JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Mémoire sur le mouvement de rotation de la Terre

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 33-68.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__33_0>

Mémoire sur le mouvement de rotation de la Terre;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

L'étude du mouvement de rotation de la Terre autour de son centre de gravité peut se partager en deux parties. On peut en effet examiner le mouvement absolu de l'axe de rotation de la Terre dans l'espace, c'est-à-dire son déplacement par rapport à la sphère céleste, et l'on obtient ainsi les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe de la Terre. Cette question a été traitée avec toute l'approximation désirable par M. Serret (*Annales de l'Observatoire*, t. V, 1859), et elle n'est point examinée dans ce travail. En second lieu on peut rechercher le mouvement de cet axe de rotation par rapport à la Terre ou le déplacement des pôles à sa surface, et déterminer la vitesse de rotation autour de cet axe. Cette question m'a semblé susceptible de nouvelles recherches, et c'est à son examen que se rapporte ce Mémoire.

Les formules de perturbation du mouvement de rotation d'un corps solide, qui n'est sollicité que par des forces perturbatrices, sont exactement les mêmes que les formules de perturbation du mouvement d'une planète. J'ai expliqué dans un autre Mémoire d'où provient cette coïncidence (*Journal de Mathématiques*, 1875, p. 183), et j'y ai donné le théorème général sur lequel elle repose. Il suit de là que les deux principaux problèmes que l'on rencontre dans la Mécanique céleste, à savoir la recherche du mouvement de translation des planètes et de leurs satellites et celle de leur mouvement de rotation autour de leurs centres de gravité, peuvent être étudiés au moyen des mêmes formules. Poisson rappelle cette propriété remarquable dans la préface de son *Mémoire sur la rotation de la Terre autour de son centre de gravité* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VII, 1827), et cependant il préfère, pour faire ses calculs, substituer à ces formules un système d'autres formules assez différent [*].

La démonstration que je donne de l'invariabilité du jour sidéral, et qui est fondée sur le théorème général dont j'ai parlé, est entièrement différente de celle de Poisson; mais les deux démonstrations ne se séparent pas seulement par la forme, car Poisson, pour simplifier ses calculs, fait une supposition qu'il regarde comme suffisamment approchée et qui n'est pas admissible. Elle consiste à regarder les orbites du Soleil et de la Lune, qui troublent le mouvement de rotation de la Terre, comme circulaires et situées dans un même plan. Or je montre que cette recherche exige trop de précision pour que l'on puisse faire cette simplification.

On reconnaîtra sans peine que mon analyse pourrait être beaucoup simplifiée par chacune des deux hypothèses suivantes :

1° Si l'on supposait que la Terre est exactement de révolution;

2° Si l'on pouvait considérer les orbites du Soleil et de la Lune comme circulaires et situées dans le même plan.

La seconde supposition, comme je l'ai dit, ne peut être admise. Pour la première hypothèse, on doit penser qu'elle approche beaucoup de la réalité si l'on se reporte à l'origine fluide de la Terre. Cependant il y a aussi utilité à ne pas la faire *a priori*, d'abord parce que la quantité $\frac{B-A}{B}$, où A et B désignent les plus petits moments principaux d'inertie par rapport au centre de gravité, joue un rôle important dans cette théorie, tant qu'on ne la suppose pas excessivement petite, et ensuite afin de faire servir à la détermination de cette quantité la comparaison des résultats de l'analyse aux observations.

En effet il semble résulter des observations du pendule que le rapport $\frac{B-A}{B}$ est notablement plus petit que le nombre qui représente l'aplatissement de la Terre. Cependant, à cause des nombreuses irrégularités de la surface du globe terrestre, la démonstration de la peti-

[*] Poisson s'était occupé auparavant de la démonstration de la constance du jour sidéral (*Journal de l'École Polytechnique*, t. VIII, p. 198); mais cette démonstration est très-inférieure à celle qu'il a donnée plus tard.

tesse de $\frac{B-A}{B}$ à l'aide du pendule exigerait un très-grand nombre d'observations faites en plusieurs points de divers méridiens, qu'il faudrait ensuite soumettre au calcul; mais la véritable méthode pour calculer cette quantité réside dans la théorie actuelle, et je démontre que, si l'on admet que la latitude d'un lieu de la Terre ne peut varier de deux secondes dans un espace de temps d'environ 153 jours, il en résulte que le rapport $\frac{B-A}{B}$ est plus petit que $\frac{1}{3000000}$, et par suite plus petit que $\frac{1}{10000}$ de l'aplatissement.

