JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LAGUERRE

Sur une surface de quatrième classe dont on peut déterminer les lignes de courbure

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 145-154.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__145_0>

Sur une surface de quatrième classe dont on peut déterminer les lignes de courbure;

PAR M. LAGUERRE.

1. Les propriétés générales des surfaces du quatrième ordre ayant une ligne double du second ordre et des surfaces de quatrième classe, corrélatives des précédentes, qui sont doublement inscrites dans un cône du second ordre, sont actuellement bien connues. L'étude des variétés de ces surfaces peut néanmoins offrir quelque intérêt à l'égard de leurs propriétés métriques; la surface qui fait l'objet de cette Note peut être considérée comme une des corrélatives de l'anallagmatique du quatrième ordre à centre ou comme une transformée homographique de la surface parallèle à l'ellipsoïde : on peut construire ses lignes de courbure, et sa définition géométrique très-simple la rattache étroitement aux surfaces du second ordre; on peut la définir ainsi qu'il suit :

2. Soient S et s deux surfaces homofocales du second ordre, et P un de leurs plans principaux communs; par une droite D prise arbitrairement dans le plan P, menons un plan touchant la surface S au point M, et un plan touchant la surface S au point m. D'après un théorème connu, dû à M. Chasles, la droite Mm est perpendiculaire à D : on peut donc par D mener un plan perpendiculaire à Mm; appelons μ le point d'intersection de ces deux plans.

Lorsque D se déplace dans le plan P, le point μ décrit une surface Σ, et c'est cette surface dont je veux étudier les propriétés; je dirai, pour simplifier le langage, qu'à la droite D du plan P correspondent respectivement les points M, m et μ des surfaces S, s et Σ; en sorte qu'à chaque droite du plan correspondent deux points sur chacune des surfaces du second ordre, et quatre points sur la surface Σ.

3. En premier lieu, j'établirai la proposition suivante :

En un point quelconque μ de la surface Σ, la normale à la surface est la droite μmM qui joint les points correspondants sur les surfaces du second ordre homofocales.

A cet effet, considérons un point quelconque A situé sur la droite D, correspondant au point μ; le cône Θ, ayant pour sommet le point A et circonscrit à la surface Σ, touchera cette dernière au point μ, et, si l'on remarque que $Mm\mu$ est dans l'espace perpendiculaire au plan μD, on pourra définir ainsi qu'il suit le cône Θ, ou plutôt la courbe sphérique Θ' suivant laquelle ce cône est coupé par une sphère Q ayant pour centre le point A.

D'après un théorème connu, les traces sur la sphère Q des cônes circonscrits à S et s, et ayant pour sommet le point A, sont deux coniques sphériques homofocales S' et s'; le plan principal P coupe cette sphère suivant un axe sphérique P' commun à S' et à s'. Par un point quelconque d' de P', menons un arc de grand cercle touchant S' en M', et un arc de grand cercle touchant S' en m'; puis, par d', menons un arc de grand cercle perpendiculaire à l'arc de grand cercle qui joint M' et m'. En appelant μ' leur point d'intersection, on voit que, quand d' se déplacera sur P', μ' décrira la courbe de contour apparent Θ'.

Si la proposition que je veux démontrer est vraie, la tangente menée à Θ' au point μ' sera l'arc de grand cercle $\mu'd'$; et réciproquement cette proposition sera démontrée si la tangente sphérique au contour apparent est déterminée comme je viens de l'indiquer, quand l'œil est placé en un point quelconque de D, ou encore comme un plan est déterminé par deux des droites qu'il contient quand l'œil est placé en deux points distincts de D. Or, comme je vais le faire voir, cette construction de la tangente sphérique est facile à vérifier quand l'œil est placé en un des deux points où la droite D rencontre S.

4. Soit H un de ces deux points : la surface S est vue de ce point, suivant une ellipse sphérique S', et la surface s suivant les deux foyers f et φ de cette ellipse située sur l'arc de grand cercle perpendiculaire à P'.

