droites D, D' parallèlement à ces droites; et le dénominateur est le sinus de l'inclinaison de ces plans sur le plan perpendiculaire à l'axe central.

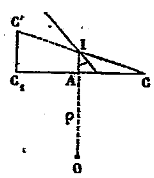
96. » *Projection orthogonale d'une corde* AA', *qui joint les points homologues des deux droites* D, D' *sur la droite milieu* Λ :

$$2\rho \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U \sin(\Lambda, X) + E\cos(\Lambda, X),$$

ρ *étant la distance de la droite milieu* Λ *à l'axe central.* »

Soit C (*fig.* 33) le pied de la plus courte distance de D et de X; toutes les cordes (**46**, 3°) ont même projection sur Λ. Considérons, par

Fig. 33.



exemple, CC'. La droite milieu Λ passe par le milieu I de CC', elle est d'ailleurs dans un plan parallèle à D et D'; par conséquent, $\rho = OA$ est sa plus courte distance à l'axe. Au lieu de projeter CC', projetons le contour CC_1C', nous aurons

$$CC_1 \sin(\Lambda, X) + C_1C' \cos(\Lambda, X);$$

mais

$$\frac{CA}{\rho} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U, \quad CC_1 = 2\rho \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U, \quad C_1C' = E,$$

d'où

$$2\rho \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U \sin(\Lambda, X) + E\cos(\Lambda, X).$$

Propriétés relatives à deux plans homologues.

97. « *Deux plans homologues font des angles égaux avec l'axe central, et le segment qu'ils interceptent sur cet axe est de grandeur constante et égal au glissement de cet axe sur lui-même.* »

Cela est évident.

98. « On a vu que la droite d'intersection de deux plans homologues est une corde; et, réciproquement, que par une corde AA' on peut toujours mener un système de deux plans homologues, et un seul (**70**).

» Il existe entre la corde et les deux plans cette relation :

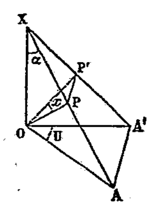
» *Le produit d'une corde par la tangente du demi-angle des deux plans homologues dont cette corde est l'intersection est constant.*

» *De sorte qu'on a*

$$\mathrm{AA'}\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\mathrm{P},\mathrm{P'}) = \mathrm{E}\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}. \text{ »}$$

Je mène par un point de l'axe X (*fig.* 34) des plans parallèles aux

Fig. 34.



deux plans homologues: XA et XA' sont leurs lignes de plus grande pente; j'abaisse d'un point O quelconque les perpendiculaires OP et OP', et j'ai

$$\overline{\mathrm{PP'}}^2 = 2\overline{\mathrm{OP}}^2(1-\cos x), \quad \overline{\mathrm{AA'}}^2 = 2\overline{\mathrm{OA}}^2(1-\cos \mathrm{U}),$$

$$\left(\frac{\mathrm{PP'}}{\mathrm{AA'}}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}\right)^2 \frac{1-\cos x}{1-\cos \mathrm{U}} = \left(\frac{\mathrm{XP}}{\mathrm{XA}}\right)^2, \quad \left(\frac{\mathrm{XP}}{\mathrm{OP}}\,\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{XA}}\right)^2 = \frac{1-\cos x}{1-\cos \mathrm{U}} = \cos^2\alpha.$$

Soit D l'intersection des deux plans, D' son homologue dans la seconde figure; un de nos plans est parallèle à ces deux droites homologues : donc (93)

$$\tang\alpha = \cos\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\tang(\mathrm{D}, \mathrm{X});$$

mais (77)

$$\tang(\mathrm{D}, \mathrm{X}) = \frac{r\tang\frac{1}{2}\mathrm{U}}{\frac{1}{2}\mathrm{E}},$$

d'où

$$\tang\alpha = \frac{r\sin\frac{1}{2}\mathrm{U}}{\frac{1}{2}\mathrm{E}}, \quad \cos^2\alpha = \frac{\frac{1}{4}\mathrm{E}^2}{\frac{1}{4}\mathrm{E}^2 + r^2\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{U}}.$$

On a

$$1 - \cos x = \frac{2\tang^2\frac{x}{2}}{1 + \tang^2\frac{x}{2}}, \quad 1 - \cos\mathrm{U} = \frac{2\tang^2\frac{1}{2}\mathrm{U}}{1 + \tang^2\frac{1}{2}\mathrm{U}},$$

d'où

$$\frac{\tang^2\frac{x}{2}}{1 + \tang^2\frac{x}{2}} = \frac{\tang^2\frac{1}{2}\mathrm{U}}{1 + \tang^2\frac{1}{2}\mathrm{U}}\,\frac{\frac{1}{4}\mathrm{E}^2}{\frac{1}{4}\mathrm{E}^2 + r^2\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{U}},$$

et enfin

$$\tang\frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{E}\tang\frac{1}{2}\mathrm{U}}{\sqrt{r^2\tang^2\frac{1}{2}\mathrm{U} + \frac{1}{4}\mathrm{E}^2}} = \tang\tfrac{1}{2}(\mathrm{P}, \mathrm{P}').$$

Mais on a (77)

$$\overline{a\mathrm{A}}^2 = r^2\tang^2\tfrac{1}{2}\mathrm{U} + \tfrac{1}{4}\mathrm{E}^2, \quad \overline{\mathrm{AA}'}^2 = 4(r^2\tang^2\tfrac{1}{2}\mathrm{U} + \tfrac{1}{4}\mathrm{E}^2),$$

d'où

$$\mathrm{AA}'\tang\tfrac{1}{2}(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = \mathrm{E}\tang\tfrac{1}{2}\mathrm{U}.$$

« Corollaire. — On conclut de là que : *Le plus grand angle que puissent faire entre eux deux plans correspondants a lieu quand ces plans passent par l'axe central.* »

Cela se conclut plus naturellement de l'expression de $\tang\frac{x}{2}$ que de la dernière égalité; car alors, r étant nul, AA' passe par l'axe, et en outre, d'après l'expression de tang (D, X), se confond avec lui : donc les deux plans passent par l'axe.