Rappel des formules relatives au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

1. Supposons un corps qui tourne autour d'un point fixe. Désignons par A, B, C les grandeurs des moments principaux d'inertie du corps autour de ce point. Prenons pour axes des coordonnées rectangulaires des x_1, y_1, z_1 respectivement les trois axes principaux d'inertie A, B, C, et désignons sous le nom d'*équateur* le plan qui passe par ces deux premiers axes. Imaginons un second système d'axes rectangulaires des x, y, z qui soit fixe et qui ait la même origine. Désignons : 1° par ψ l'angle compris entre l'axe des x et la trace du plan des x_1, y_1 sur le plan des x, y; 2° par φ l'angle de cette trace et de l'axe des x_1; 3° par θ l'inclinaison du plan des x_1, y_1 sur le plan des x, y.

Si le corps n'est sollicité par aucune force, il existe pour son mouvement un plan du maximum des aires, qui est invariable de position. Imaginons que le plan ci-dessus des x, y coïncide avec le plan invariable, et désignons par ψ_1, φ_1, θ_1 les mêmes angles relativement au plan invariable que ψ, φ, θ pour le plan des x, y. Toutefois il importe de définir les trois angles φ_1, θ_1, ψ_1 avec plus de précision, ainsi que nous allons le faire.

Imaginons une sphère dont le centre soit à l'origine des coordonnées, et examinons le triangle sphérique déterminé sur sa surface par le plan fixe des x, y, par le plan invariable et par le plan de l'équateur. L'angle ψ représente la longitude de la trace de l'équateur sur le grand cercle déterminé par le plan des x, y; désignons par α la longitude du nœud du plan invariable sur le même plan, de sorte qu'un des côtés du triangle sphérique est égal à $\psi - \alpha$. Les angles φ_1 et φ représentent ceux que fait l'axe principal A avec l'intersection du plan de l'équateur par le plan invariable et par le plan des x, y; donc $\varphi_1 - \varphi$ est le côté du triangle sphérique situé sur l'équateur. Enfin, en convenant de compter l'angle ψ_1 à partir du nœud du plan invariable, nous pouvons prendre pour ψ_1 le côté du triangle sphérique situé sur ce plan. Désignons aussi par γ l'inclinaison du plan invariable sur le plan fixe; alors γ, θ_1, $\pi - \theta$ seront respectivement les trois angles opposés dans le triangle aux trois côtés $\varphi_1 - \varphi$, $\psi - \alpha$, ψ_1. Donc, d'après les formules de la Trigonométrie, nous aurons

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\cos\theta = \cos\gamma\cos\theta_1 - \sin\gamma\sin\theta_1\cos\psi_1, \\ &\sin(\varphi_1 - \varphi)\sin\theta = \sin\psi_1\sin\gamma, \\ &\sin(\psi - \alpha)\sin\theta = \sin\psi_1\sin\theta_1. \end{aligned} \right.$$

Ces trois formules nous permettront de calculer φ, θ, ψ, quand nous aurons déterminé φ_1, θ_1, ψ_1.

Soit ω la grandeur de la vitesse de la rotation instantanée du corps, et soient p, q, r ses trois composantes suivant les trois axes principaux d'inertie A, B, C. Le principe des forces vives donne l'équation.

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h,$$

où h est une constante, et le théorème des aires pris relativement au plan invariable fournit cette autre équation

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2,$$

dont nous désignerons la constante k sous le nom d'*axe du plan invariable*. En le supposant porté sur une normale à ce plan et le projetant sur les axes principaux, on obtient les formules

$$\text{(B)} \qquad Ap = k\sin\theta_1\sin\varphi_1, \quad Bq = k\sin\theta_1\cos\varphi_1, \quad Cr = k\cos\theta_1.$$

Enfin nous rappellerons les deux formules suivantes, que l'on trouve dans tous les Traités de Mécanique :

$$(\mathrm{C}) \qquad dt = \frac{\mathrm{C}\sqrt{\mathrm{AB}}\,dr}{\sqrt{-k^2 + 2\mathrm{B}h + \mathrm{C}(\mathrm{C}-\mathrm{B})r^2}\,\sqrt{k^2 - 2\mathrm{A}h - \mathrm{C}(\mathrm{C}-\mathrm{A})r^2}},$$

$$(\mathrm{D}) \qquad d\psi_1 = \frac{k(2h - \mathrm{C}r^2)}{k^2 - \mathrm{C}^2 r^2}\,dt.$$

A l'aide de ces deux formules, on peut calculer r et ψ_1 en fonction de t, et l'on aura ensuite facilement toutes les autres inconnues par les formules qui précèdent.