Il s'agit donc de vérifier le théorème suivant :

Si d'un point d' de l'axe P′ d'une ellipse sphérique S′ on mène un arc de grand cercle touchant cette ellipse en M′, et si par d' on mène un arc de grand cercle perpendiculaire à fM′, f désignant l'un des deux foyers de f et φ de S′ situés sur un arc de grand cercle perpendiculaire à P′, leur point d'intersection μ décrit une courbe sphérique tangente à l'arc de grand cercle $\mu d'$; ou, en d'autres termes, le lieu du point μ est un cercle ayant pour centre le point f.

Ce théorème s'établit facilement dans le cas plus général où le point d', au lieu de décrire l'axe $f\varphi$, décrit un arc de grand cercle quelconque perpendiculaire à P′.

A cet effet, je ferai remarquer qu'il est évident lorsqu'on remplace l'ellipse sphérique par une ellipse plane et que le point M′ se meut parallèlement à l'un des axes; cela résulte immédiatement de ce qu'une conique plane et un cercle ayant pour centre l'un de ses foyers sont deux courbes homologiques; si maintenant on projette cette conique et les axes sur une sphère ayant pour centre un point de la droite menée par le foyer, perpendiculairement au plan de la conique, on obtient le lemme sur lequel je viens de m'appuyer.

La construction de la normale à la surface Σ, que j'ai donnée ci-dessus, est donc entièrement démontrée.

5. Quelques remarques sur ce qui précède ne seront pas inutiles. En premier lieu, on voit que les courbes sphériques de contour apparent de la surface Σ, quand l'œil est placé en un point de P, sont susceptibles d'une définition entièrement analogue à celle de la surface Σ, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Étant données deux ellipses sphériques homoocales, si, par un point quelconque D, *on mène des arcs de grand cercle tangents aux deux ellipses, et si l'on projette orthogonalement le point* D *sur l'arc de grand cercle qui joint le point de contact des tangentes avec les ellipses, le pied* μ *de l'arc projetant décrit une courbe sphérique tangente à l'arc de grand cercle* μD.

Il est à peine utile d'indiquer qu'un théorème analogue a lieu pour les coniques homofocales planes.

6. Les surfaces S et s sont respectivement coupées par le plan P, suivant des ellipses E et e qui sont des coniques doubles de Σ.

Des résultats précédents (n° 4) il résulte immédiatement que :

Le cône circonscrit à la surface Σ *et ayant pour sommet un point* H *de la conique* E *se compose de deux cônes de révolution coupant le plan* P *suivant les tangentes que l'on peut mener du point* H *à la conique* e, *et ayant pour axes les génératrices de* S *qui se croisent au même point.*

Ces quatre cônes ont en commun quatre plans tangents; deux d'entre eux se coupent suivant la tangente menée au point H à la conique E : ce sont les plans tangents à la surface en ce point; les deux autres, qui sont doublement tangents à Σ, se coupent suivant une perpendiculaire au plan P.

Il est facile de déterminer le degré de leur enveloppe. La surface Σ est de quatrième classe; en effet, le plan P ne touche évidemment pas la surface et à une droite quelconque de ce plan correspondent quatre points de la surface, et par conséquent quatre plans tangents.

Par suite, le cylindre doublement circonscrit dont je viens de parler est du second ordre, et il est facile de voir que sa trace sur le plan P est une conique homofocale à E et e.

D'où cette proposition :

La surface corrélative de la surface Σ *est une surface du quatrième ordre ayant une conique double.*

De là se déduiraient facilement diverses conséquences relatives aux coniques doubles de Σ et aux cônes du second degré qui lui sont circonscrits, mais je crois inutile de m'étendre à ce sujet.

7. D'après ce qui précède, on voit que toutes les droites telles que Mm sont normales à une même surface. Ce théorème est un cas particulier du théorème suivant, que j'ai donné, il y a déjà quelques années [*].

---

[*] *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques* (*Bulletin de la Société philomathique*, 1868). — *Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1872).