99. « *Angle de deux plans homologues, en fonction de la distance de leur droite d'intersection à l'axe central.*

» Soit r cette distance; il suffit de remplacer AA', dans l'expression précédente, par son expression en fonction de r (**77**); il vient

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(P, P') = \frac{\frac{1}{2}E \operatorname{tang}\frac{1}{2}U}{\sqrt{r^2 \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}U + \frac{1}{4}E^2}}. \text{ »}$$

Cette expression a été trouvée directement au numéro précédent.

100. « *Angle de deux plans homologues en fonction de leur inclinaison sur l'axe central :*

$$\sin\tfrac{1}{2}(P, P') = \sin\tfrac{1}{2}U \cos(P, X). \text{ »}$$

On a (**98**)

$$\frac{1 - \cos x}{1 - \cos U} = \cos^2\alpha,$$

ou

$$\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{U}{2}} = \cos^2\alpha, \quad \sin\tfrac{1}{2}(P, P') = \sin\tfrac{1}{2}U \cos(P, X).$$

101. « *Relation entre l'inclinaison de deux plans homologues sur l'axe central et la distance de leur droite d'intersection à cet axe :*

$$r \operatorname{tang}(P, X) \sin\tfrac{1}{2}U = \frac{E}{2}. \text{ »}$$

On a (**98**)

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{r \sin\frac{1}{2}U}{\frac{1}{2}E},$$

d'où

$$r \cot(P, X) \sin\tfrac{1}{2}U = \tfrac{1}{2}E.$$

102. « *Si, autour de deux droites homologues* L, L', *on fait tourner deux plans homologues* P, P' :

» 1° *La droite d'intersection de ces deux plans est une corde* (**70**) *et engendre un hyperboloïde* (**85**);

» 2° *Les deux points homologues* A, A' *des deux corps, situés sur cette* *corde, décrivent deux courbes à double courbure du troisième ordre* (**91**);

» 3° *Le point milieu a de la corde* AA′ *décrit aussi une courbe à double courbure du troisième ordre;*

» 4° *Le plan normal à cette corde, mené par son milieu a, enveloppe une développable du quatrième ordre.* »

Nous démontrerons plus loin que le corps milieu est homographique au corps donné, d'où il résulte que le lieu du point a est homographique au lieu du point A : donc il ne peut être coupé par un plan en plus de trois points; donc c'est une courbe à double courbure du troisième ordre.

Le plan normal à la corde AA′, mené par son milieu, enveloppe une développable corrélative de la courbe du troisième ordre, c'est-à-dire une développable du quatrième ordre.

103. « *Quand des plans du premier corps rencontrent leurs homologues du second corps, suivant des droites situées dans un même plan quelconque :*

» 1° *Ces plans enveloppent une développable du quatrième ordre* (**86**);

» 2° *Leurs foyers sont sur une courbe à double courbure du troisième ordre;*

» 3° *Les normales à ces plans, menées par leurs foyers, forment un cône du second ordre.* »

La suite des foyers de la première série de plans forme une courbe à chacun des points de laquelle correspond un plan. La courbe en question a donc pour corrélative une développable du quatrième ordre : donc elle est une courbe à double courbure du troisième ordre.

Soient Q le plan sur lequel sont les intersections des plans homologues, P l'un de ces plans, F son foyer. Le plan P coupe le plan Q suivant une droite L, et a pour normale en F une droite N : donc à la droite N passant par F correspond la droite L située dans le plan P, donc la figure formée par la droite N est corrélative de celle formée par la droite L. Or toutes celles-ci sont dans un même plan : donc toutes les autres passent par un même point, donc elles forment un cône.

Le plan Q est tangent à la développable : donc son foyer, qui lui correspond, et qui est le sommet du cône, est sur la courbe du troisième ordre, donc le cône est du second ordre.

Corps milieu relatif à deux corps égaux.

104. « Les milieux des cordes AA′, BB′,... qui joignent les points homologues des deux corps V, V′ forment un troisième corps que nous appellerons *corps milieu* relatif aux deux corps égaux V, V′.

» *Ce corps milieu est homographique à chacun des deux corps* V, V′. »

A chaque point du corps V correspond un point du corps milieu, et à chaque plan du corps V (49) correspond un plan du corps milieu : donc les deux corps sont homographiques.

105. « *On peut donner au corps milieu relatif à deux corps égaux* V, V′ *un mouvement infiniment petit dans lequel ses points a, b,... auront leurs trajectoires dirigées suivant les cordes* AA′, BB′,... *dont ces points sont les milieux;*

» *L'axe de rotation qui glisse sur lui-même, dans ce mouvement infiniment petit, est l'axe central commun aux deux corps* V, V′;

» *Et le rapport entre la rotation* ω *autour de cet axe et sa translation h est*

$$\frac{\omega}{h} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}U}{\frac{1}{2}E};$$

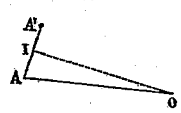
de sorte qu'on a

$$\omega = \varepsilon \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U \quad \textit{et} \quad h = \varepsilon\tfrac{1}{2}E,$$

ε *étant une constante infiniment petite prise arbitrairement.* »

Projetons sur un plan perpendiculaire à l'axe de la vis; le milieu de la droite qui joint deux points homologues dans l'espace se projettera

Fig. 35.



en I (*fig.* 35), milieu de AA′. IO étant perpendiculaire à AA′, les directions des déplacements sont bien perpendiculaires aux rayons vecteurs. Toutes les hélices décrites dans le déplacement infiniment petit doivent avoir même pas. Or les droites données sont des tangentes à ces hélices, et l'on sait que l'inclinaison d'une tangente sur l'horizon est donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{h}{2\pi r}.$$

L'inclinaison est ici

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\varepsilon}{2\,\mathrm{OA}\sin\omega};$$

mais

$$\mathrm{OI} = \mathrm{OA}\cos\omega = r:$$

donc

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\varepsilon}{2r\operatorname{tang}\omega} = \frac{\dfrac{\pi\varepsilon}{\operatorname{tang}\omega}}{2\pi r}.$$

Le pas étant égal à $\frac{\pi\varepsilon}{\operatorname{tang}\omega}$ est donc constant, et par suite le déplacement indiqué est possible.