Sur le calcul du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

2. Cherchons à appliquer les formules précédentes au globe terrestre, en plaçant l'origine des coordonnées à son centre de gravité. Désignons par C le plus grand des trois moments principaux d'inertie en ce point, par B le moyen et par A le plus petit. Comme on ne peut douter que la Terre soit à très-peu près de révolution, les deux quantités B et A ne peuvent différer que d'une quantité très-petite.

Les formules du numéro précédent ne sont pas immédiatement applicables au mouvement de rotation de la Terre autour de son centre de gravité; car, la Terre n'étant pas composée de couches homogènes exactement concentriques, elle est sollicitée dans ce mouvement par l'action perturbatrice du Soleil et de la Lune. Cependant les équations qui donnent φ_1, θ_1, ψ_1, φ, θ, ψ pourront toutes être conservées, pourvu que l'on regarde les constantes arbitraires comme des quantités variables données par les formules de perturbation. Les quantités φ_1, θ_1, ψ_1 conserveront la même signification que ci-dessus; seulement le plan invariable sera supposé mobile, mais il restera constamment le plan du maximum des aires décrites par les projections des rayons vecteurs, menés du centre de gravité à toutes les molécules du globe.

Désignons par β le second membre de l'équation des aires prise par rapport au plan des x, y dans le mouvement non troublé. Désignons par τ la constante qui s'ajoute au temps t et désignons par g la valeur de ψ_1 quand t est égal à $-\tau$; g représentera aussi la distance angulaire, à la ligne des nœuds, d'un point du plan invariable qui ne se mouvra dans ce plan qu'en vertu de la perturbation. Les six constantes arbitraires h, k, β, τ, g, α, devenues variables, satisfont aux six équations différentielles canoniques suivantes :

$$(\mathrm{E}) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{d\Omega}{d\tau}, & \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{d\Omega}{dh}, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{d\Omega}{d\beta}, & \frac{d\beta}{dt} &= -\frac{d\Omega}{d\alpha}, \\ \frac{dk}{dt} &= \frac{d\Omega}{dg}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{d\Omega}{dk}, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles Ω désigne la fonction perturbatrice. (*Voir* mon *Mémoire sur des formules de perturbation, Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I, p. 183.)

Pour calculer la vitesse de rotation de la Terre, il suffira d'examiner les trois quantités p, q, r qui représentent ces composantes suivant les axes principaux d'inertie. D'après les formules (B), on a

$$p = \frac{k \sin\theta_1 \sin\varphi_1}{\mathrm{A}}, \qquad q = \frac{k \sin\theta_1 \cos\varphi_1}{\mathrm{B}};$$

$\sin\theta_1$ peut être calculé en fonction de t et des éléments troublés $h, k, \ldots$, et il suffira de prouver que θ_1 n'aura jamais que des valeurs insensibles, pour qu'il en soit de même des valeurs de p et q. Ensuite, de l'équation $\mathrm{C}r = k\cos\theta_1$, on tirera, parce que θ_1 est très-petit,

$$r = \frac{1}{\mathrm{C}} k \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right),$$

et, si l'on prouve de plus que k ne peut subir que des variations insensibles, la même chose aura lieu pour r.

La précession et la nutation seraient déterminées par le calcul des angles α et γ; α est donné par la troisième formule (E), et l'angle γ se déduirait de la quatrième et de la cinquième formule (E), puisque l'on a $\beta = k\cos\gamma$. Mais nous n'avons pas à nous occuper de cette détermination dans ce Mémoire.

Examen des valeurs des angles θ_1, φ_1, ψ_1, quand l'angle θ_1 reste toujours très-petit.

3. Examinons comment on peut simplifier les formules qui donnent les angles φ_1, θ_1, ψ_1, quand l'angle θ_1 est très-petit. C'est ce qui a lieu pour le globe terrestre; car son axe de rotation ne s'écarte de l'axe du plus grand moment d'inertie que d'une quantité qui n'a pu jusqu'à présent être reconnue par les observations, et, comme le sinus de cet écart est égal à

$$\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = C\theta_1\sqrt{\frac{\sin^2\varphi_1}{A^2}+\frac{\cos^2\varphi_1}{B^2}},$$

en négligeant le cube de θ_1 il faut en conclure que θ_1 est très-petit.