Étant données deux surfaces du second degré homofocales, si, par une droite D *située dans un plan fixe* P, *on mène des plans qui touchent respectivement ces surfaces en* M *et en* m, *toutes les cordes telles que* Mm *sont normales à une série de surfaces.*

Dans le cas général, cette série de surfaces comprend une surface anallagmatique du quatrième ordre; mais, comme je l'ai fait remarquer dans un des Mémoires cités ci-dessus, lorsque le plan fixe P est un plan principal commun aux deux surfaces du second ordre, cette anallagmatique disparaît et est rejetée entièrement à l'infini.

Il importait, dans ce cas, de définir géométriquement et d'une façon simple une surface particulière coupant orthogonalement le système des rayons; d'après ce qui précède, on voit que la surface Σ précédemment définie donne la solution de la question. Cette surface se comporte relativement aux anallagmatiques du quatrième ordre comme l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement relativement au cercle. Dans le cas général, on sait, comme je l'ai montré, déterminer les groupes de rayons qui forment des surfaces développables; il en résulte que l'on saura déterminer les lignes de courbure de Σ; mais, bien que cette détermination soit comprise comme cas particulier dans les propositions que j'ai données antérieurement sur ce sujet, je crois cependant utile de la faire directement.

8. *Étant donnée une conique quelconque* K *passant par les points d'intersection des coniques* E *et* e, *si la droite* D *se déplace tangentiellement à* K, *le point* μ *correspondant décrit une ligne de courbure de* Σ.

Démonstration. — Soient D une tangente quelconque à K touchant cette courbe au point A; M, m et μ les points qui correspondent respectivement à D sur les surfaces S, s et Σ. Si la droite D, par un déplacement infiniment petit, tourne autour du point A, les points M, m et μ viennent respectivement en M′, m' et μ'. Les plans polaires de A relativement aux surfaces S et s étant perpendiculaires à P, on voit que les droites MM′ et mm' se projettent sur ce plan suivant les polaires de A relativement aux coniques E et e; d'où il suit, puisque les coniques E, e et K ont quatre points communs, que ces projections se coupent sur la tangente en A à la conique K; en d'autres termes, les droites

MM' et mm' se coupent dans l'espace, les normales en μ et μ' sont donc dans un même plan et $\mu\mu'$ est tangente à une des lignes de courbure qui se croisent au point μ.

Corollaire. — Étant donné le plan tangent à la surface Σ au point μ, si l'on désigne par D la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan P et par A et B les points où la droite D touche les deux coniques du faisceau (E, e) qui lui sont tangentes, les droites μA et μB sont les directions des axes de l'indicatrice au point μ.

Connaissant, comme je l'ai montré plus haut, huit cônes de révolution circonscrits à la surface et la touchant au point μ, on pourrait construire sans peine les grandeurs de ces axes; mais les constructions que l'on déduit immédiatement de cette considération ne me paraissent pas assez simples pour être rapportées ici.

9. Examinons, dans quelques cas particuliers remarquables, ce que devient la surface Σ.

Si la surface s se réduit à la focale de S située dans le plan P, Σ se confond avec S, et l'on retrouverait ainsi, si on le voulait, les lignes de courbure de cette dernière surface.

Si s se réduit à une focale de S située dans un plan perpendiculaire à P, Σ est une *cyclide de Dupin*. Supposons enfin que les surfaces S et s se confondent; soient M un point quelconque de S et MQ la perpendiculaire abaissée de ce point sur P, il est facile de voir que la droite Mm est alors la symétrique de MQ relativement au plan tangent mené en M à la surface S; en d'autres termes, Mm provient de la réflexion du rayon MP sur cette surface, et l'on voit, conformément au théorème de Dupin, que tous les rayons réfléchis sont normaux à Σ. De la construction donnée par le point μ on déduit d'ailleurs que $M\mu = MP$; la surface Σ est donc, dans ce cas, une *anticaustique par réflexion de la surface du second ordre, les rayons incidents étant parallèles à l'un de ses axes*.