Dans la notation de l'énoncé, une élévation h correspond à une rotation ω; ici une élévation $\frac{\pi\varepsilon}{\operatorname{tang}\omega}$ correspond à une rotation 2π : on a donc

$$\frac{\omega}{h} = \frac{2\pi}{\dfrac{\pi \mathrm{E}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{U}}}, \quad \frac{\omega}{h} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{U}}{\frac{1}{2}\mathrm{E}}.$$

On peut donc écrire

$$\omega = \varepsilon\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}, \quad h = \varepsilon\tfrac{1}{2}\mathrm{E},$$

ε étant une constante arbitraire infiniment petite.

106. « *L'élément aa' que décrit, dans le mouvement infiniment petit, chaque point a du corps milieu, est à la demi-corde* $a\mathrm{A}$ $\left(=\frac{\mathrm{AA'}}{2}\right)$ *dans le rapport constant* ε.

» *Ainsi*

$$aa' = \varepsilon . a\mathrm{A} = \varepsilon\frac{\mathrm{AA'}}{2},$$

ou

$$\frac{aa'}{\mathrm{AA'}} = \frac{h}{\mathrm{E}}.$$

» *Il résulte de là, d'après l'expression de* AA′ (**77**), *que*

$$aa' = \frac{h}{\frac{1}{2}\mathrm{E}}\sqrt{r^2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{U} + \frac{\mathrm{E}^2}{4}},$$

r étant la plus courte distance de la corde AA′ *à l'axe central.* »

aa' et aA, étant sur la même droite, sont entre elles comme leurs projections h et $\frac{1}{2}$E sur l'axe central : on a donc

$$\frac{aa'}{a\mathrm{A}} = \frac{h}{\frac{1}{2}\mathrm{E}} = \varepsilon, \quad aa' = \varepsilon . a\mathrm{A} = \varepsilon\,\frac{\mathrm{AA'}}{2}, \quad \frac{aa'}{\mathrm{AA'}} = \frac{h}{\mathrm{E}};$$

et, en remplaçant dans $4\overline{a\mathrm{A}}^2$, il vient

$$aa' = \frac{h}{\frac{1}{2}\mathrm{E}}\sqrt{r^2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{U} + \frac{\mathrm{E}^2}{4}}.$$

107. « La notion de ce corps milieu, qui peut prendre un mouvement infiniment petit dans lequel ses trajectoires sont dirigées suivant les cordes dont les points de ce corps sont les milieux, conduit à de nombreuses propriétés relatives au déplacement fini d'un corps dans l'espace; ces propriétés se concluent de celles du déplacement infiniment petit, question plus facile à traiter.

108. » *Soient deux droites homologues* L, L′ *et leur droite milieu* Λ; *les plans, menés par les différents points de cette droite* Λ *normalement aux cordes qui ont leurs milieux en ces points, passent tous par une même droite* λ (**46**).

» *Cette droite* λ *et la droite milieu* Λ *sont deux axes conjugués de rotation dans le mouvement infiniment petit du corps milieu.* »

En effet, ces deux droites sont conjuguées : il n'y a alors qu'à se reporter au n° **6** du premier Mémoire.

109. « Il résulte de là que :

» *Si la droite* λ *est regardée comme droite milieu de deux droites homologues* l, l′, *les plans menés par ses différents points, normalement aux cordes qui ont leurs milieux en ces points, passeront tous par la droite* Λ. »

Car λ et Λ sont deux droites conjuguées. Il suffit de prouver qu'on peut trouver deux droites telles que l et l'. Or prenons deux plans homologues P et P′ et leur plan milieu Π, il coupera λ en un point qu'on reliera par des sécantes aux milieux a, b, c, relatifs à trois points A, B, C du plan P, ce qui permettra de trouver son correspondant sur P et sur P′ : on aura donc un point de l et de l', on en cherchera un second, et l et l' seront déterminées.

110. « Ainsi les deux droites Λ et λ, que l'on a à considérer dans le déplacement fini d'un corps, jouissent de propriétés réciproques.

» Nous reviendrons plus loin (**122** et suiv.) sur les propriétés auxquelles ces deux droites donnent lieu.

111. » *Dans un plan donné* Π *se trouvent deux droites homologues* L, L′ *et un point* F *autour duquel on peut faire tourner une des droites pour l'amener sur l'autre. Ce point* F *est le foyer du plan* (**49**).

» *Si l'on considère le plan* Π *comme plan milieu relatif à deux plans homologues* P, P′, *le point* F *sera le foyer de ce plan dans le mouvement infiniment petit que peut prendre le corps milieu* [*].

Car la droite AA′ qui passe par ce point a la direction de l'élément aa', et est perpendiculaire au plan Π.

112. » *Les droites homologues* L, L′, *situées dans le plan* Π, *sont les intersections de ce plan par les deux plans homologues* P, P′ (**50**).

» *La caractéristique du plan* Π, *dans le mouvement infiniment petit* [**], *est la droite milieu* Λ *des deux droites* L, L′. »

Car les cordes correspondant aux points de ces droites sont situées dans le plan Π.