Portons les expressions (B) du n° **1** dans l'équation du principe des forces vives, et nous aurons la formule

$$(1)\quad 2h - k^2\left(\frac{1}{A}\sin^2\varphi_1 + \frac{1}{B}\cos^2\varphi_1\right) = k^2\cos^2\theta_1\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\sin^2\varphi_1 - \frac{1}{B}\cos^2\varphi_1\right),$$

qui établit une relation entre φ_1 et θ_1. Dans la formule (C) mettons $k\cos\theta_1$ au lieu de Cr, et nous aurons

$$dt = \frac{C\sqrt{AB}\,k\sin\theta_1\,d\theta_1}{\sqrt{(2hC-k^2)B - k^2(C-B)\sin^2\theta_1}\,\sqrt{k^2(C-A)\sin^2\theta_1 - (2hC-k^2)A}}.$$

De l'équation des forces vives et de celle des aires on déduit

$$2h - \frac{k^2}{C} = A\frac{C-A}{C}p^2 + B\frac{C-B}{C}q^2,$$

ce qui prouve que la quantité du premier membre est très-petite et positive, puisque C est plus grand que A et B. D'après cela, il faut, pour que l'expression de dt soit réelle, que l'on ait

$$\sin^2\theta_1 < \frac{(2hC-k^2)B}{k^2(C-B)},\quad \sin^2\theta_1 > \frac{(2hC-k^2)A}{k^2(C-A)},$$

et, par conséquent, θ_1 oscille entre les deux valeurs indiquées par ces deux inégalités; dans le cas particulier où B est égal à A, on a

$$\sin^2\theta_1 = \frac{(2hC - k^2)A}{k^2(C - A)},$$

et l'angle θ_1 reste invariable dans le mouvement non troublé.

De la formule (D) du n° **1** on déduit aussi

$$d\psi_1 = \frac{2hC - k^2 + k^2\sin^2\theta_1}{k^2\sin^2\theta_1}dt.$$

Supposons maintenant θ_1 très-petit; en remplaçant $\sin\theta_1$ par θ_1, nous aurons

$$(2)\quad dt = \frac{C\sqrt{AB}\,k\,\theta_1\,d\theta_1}{\sqrt{(2hC - k^2)B - k^2(C - B)\theta_1^2}\,\sqrt{k^2(C - A)\theta_1^2 - (2hC - k^2)A}},$$

$$(3)\quad d\psi_1 = \frac{C\sqrt{AB}\,k(2hC - k^2 + k^2\theta_1^2)\,d\theta_1}{\theta_1\sqrt{(2hC - k^2)B - k^2(C - B)\theta_1^2}\,\sqrt{k^2(C - A)\theta_1^2 - (2hC - k^2)A}}.$$

Posons

$$\sqrt{\frac{(2hC - k^2)A}{k^2(C - A)}} = b,\quad \sqrt{\frac{(2hC - k^2)B}{k^2(C - B)}} = c,\quad \theta_1^2 = u;$$

nous aurons, pour l'équation qui donne dt,

$$\frac{2k}{C}\sqrt{\frac{(C - B)(C - A)}{BA}}\,dt = \frac{du}{\sqrt{(c^2 - u)(u - b^2)}},$$

et par suite

$$(4)\quad \frac{2k}{C}\sqrt{\frac{(C - B)(C - A)}{BA}}\,(t + \tau) = \int_{b^2}^{u}\frac{du}{\sqrt{(c^2 - u)(u - b^2)}},$$

en désignant par $-\tau$ le temps pour lequel θ_1 prend sa valeur minimum b. Posons, pour simplifier,

$$(5)\quad \frac{2k}{C}\sqrt{\frac{(C - B)(C - A)}{BA}}\,(t + \tau) = v,$$

et l'équation précédente deviendra

$$v = \arc\cos\frac{b^2+c^2-2u}{c^2-b^2};$$

on en conclut

$$(6)\qquad u = \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{b^2-c^2}{2}\cos v$$

ou, en remplaçant b, c par leurs valeurs, posant

$$\frac{(C-B)(C-A)}{ABC^2} = L,\quad \frac{1}{A}+\frac{1}{B}-\frac{2}{C} = M,\quad \frac{B-A}{AB} = N,$$

et remettant θ_1^2 à la place de u,

$$\theta_1^2 = \left(2h - \frac{k^2}{C}\right)\frac{1}{2Lk^2}\left[M - N\cos 2k\sqrt{L}(t+\tau)\right].$$