10. De la construction que j'ai donnée des lignes de courbure de Σ on déduit facilement que les développables, lieu des normales le long d'une de ces lignes de courbure, coupent les surfaces du second ordre S et s suivant un système de lignes conjuguées : je veux dire qu'en chaque point de l'une de ces surfaces les tangentes aux courbes du système qui s'y croisent forment un système de droites conjuguées relativement à l'indicatrice en ce point.

De là diverses conséquences intéressantes découlant immédiatement de cette proposition due à M. Ribaucour : « Si les développables lieu des normales à une surface découpent un réseau conjugué sur une surface du second ordre S, elles y découpent un second réseau également conjugué; elles tracent deux réseaux conjugués sur chacune des surfaces homofocales à S. Chacune des développables est elle-même circonscrite à une surface du second ordre homofocale à S [*]. »

11. Il est facile de démontrer que la surface Σ la plus générale est *une anticaustique par réfraction d'une surface du second ordre, les rayons incidents étant parallèles à l'un des axes de cette surface.*

A cet effet, par une droite D du plan P menons un plan touchant la surface S en M et les deux plans tangents à s; en appelant m et m' les points de contact de ces derniers plans, si l'on mène par D des plans respectivement perpendiculaires à Mm et à Mm', ils couperont ces droites en deux points μ et μ' situés sur la surface Σ, et que je désignerai sous le nom de *points associés* de cette surface relativement à S. D'une proposition que j'ai donnée antérieurement [**] il résulte que les droites $M\mu$ et $M\mu'$ sont également inclinées sur le plan MD, et que, par suite, les longueurs $M\mu$ et $M\mu'$ sont égales.

Imaginons maintenant la sphère ayant pour centre le point M et pour rayon $M\mu$; cette sphère, d'après les propositions précédentes, touche la surface Σ aux points μ et μ'; les plans tangents menés à Σ en ces points se coupent d'ailleurs sur le plan P suivant la droite D qui est située dans le plan mené en M tangentiellement à S. On en

---

[*] *Notice sur les travaux mathématiques de M. Ribaucour*, 1873.

[**] *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques* (*Bulletin de la Société philomathique*, 18 janvier 1868).

Étant données deux surfaces homofocales A *et* B *et une droite* D, *menons par cette droite les plans tangents aux deux surfaces, et soient* b *et* b' *les points de contact relatifs à la surface* B, *à l'un des points de contact relatifs à la surface* A; *les droites* ab, ab' *sont dans un même plan avec la normale au point* a *et également inclinées sur cette normale.*

conclut immédiatement que le rayon de la sphère varie proportionnellement à la distance de son centre au plan P. La surface Σ, qui est l'enveloppe de cette sphère, est donc, pour un indice de réfraction convenablement déterminé, une anticaustique de S, les rayons incidents étant perpendiculaires au plan P.

12. Une partie des résultats précédents peut facilement être généralisée. En se reportant, en effet, à la proposition que j'ai rappelée ci-dessus (n° **7**), on voit que l'anallagmatique, trajectoire orthogonale du système de rayons qu'elle définit, est rejetée à l'infini, non-seulement quand le plan fixe P est un plan principal commun aux deux surfaces homofocales, mais encore dès qu'il passe par leur centre; les surfaces trajectoires de ces rayons doivent donc être considérées comme des surfaces parallèles à une anallagmatique rejetée à l'infini.

Pour étudier directement ces surfaces, considérons d'abord une anallagmatique Σ_0 déterminée par une surface du second ordre S et une sphère Θ d'un rayon donné arbitrairement; étant donné un point quelconque M sur la surface S, en désignant par D la distance de M à la sphère (distance comptée sur une tangente) et par δ la distance constante du centre de la sphère à un plan quelconque P passant par le centre de S, si l'on considère une sphère ayant pour centre le point M et pour rayon la longueur $(D - \delta)$, l'enveloppe de ces sphères est une surface parallèle à l'anallagmatique Σ_0.