113. « La perpendiculaire abaissée du foyer du plan Π sur cette droite milieu passe par le point de concours des deux droites L, L′. Or,

---

[*] « *Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace.* (Voir *Comptes rendus*, t. XVI, p. 1420, année 1843.) »

[**] « *Ibid.* »

si l'on considère le mouvement infiniment petit, cette perpendiculaire passe par l'axe central de rotation. Donc, en général :

» *La droite qui joint le foyer d'un plan au point de concours des deux droites homologues situées dans ce plan rencontre l'axe central et lui est perpendiculaire.* »

Pour la première partie, il n'y a qu'à se reporter à (**49**, 2°), et pour la deuxième au premier Mémoire (**4**) : on conclut alors la troisième.

Il reste seulement à faire voir que, par les droites homologues, on peut mener des plans homologues ayant pour plan milieu le plan donné, ce qui n'offre aucune difficulté.

114. « *Tous les plans* Π *menés par une droite donnée* D *ont leurs foyers sur une même droite.* »

C'est le théorème des droites conjuguées, démontré dans le premier Mémoire (**5**).

115. « *Les droites homologues situées dans chacun de ces plans forment deux hyperboloïdes, et leur point d'intersection décrit une courbe à double courbure du troisième ordre.* »

On a démontré (premier Mémoire, n° **14**) que, si plusieurs plans passent par une même droite, leurs caractéristiques forment un hyperboloïde à une nappe, et (**112**) que la caractéristique du plan Π est la droite milieu des deux droites L et L'; donc toutes ces droites milieu forment un hyperboloïde qui appartient au corps milieu. Or (**104**) le corps milieu est homographique aux deux autres, dont les droites L et les droites L' forment deux hyperboloïdes. Toutes ces droites rencontrant la droite D autour de laquelle pivotent les plans Π, cette droite fait partie des deux hyperboloïdes : donc le reste de leur intersection ou le lieu des points d'intersection des droites L et L' décrit une courbe à double courbure du troisième ordre.

116. « *Les points où ces droites sont rencontrées par leur droite milieu décrivent aussi deux courbes à double courbure du troisième ordre.* »

Car les droites milieu forment un hyperboloïde qui admet aussi D pour génératrice.

117. « *Tous les plans menés par un même point* O *ont leurs foyers sur un même plan; ce plan passe par ce point* O *et est perpendiculaire à la corde dont ce point est le milieu.* »

En effet leurs foyers sont sur le plan normal à la trajectoire du point. Le point ayant sa trajectoire normale au plan est le foyer du plan.

118. « *Quand la corde qui a son milieu en un point d'une droite donnée* D *est perpendiculaire à cette droite, toutes les autres cordes qui ont leur milieu en d'autres points de la droite sont aussi perpendiculaires à cette droite.* »

Toutes les autres cordes qui ont leurs milieux en des points de D ont pour extrémités deux droites L et L′, d'après les propriétés du corps milieu; on retombe donc sur le n° **48**.

Propriétés relatives au système de deux rotations conjuguées.

119. « Le déplacement d'un corps V, que l'on veut transporter en V′, peut se faire, comme nous l'avons vu (**68**), par deux rotations successives autour des deux droites différentes λ et L, dont une est prise arbitrairement. La première rotation, autour de λ, amène la droite L du corps sur son homologue L′, c'est-à-dire dans sa position définitive, et la seconde rotation, qui se fait autour de cette droite L ainsi placée en L′, fait coïncider les deux corps.

» Ce sont les rotations autour de ces deux droites λ et L que nous appellerons *rotations conjuguées*, et ces deux droites seront dites *axes conjugués de rotation*.

120. » Voici comment on détermine une de ces droites quand l'autre est donnée :

» 1° *Si la droite* L *est donnée, ainsi que son homologue* L′ *sur laquelle on doit l'amener, soit* Λ *leur droite milieu : les plans menés par les points de cette droite normalement aux cordes* AA′, BB′,..., *qui ont leurs milieux en ces points, passent tous par une même droite* λ *qui est la droite cherchée.* »

Cela résulte de (**46**, 6°).

« 2° *Si c'est la droite* λ *qui est donnée, on mène par deux de ses points les plans normaux aux cordes qui ont leurs milieux en ces points; la droite d'intersection de ces plans est la droite milieu* Λ *des deux droites* L, L'. *Celles-ci seront donc déterminées.*

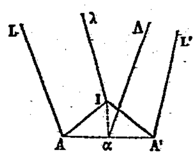
» Cela résulte de la considération du corps milieu relatif aux deux corps V, V' et du mouvement infiniment petit que l'on peut donner à ce corps, comme il a été dit (**105**). Dans ce mouvement infiniment petit, les deux droites λ et Λ sont deux axes conjugués de rotation (**120**). »

Cela résulte aussi du n° **109**.

121. « *La projection orthogonale de la droite qui mesure la plus courte distance des deux axes conjugués* L *et* λ *sur l'axe central est de grandeur constante et égale à la demi-translation de cet axe sur lui-même.* »

On a vu (**108**) que dans le mouvement infiniment petit du corps milieu, où les trajectoires des points de Λ (*fig.* 36) seraient dirigées

Fig. 36.



suivant AA',..., les droites λ et Λ sont conjuguées, et (**105**) que l'axe de rotation glissant, dans ce mouvement, est l'axe central commun aux deux corps. On sait (**46**, 5°) que Iα est la plus courte distance de λ et Λ, et (premier Mémoire, n° **9**) que cette plus courte distance est perpendiculaire à l'axe central. La projection de $A\alpha = \frac{1}{2}AA'$ sur l'axe central est, d'une part, $\frac{1}{2}E$; elle est, d'autre part, égale à la projection du contour AIα, qui se réduit ainsi à la projection de AI, ce qui démontre le théorème.

