JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Supplément au Mémoire sur le mouvement de rotation de la Terre

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 161-164.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__161_0>

Supplément au Mémoire sur le mouvement de rotation de la Terre;

PAR M. ÉMILE MATHIEU [*].

Explication de l'extrême petitesse du rapport $\frac{B-A}{B}$.

17. Bien que l'on dût s'attendre à ce que le rapport $\frac{B-A}{B}$ fût notablement plus petit que l'aplatissement de la Terre, on peut être surpris de trouver que cette quantité est plus petite que le $\frac{1}{10000}$ de cet aplatissement, quand on songe à l'irrégularité de la profondeur des mers et aux différences de niveau des divers points de la surface terrestre, qui s'éloigne sensiblement de l'ellipsoïde, d'après les mesures directes qui ont été faites des degrés des méridiens; et l'on ne saurait admettre davantage que la Terre est exactement de révolution.

Cependant on peut s'expliquer l'égalité de B et A par les réflexions suivantes.

La Terre a été originairement fluide, et, si l'on imagine que dans cet état elle ait tourné autour d'un axe de direction invariable, elle était formée de couches ellipsoïdales de révolution; à cette époque, B était égal à A. Les cataclysmes qui ont ensuite eu lieu à la surface de la Terre, devenue solide, ont notablement altéré cette surface; mais l'égalité des deux moments principaux d'inertie A et B dans un corps n'implique pas nécessairement que ce corps soit de révolution, et l'on peut très-bien comprendre que, certains terrains s'étant élevés et d'autres abaissés, il s'est fait, en général, une compensation, en sorte que B — A ne soit pas resté nul, mais soit devenu une petite quantité.

Aussitôt qu'une différence entre B et A a eu lieu, l'action du Soleil et de la Lune a produit un petit balancement de l'axe de rotation de la

[*] *Voir* ce Recueil, même tome, p. 33.

11

Terre autour de l'axe de son plus grand moment d'inertie. Ces petites oscillations ont produit des mouvements intérieurs de la masse en fusion qui, par ses frottements, ont dû tendre à éteindre ces oscillations; mais, comme elles ne pouvaient disparaître que par l'égalité de B et A, la masse liquide intérieure a dû lentement soulever ou abaisser des parties de la croûte terrestre, ainsi que cela a encore lieu maintenant, de manière à rétablir l'égalité des deux moments d'inertie.

Laplace, dans sa *Mécanique céleste* (I^{re} Partie, Liv. III, n° 32) et dans son *Exposition du système du monde* (Note VII), suppose que les fluides qui recouvrent la Terre ont détruit par leur frottement et par leur résistance les oscillations primitives de son axe de rotation. Cette hypothèse peut paraître vraisemblable quand on ne sait pas que les deux moments principaux par rapport aux axes de l'équateur doivent être égaux pour que ces oscillations disparaissent; mais il est évident que les mouvements intérieurs de la Terre peuvent, plutôt que les mouvements des fluides à sa surface, amener l'égalité des deux moments d'inertie A et B.

Ainsi, en résumant, nous avons trouvé d'abord que la quantité $\frac{B-A}{B}$, si elle n'est pas nulle, est si petite que les résultats de toutes les observations astronomiques sont les mêmes que si B était égal à A; en second lieu, il résulte des réflexions qui précèdent qu'il y a lieu de penser que $\frac{B-A}{B}$ doit être encore bien au-dessous de la limite que nous avons calculée par cette considération au n° **15**.

Pour nous représenter la petitesse du rapport $\frac{B-A}{B}$ trouvé dans ce numéro, comparons la Terre à un ellipsoïde homogène de même masse dont les demi-axes, peu différents entre eux, soient désignés par a, b, c, a étant le plus grand et c le plus petit. En représentant par M la masse de l'ellipsoïde, on aura, pour les moments principaux d'inertie de cet ellipsoïde par rapport aux axes $2a$ et $2b$,

$$A = \frac{M(b^2+c^2)}{5}, \quad B = \frac{M(a^2+c^2)}{5}$$

et par suite

$$\frac{B-A}{B} = \frac{a^2-b^2}{a^2+c^2};$$

on aura donc à très-peu près

$$\frac{B-A}{B}=\frac{a-b}{a}.$$

En mettant pour a le rayon de la Terre et supposant $a-b=2^{m}$, nous aurons

$$\frac{B-A}{B}=\frac{2}{6366600}=\frac{1}{3133300}.$$

Donc la quantité $\frac{B-A}{B}$ relative à la Terre est plus petite que la même quantité relative à un ellipsoïde dont les trois axes différeraient peu et les demi-axes a et b seulement de 2 mètres, résultat bien remarquable quand on songe que les différences de niveau des divers points de la surface du globe terrestre peuvent s'élever à 8000 mètres.

Les oscillations des mers, par suite du phénomène du flux et du reflux, doivent faire varier la quantité $\frac{B-A}{B}$, dont la valeur moyenne est nulle; mais il n'en peut résulter que des oscillations insensibles de l'axe de rotation. En effet, les plus hautes marées des côtes de France situées sur l'océan Atlantique sont de 3 mètres; si l'on suppose le globe terrestre formé entièrement d'eau et que l'on prenne 3 mètres pour la plus grande différence de hauteur de la mer, sur deux diamètres de l'équateur perpendiculaires entre eux, on aura

$$\frac{B-A}{B}=\frac{3}{6366600};$$

mais, comme la densité moyenne de la Terre est égale à cinq fois celle de l'eau, cette quantité devrait encore être divisée par 5; elle est donc extrêmement petite.

La démonstration de l'égalité de B et A par l'observation des oscillations du pendule ou par la détermination de la longueur du pendule qui bat la seconde exigerait un nombre immense d'observations faites à la surface de la Terre et qu'il faudrait soumettre ensuite au calcul; mais il semble même par ce moyen à peu près impossible d'atteindre à la précision à laquelle je suis parvenu. On doit remarquer que ma méthode pour étudier le rapport $\frac{B - A}{B}$ consiste à prendre pour pendule la Terre elle même, et de l'invariabilité de son axe de rotation je conclus l'égalité de A et B.

Pour terminer, remarquons cette phrase de Poisson (*Sur le mouvement d'un corps solide, Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XIV, p. 298; 1838) : « Il est bien remarquable que les mêmes forces qui font décrire dans le ciel aux pôles de rotation de la Terre un cercle d'une grande étendue, à la vérité dans un temps très-long, soient impuissantes pour changer leur position à la surface et qu'elles n'y produisent que des oscillations très-rapides dont l'étendue est insensible. »

D'après les recherches précédentes, l'explication du fait signalé par Poisson est facile. Les inégalités de la précession ont en effet, comme on sait, pour coefficient, la quantité $\frac{2C - A - B}{2C}$, qui a une valeur sensible, tandis que les inégalités du déplacement des pôles à la surface de la Terre ont pour coefficient la quantité $\frac{B - A}{B}$, qui est nulle ou insensible.