Si maintenant on imagine que le centre de la sphère Θ s'éloigne indéfiniment suivant une direction perpendiculaire au plan P, son rayon conservant toujours du reste une valeur finie, l'anallagmatique Σ_0 est alors rejetée à l'infini : la longueur $(D - \delta)$ devient la distance du point M au plan P et la surface Σ parallèle à Σ_0 une anticaustique par réflexion de S, les rayons incidents étant perpendiculaires à P.

Pour déterminer les lignes de courbure de cette anticaustique, je rappellerai les propositions suivantes, que j'ai données dans ma Note *Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques* déjà citée.

Étant donnée une surface anallagmatique Σ_0 *définie au moyen d'une surface de second ordre* S *et d'une sphère directrice* Θ, *imaginons la surface développable qui leur est circonscrite : elle a pour lignes doubles quatre coniques planes;* H *désignant l'une quelconque de ces coniques* *et* Q *son plan,* H *est situé sur une surface du second ordre s homofocale à* S. *Si par une droite* D, *prise arbitrairement dans le plan* Q, *on mène un plan tangent à* S *et un plan tangent à s, la droite qui joint les points de contact est normale à* Σ_0.

Imaginons une quelconque des coniques passant par les quatre points communs au plan Q *et aux surfaces* S *et s, lorsque la droite* D *roulera sur cette conique, les normales à* Σ_0 *correspondantes formeront une surface développable et traceront une ligne de courbure sur cette surface et sur toutes celles qui lui sont parallèles.*

13. Appliquons cette proposition au cas où la sphère Θ s'éloigne à l'infini dans une direction Π perpendiculaire au plan P, son rayon demeurant fini. La surface développable circonscrite se réduit alors sensiblement à deux cylindres infiniment peu différents l'un de l'autre et dont les génératrices sont sensiblement parallèles à Π. Une seule de ses lignes doubles est à distance finie : c'est une conique différant infiniment peu de la section de la surface S par le plan conjugué à la direction Π; la surface homofocale qui la renferme diffère elle-même infiniment peu de S; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Considérons des rayons lumineux parallèles à une direction Π *et venant se réfléchir sur une surface de second ordre* S; *soit* Ω *la courbe de contact de cette surface avec la développable* [*] *isotrope qui lui est circonscrite. Le plan conjugué à la direction* Π *rencontre* Ω *en quatre points; considérons l'une quelconque des coniques qui passe par ces quatre points; sa polaire, relativement à* S, *est un cylindre du second ordre coupant* S *suivant une biquadratique. Les rayons réfléchis le long de cette biquadratique forment une surface développable, et par conséquent déterminent sur l'anticaustique une ligne de courbure.*

14. Les mêmes considérations s'appliquent au cas de la réfraction, en supposant que la sphère Θ, en s'éloignant à l'infini, demeure toujours inscrite dans un cône de révolution donné.

---

[*] J'appelle ainsi la développable dans laquelle sont inscrites toutes les surfaces homofocales à S.

On obtient ainsi le théorème suivant :

Étant données deux surfaces homofocales du second ordre S *et* s *et un plan fixe* P *passant par leur centre commun, si, par une droite* D *prise arbitrairement dans le plan* P, *on mène un plan tangent à* S *et un plan tangent à* s, *la droite qui joint les points de contact engendre, lorsque* D *se déplace, un système de rayons.*

Tous ces rayons peuvent être considérés comme provenant de rayons incidents parallèles et se réfractant sur S *avec un indice de réfraction convenablement choisi; ils peuvent être également considérés comme provenant des rayons incidents parallèles et se réfractant sur* s, *la direction de ces seconds rayons et leur indice de réfraction étant généralement différents de la première direction et du premier indice de réfraction.*

Ces rayons sont normaux à deux anticaustiques par réfraction, la première relative à la surface S *et la deuxième à la surface* s, *et l'on peut déterminer les lignes de courbure de ces anticaustiques.*

Je ne sais si l'on avait remarqué les rapports étroits qui relient entre elles la théorie des anticaustiques des surfaces du second ordre et la théorie des surfaces homofocales, non plus que la détermination simple qui en résulte de leurs lignes de courbure.