122. « *Si l'une des deux droites conjuguées* Λ, λ *tourne autour d'un point fixe, l'autre se meut dans le plan normal à la trajectoire de ce point.* (*Comptes rendus*, t. XVI, p. 1423.)

» On en conclut que :

» *Si l'un des axes conjugués* L *et* λ *tourne autour d'un point fixe, l'autre reste dans un même plan.* »

Si c'est λ, Λ se meut dans un plan, et par suite L dans le plan homographique à celui-là.

Si c'est L, λ se meut dans le plan normal à la trajectoire du point.

123. « *La droite qui mesure la plus courte distance entre la droite* λ *et la droite milieu* Λ *relative aux deux* L *et* L' *rencontre l'axe central* X *et lui est perpendiculaire.* »

C'est ce que j'ai établi (**121**).

124. « *L'une des deux droites* λ *et* Λ *étant prise arbitrairement, l'autre est déterminée de position au moyen des deux relations*

$$r = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{E}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{U}}\,\frac{1}{\operatorname{tang}(\Lambda, \mathrm{X})}, \quad \mathrm{R} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{E}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{U}}\,\frac{1}{\operatorname{tang}(\lambda, \mathrm{X})},$$

dans lesquelles R *et* r *sont les distances des deux droites* Λ *et* λ *à l'axe central.* »

Reportons-nous au n° **77** : a est ici appelé α. Le plan mené par α perpendiculairement à AA' passe par λ : donc Iα est perpendiculaire à AA'; λ et AA' sont perpendiculaires : donc

$$\operatorname{tang}(a\Lambda, \mathrm{X}) = \frac{1}{\operatorname{tang}(\lambda, \mathrm{X})},$$

d'où

$$\mathrm{R} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{E}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{U}}\,\frac{1}{\operatorname{tang}(\lambda, \mathrm{X})};$$

on aurait de même

$$r = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{E}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{U}}\,\frac{1}{\operatorname{tang}(\Lambda, \mathrm{X})}.$$

125. « *Expression des projections orthogonales des cordes* AA', BB', ..., *qui joignent les points homologues de deux droites* L, L' *sur la droite milieu* Λ :

$$\mathrm{AA}'\cos(\mathrm{AA}', \Lambda) = 2[\mathrm{R}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\sin(\Lambda, \mathrm{X}) + \tfrac{1}{2}\mathrm{E}\cos(\Lambda, \mathrm{X})]. \text{ »}$$

Établi déjà au n° **96**.

126. « *Expression de la rotation* O *autour de la droite* λ, *nécessaire pour placer la droite* L *sur son homologue* L',

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}O = \frac{\frac{1}{2}E \operatorname{tang}\frac{1}{2}U}{r \operatorname{tang}\frac{1}{2}U \sin(\lambda, X) + \frac{1}{2}E\cos(\lambda, X)};$$

r est la plus courte distance de la droite λ *à l'axe central* X. »

En se reportant à la *fig.* 36, on a

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}O = \frac{\frac{1}{2}AA'}{I\alpha} = \frac{\frac{1}{2}AA'}{r+R},$$

ou (**124**)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}O = \frac{\frac{1}{2}AA'}{r + \dfrac{\frac{1}{2}E}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}U}\,\dfrac{\cos(\lambda, X)}{\sin(\lambda, X)}} = \frac{\frac{1}{2}AA'\sin(\lambda, X)\operatorname{tang}\frac{1}{2}U}{r\operatorname{tang}\frac{1}{2}U\sin(\lambda, X) + \frac{1}{2}E\cos(\lambda, X)};$$

mais

$$\sin(\lambda, X) = \cos(AA', X)$$

et

$$AA'\cos(AA', X) = E:$$

donc

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}O = \frac{\frac{1}{2}E \operatorname{tang}\frac{1}{2}U}{r \operatorname{tang}\frac{1}{2}U \sin(\lambda, X) + \frac{1}{2}E\cos(\lambda, X)}.$$

127. « Le dénominateur du second membre exprime la projection orthogonale sur la droite λ des cordes qui ont leurs milieux sur cette droite (**125**); par conséquent, on peut dire que :

» *La tangente de la demi-rotation autour d'une droite, multipliée par la projection orthogonale, sur cette droite, d'une corde ayant son milieu en un point de la droite, donne un produit constant, égal à* E $\operatorname{tang}\frac{1}{2}$U.

128. » *Relations entre les deux rotations* O *et* Ω *autour de deux droites* λ *et* L *par lesquelles on effectue le déplacement d'un corps :*

$$\cos\tfrac{1}{2}U = \cos\tfrac{1}{2}O\cos\tfrac{1}{2}\Omega - \sin\tfrac{1}{2}O\sin\tfrac{1}{2}\Omega\cos(\lambda, L),$$

et

$$\sin\tfrac{1}{2}U\sin(X, \overline{\lambda L}) = \sin\tfrac{1}{2}O\sin\tfrac{1}{2}\Omega\sin(\lambda, L).$$

$(X, \overline{\lambda L})$ *désigne l'angle qu'un plan parallèle aux deux axes de rotation fait avec l'axe central* X. »

Par un point de l'espace, je mène des parallèles à λ, L, L' et à la droite λ' du second corps correspondant à la droite λ du premier; puis je coupe le tout par une sphère. Soient A le point de λ, B le point de L, B_1 le point de L', X le point de l'axe central obtenus ainsi; j'ai alors la *fig.* 27, et rien n'est changé quant à la grandeur des rotations : donc

$$\cos\tfrac{1}{2}U = \cos\tfrac{1}{2}O \cos\tfrac{1}{2}\Omega - \sin\tfrac{1}{2}O \sin\tfrac{1}{2}\Omega \cos(\lambda, L)$$

et

$$\sin\tfrac{1}{2}U \sin p = \sin\tfrac{1}{2}O \sin\tfrac{1}{2}\Omega \sin(\lambda, L);$$

p est l'angle que fait l'axe central avec le plan de l'arc AB; on a donc

$$p = (X, \overline{\lambda L}),$$

d'où

$$\sin\tfrac{1}{2}U \sin(X, \overline{\lambda L}) = \sin\tfrac{1}{2}O \sin\tfrac{1}{2}\Omega \sin(\lambda, L).$$

129. « Le sinus de cet angle est égal au cosinus de l'angle que la droite qui mesure la plus courte distance des deux axes de rotation fait avec l'axe central. Soit Π cette droite. Sa projection sur l'axe X est égale à $\frac{1}{2}E$ (**121**) : on a donc

$$\Pi \sin(X, \overline{\lambda\Lambda}) = \tfrac{1}{2}E,$$

et l'équation précédente devient

$$\tfrac{1}{2}E \sin\tfrac{1}{2}U = \Pi \sin(\lambda, L) \sin\tfrac{1}{2}O \sin\tfrac{1}{2}\Omega.$$

» Elle exprime que :

» *Le produit des sinus des demi-rotations autour de deux axes conjugués, multiplié par le sinus de l'angle de ces deux axes et par leur plus courte distance, forme un produit constant.* »

Le sinus de l'angle $(X, \overline{\lambda L})$ est égal au cosinus de l'angle que fait l'axe X avec une droite perpendiculaire au plan (λL); or AI, plus courte distance de λ et L, est une pareille droite.

130. « Par conséquent :

» *Si l'on porte sur deux axes de rotation conjugués, tels que* L *et* λ, *des lignes proportionnelles aux sinus des demi-rotations autour de ces axes, le tétraèdre construit sur ces lignes aura son volume constant.* »

Reportons-nous au premier Mémoire (**21**). Soit BC la plus courte distance ou Π, soit $CD = \sin\frac{1}{2}\Omega$, $AB = \sin\frac{1}{2}O$; nous aurons

$$\text{surface}\,BCD = \tfrac{1}{2}\Pi \sin\tfrac{1}{2}\Omega.$$

La hauteur aura pour valeur

$$\sin\tfrac{1}{2}O \sin(\lambda, L),$$

et le volume du tétraèdre sera

$$\tfrac{1}{6}\Pi \sin(\lambda, L) \sin\tfrac{1}{2}O \sin\tfrac{1}{2}\Omega,$$

c'est-à-dire constant.

Propriétés diverses, relatives aux cordes qui joignent les points homologues et aux droites d'intersection des plans homologues.

131. « Il résulte de la seconde partie du théorème (**67**) que :

» *Si par un point fixe* O *on mène des droites* Oa, Ob,... *égales et parallèles à toutes les cordes* AA', BB',... *qui joignent deux à deux les points homologues de deux corps, les extrémités de ces cordes sont sur un même plan perpendiculaire à l'axe central commun aux deux corps.*

» *Et, si l'on ne considère que les cordes qui joignent les points homologues de deux droites homologues, les extrémités des droites* Oa, Ob,... *sont sur une même droite.* »

En effet, on sait (**46**, 1°) que Oa, Ob,... sont parallèles à un même plan.

132. « *Quand deux plans homologues tournent autour de deux* *points fixes, leur droite d'intersection, qui est toujours une corde* (**70**), *a ses extrémités sur deux courbes du troisième ordre.* »

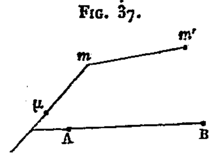
Soient A et B′ les deux points fixes; P et P′ les plans homologues qui y passent. P′ homologue de P renferme A′ homologue de A, et P homologue de P′ renferme B homologue de B′ : les deux plans tournent donc autour de deux droites homologues, et par suite (**102**, 2°) les points homologues des deux corps situés sur leur intersection décrivent deux courbes à double courbure du troisième ordre.

133. « *Par chacune des droites qui joignent les points homologues de deux plans homologues passent deux plans homologues* (**70**);

» *Ces plans sont tangents à deux surfaces de la troisième classe, c'est-à-dire à deux surfaces à chacune desquelles on peut mener trois plans tangents par une même droite.* »

Soit AB (*fig.* 37) cette droite; je vais démontrer qu'il n'y peut passer que trois plans. Soient m et m' deux points homologues des deux plans.

Fig. 37.



Considérons mm' comme appartenant à la seconde figure; soit $m\mu$ son homologue dans la première. Le plan $mm'\mu$ est un des plans tangents à la surface dont il est question; par hypothèse, il passe par AB. Or (**88**), quand plusieurs plans passent par une droite, il existe dans chacun d'eux un seul système de droites homologues mm', $m\mu$, et leur point de rencontre décrit une courbe à double courbure du troisième ordre. Il n'y aura donc sur l'un des plans que trois points m, par suite que trois plans mAB, ce qu'il fallait démontrer.

134. « *Quand des cordes* AA′, BB′,... *s'appuient sur une droite donnée* D, *les points* A, B,... *et* A′, B′,..., *qu'elles joignent deux à deux, sont situés sur deux hyperboloïdes à une nappe, qui ont un point commun situé à l'infini sur l'axe central.* »

Par cette droite menons un plan quelconque; on sait (**88**) que les points homologues des deux corps situés dans ce plan sont sur deux droites, qui engendrent deux hyperboloïdes ayant D pour génératrice commune. Par cette droite menons un plan parallèle à l'axe central; ce plan, considéré comme appartenant soit à la première, soit à la seconde figure, a pour homologues (**97**) des plans parallèles à l'axe central : donc les droites homologues contenues dans ce plan sont parallèles. Or (**88**) le point de rencontre de deux pareilles droites homologues appartient aux deux hyperboloïdes : donc ils ont un point commun situé à l'infini sur l'axe central.

135. « Cas particulier. — La droite D est à l'infini :

» *Quand des cordes sont parallèles à un même plan, leurs extrémités sont les points de deux plans homologues parallèles à l'axe central.* »

En effet, nos deux hyperboloïdes ont une génératrice commune D à l'infini : donc ce sont deux plans parallèles; ils ont de plus un point à l'infini sur l'axe central : donc ils lui sont parallèles. Ils étaient homologues : donc leurs plans sont homologues.

136. « *Les points d'un plan du premier corps, tels que les cordes qui les unissent à leurs homologues dans le deuxième corps s'appuient sur une même droite donnée, sont situés sur une conique;*

» *Et ces cordes forment une surface réglée du quatrième ordre* (**58**). »

Car ce sont les intersections de deux hyperboloïdes homologues par deux plans homologues.

137. « *Le lieu des points du premier corps, tels que les droites qui les unissent à leurs homologues s'appuient sur deux droites données dans l'espace, sont sur une courbe à double courbure du quatrième ordre, à laquelle on peut mener huit plans tangents par une même droite;*

» *Cette courbe a une asymptote parallèle à l'axe central;*

» *Et les droites qui joignent les points de cette courbe à leurs homologues dans le second corps forment une surface réglée du septième ordre.* »

D'après le n° **134**, ces points sont à l'intersection de deux hyperboloïdes, c'est-à-dire sur une courbe du quatrième ordre. Ces deux hyperboloïdes ont à l'infini un point commun sur l'axe central. Les deux plans tangents en ce point sont parallèles à l'axe central : donc leur intersection, parallèle à l'axe central, est asymptote de la courbe gauche. On sait d'ailleurs que, par une droite, on peut mener huit plans tangents à une pareille courbe.

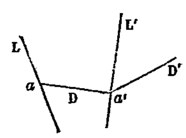
Les deux courbes dans les deux corps sont égales, et l'on démontrerait, par un procédé analogue à celui du n° **58**, que la surface lieu des droites qui joignent leurs points homologues est d'ordre $2m$; mais ces courbes ont un point commun à l'infini : le degré s'abaisse donc à $2m - 1 = 7$.

138. « *Les plans du premier corps qui rencontrent leurs homologues suivant des droites qui s'appuient sur une droite donnée* L′ *sont tous tangents à un paraboloïde hyperbolique.*

» *Ce paraboloïde passe par la droite* L′ *et par la droite* L *qui est, dans le premier corps, l'homologue de* L′ *considérée comme appartenant au second corps.* »

Soient a' (*fig.* 38) un point de L′, et (**81**) D et D′ les deux droites homologues qui passent par ce point. Le plan DD′ du premier corps

Fig. 38.



rencontrera son homologue du second suivant D′ et satisfera à la question. Or il passe par aa', qui engendre un paraboloïde, admettant L et L′ pour génératrices : donc il est tangent à ce paraboloïde, et le théorème est démontré.

139. « *Si, autour de deux points homologues, on fait tourner deux plans homologues, de manière que leur droite d'intersection s'ap-*

puie sur une droite L', ces plans enveloppent deux cônes du second ordre. »

En effet, tous ces plans sont tangents à un paraboloïde et passent par un point; donc ils enveloppent un cône circonscrit au paraboloïde, c'est-à-dire du second ordre.

140. « *Quand des plans du premier corps rencontrent leurs homologues suivant des droites qui s'appuient sur deux droites fixes données, ces plans enveloppent une développable du huitième ordre et de la quatrième classe, c'est-à-dire à laquelle on peut mener quatre plans tangents par un même point.*

» *Cette développable a un plan tangent à l'infini;*

» *Et les droites suivant lesquelles les plans du premier corps rencontrent leurs homologues forment une surface réglée du septième ordre.* »

Ce théorème est textuellement le corrélatif du théorème du n° **137**.

141. « *Les cordes qui joignent les points homologues de deux courbes égales d'ordre m, à double courbure, placées d'une manière quelconque dans l'espace, forment une surface réglée de l'ordre $2m$, qui a m génératrices (réelles ou imaginaires) situées à l'infini.*

» *Les parallèles aux génératrices de cette surface, menées par un même point, forment un cône d'ordre m.*

» *Si les deux courbes d'ordre m ont un point commun, c'est-à-dire un point qui, considéré comme appartenant à la première, est lui-même son homologue dans la seconde, la surface réglée est de l'ordre $2m-1$.* »

Ces théorèmes se démontrent comme ceux du n° **19** et du n° **58**.

142. « On conclut de là que :

» *Quand une courbe à double courbure d'ordre m éprouve un mouvement infiniment petit dans l'espace, les trajectoires de ses points sont dirigées suivant les génératrices d'une surface réglée de l'ordre $2m$, et sont parallèles aux arêtes d'un cône d'ordre m;*

» *Et si le mouvement de la courbe est une simple rotation autour d'un de ses points, la surface réglée est de l'ordre $2m-1$.*

143. » *Quand deux surfaces développables de la classe m (c'est-à-dire qui admettent m plans tangents passant par un même point) sont placées d'une manière quelconque dans l'espace, les droites d'intersection de leurs plans tangents homologues forment une surface réglée d'ordre* $2m$;

» *Et ces droites sont parallèles aux arêtes d'un cône qui est aussi d'ordre* $2m$.

» *Si les deux développables ont un plan commun, c'est-à-dire un plan qui, considéré comme appartenant à la première, est lui-même son homologue dans la seconde, la surface réglée est de l'ordre* $2m - 1$. »

Ce théorème est le corrélatif du théorème du n° **141**.

144. « On conclut de là que :

» *Quand une développable de la classe m éprouve un mouvement infiniment petit, les caractéristiques de tous ses plans tangents* [*] *forment une surface réglée d'ordre* $2m$;

» *Et ces droites sont parallèles aux arêtes d'un cône qui est aussi d'ordre* $2m$.

145. » *Des cordes qui joignent les points homologues de deux plans homologues, il n'y en a qu'une qui se trouve située dans un plan donné.* »

Soient A et B′ les intersections des plans homologues par le plan donné; je cherche A′ homologue de A, qui coupe B′ en un point : donc le théorème est démontré.

146. « *Des droites d'intersection de deux plans homologues tournant autour de deux points homologues, il n'y en a qu'une qui passe par un point donné.* »

Soient a le point donné, a_1 son homologue dans la première figure, a_2 son homologue dans la seconde, m_1 et m_2 les deux points homologues donnés; les deux plans aa_1m_1 et aa_2m sont les deux seuls satisfaisant à la question : donc le théorème est démontré.

---

(1) « Voir *Comptes rendus*, t. XVI, p. 1420. »

Construction de l'axe central commun à deux corps égaux.

147. « Pour déterminer l'axe central, il suffit de connaître trois couples de points homologues des deux corps. Soient donc A, B, C trois points du premier corps, et A', B', C' les trois points homologues du second corps. Soient a, b, c les milieux des trois cordes AA', BB', CC'. La droite ab, que nous appellerons Λ, est la droite milieu des deux droites homologues AB, A'B'. Les plans menés par les points a, b normalement aux deux cordes AA', BB', respectivement, se coupent suivant une droite λ (**46**, 4°). La droite sur laquelle se mesure la plus courte distance des deux droites λ et Λ rencontre l'axe central cherché et lui est perpendiculaire (**125**).

» Les deux cordes AA' et CC' donnent lieu de même à une autre droite qui rencontre l'axe central et lui est perpendiculaire. Ces deux droites déterminent l'axe central, qui n'est autre que la droite sur laquelle se mesure leur plus courte distance.

» Ainsi le problème est résolu.

148. » *Autrement.* Que par un point O de l'espace on mène des droites $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ égales et parallèles aux trois cordes AA', BB', CC'; le plan des trois points α, β, γ sera perpendiculaire à l'axe central, parce que les projections orthogonales des trois cordes sur cet axe sont égales (**67**). Ainsi la direction de l'axe central est déterminée.

» La recherche de la position de cet axe se réduit à celle de deux points homologues qui soient situés sur une perpendiculaire au plan $\alpha\beta\gamma$; car cette perpendiculaire sera évidemment l'axe central.

» On cherchera les deux points satisfaisant à cette condition, situés dans les plans des deux triangles ABC, A'B'C'. A cet effet, il suffit de projeter orthogonalement les deux triangles sur le plan $\alpha\beta\gamma$: leurs projections sont deux triangles égaux, et le point central de ces triangles est la projection des deux points demandés; conséquemment, c'est par ce point que passe l'axe central des deux corps.

» Cette construction dérive immédiatement de la démonstration même de l'existence de l'axe central.

149. » Elle donne lieu, dans ses applications, à deux remarques.

» Premièrement, il peut arriver que les trois cordes AA', BB', CC' soient parallèles à un même plan, auquel cas les trois points α, β, γ se trouvent sur une même droite, et ne déterminent plus le plan perpendiculaire à l'axe central. Il semblerait donc que la construction est en défaut.

» Mais il suffit d'observer que dans ce cas elle n'est pas nécessaire, parce que la direction de l'axe central se trouve déterminée immédiatement par les données mêmes de la question; car, les trois cordes AA', BB', CC' étant parallèles à un même plan, il en résulte que les deux plans homologues ABC, A'B'C' sont parallèles à l'axe central (**135**); c'est-à-dire que leur droite d'intersection détermine la direction de cet axe.

» La seconde remarque se rapporte au cas du mouvement infiniment petit. La construction, tant de la direction que de la position absolue de l'axe central, qui devient l'axe instantané de rotation, subsiste théoriquement; mais elle n'est pas, en général, d'une application pratique, par la raison que, dans la plupart des questions de la théorie des machines, on pourra bien ne pas connaître les vitesses mêmes des trois points donnés A, B, C, représentées ici par les trajectoires infiniment petites de ces points, mais seulement les directions de ces vitesses, qui, en effet, suffisent pour déterminer le mouvement infiniment petit du corps. Il faut donc savoir déterminer la position de l'axe central au moyen de ces directions seules, de même que sur le plan les directions des trajectoires de deux points de la figure en mouvement suffisent pour déterminer le centre instantané de rotation.

» A cet égard, notre première construction satisfait pleinement à la question, théoriquement et pratiquement, car on n'y fait usage que des directions des trajectoires de trois points du corps en mouvement. »

Construction de la vis avec laquelle on peut transporter un corps d'une position donnée dans une autre position déterminée par trois points.

150. « Soient A, B, C trois points du corps, et A', B', C' les positions que doivent prendre ces points dans la nouvelle position du corps.

» On détermine l'axe central comme il vient d'être dit; ce sera l'axe de la vis.

» Qu'on prenne sur cet axe deux points homologues quelconques, leur distance E sera la quantité de glissement de l'axe sur lui-même; et enfin qu'on prenne deux plans homologues quelconques passant par l'axe central, leur angle U sera l'angle de rotation correspondant au glissement E.

» Par conséquent, si l'on appelle H le pas de la vis, on aura

$$\frac{H}{E} = \frac{360^\circ}{U}, \quad H = \frac{E.360^\circ}{U}.$$

» Si l'on veut diminuer le pas de la vis pour diminuer la force qui la mettra en mouvement, on fera faire à la vis plusieurs révolutions, en nombre n, plus une rotation U; et alors le pas de la vis sera

$$H = \frac{E.360}{n.360 + U}. \text{ »}$$