4. De la formule (1) on tire, en remplaçant $\sin\theta_1$ par θ_1,

$$\sin^2\varphi_1 = \frac{A(B-C)}{C(B-A)} + \frac{AB}{B-A}\left(2h-\frac{k^2}{C}\right)\frac{1}{k^2\theta_1^2},$$

et, à cause de la valeur précédente de θ_1^2, on en déduit

$$\sin^2\varphi_1 = \frac{C-B}{BC}\,\frac{1+\cos v}{M-N\cos v},$$

$$\cos^2\varphi_1 = \frac{C-A}{AC}\,\frac{1-\cos v}{M-N\cos v},$$

$$\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = \sqrt{L}\,\frac{\sin v}{M-N\cos v}.$$

Le globe terrestre étant aplati vers les pôles de son axe de rotation, les quantités $\frac{C-A}{C}$, $\frac{C-B}{C}$, quoique petites, ont des valeurs sensibles qui mesurent l'aplatissement; au contraire $B-A$, s'il n'est pas nul, est très-petit, comparé à $C-A$, $C-B$, comme nous le démontrerons. Les trois expressions précédentes sont donc développables en séries très-convergentes, procédant suivant les puissances de $\frac{N}{M}$.

5. En adoptant les mêmes notations que ci-dessus pour écrire l'expression de $d\psi_1$ donnée par la formule (3) et la partageant en deux parties, on obtient facilement la formule

$$\psi_1 - g = \mathrm{J} + \mathrm{I},$$

où g désigne une constante arbitraire et où J et I ont les valeurs suivantes :

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2\mathrm{C}\sqrt{\mathrm{L}}}\int\frac{du}{\sqrt{(c^2-u)(u-b^2)}},$$
$$\mathrm{I} = \left(2h - \frac{k^2}{\mathrm{C}}\right)\frac{1}{2k^2\sqrt{\mathrm{L}}}\int\frac{du}{u\sqrt{(c^2-u)(u-b^2)}}.$$

Des formules (4) et (5) on déduit d'abord

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2\mathrm{C}\sqrt{\mathrm{L}}}\,v = \frac{k}{\mathrm{C}}(t+\tau).$$

Pour calculer I, nous avons

$$\int\frac{du}{u\sqrt{(c^2-u)(u-b^2)}} = \frac{-2}{bc}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{b}{c}\sqrt{\frac{c^2-u}{u-b^2}}\right);$$

or on déduit de la formule (6)

$$c^2 - u = \frac{c^2-b^2}{2}(1+\cos v),$$
$$u - b^2 = \frac{c^2-b^2}{2}(1-\cos v),$$
$$\frac{c^2-u}{u-b^2} = \cot^2\frac{v}{2};$$

l'intégrale précédente est donc égale à

$$-\frac{2}{bc}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{b}{c}\cot\frac{v}{2}\right),$$

et l'on a enfin

$$\mathrm{I} = -\operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{\frac{\mathrm{A}(\mathrm{C}-\mathrm{B})}{\mathrm{B}(\mathrm{C}-\mathrm{A})}}\cot\frac{v}{2}\right].$$

On en conclut

$$\psi_1 - g = \frac{k}{C}(t+\tau) - \text{arc tang}\left[\sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\cot\frac{v}{2}\right] + \text{const}.$$

Si l'on pose

$$\frac{C(B-A)}{B(C-A)} = \eta,$$

η est une très-petite quantité, et, en négligeant le carré de η, on a

$$\frac{A(C-B)}{B(C-A)} = 1-\eta,\quad \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}} = 1-\frac{\eta}{2}.$$

On a, en général, si h est assez petit pour qu'on en néglige le carré,

$$\text{arc tang}(x+h) = \text{arc tang}\,x + \frac{h}{1+x^2},$$

et, en faisant

$$x = \cot\frac{v}{2},\quad h = -\frac{\eta}{2}\cot\frac{v}{2},$$

on obtient

$$\text{arc tang}\left[\sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\cot\frac{v}{2}\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{v}{2} - \frac{\eta}{4}\sin v.$$

On a donc

$$\psi_1 - g = \frac{k}{C}(t+\tau) + \frac{v}{2} + \frac{\eta}{4}\sin v + \text{const}.$$

D'après ce que nous avons dit au n° **1**, l'angle ψ_1 est compté à partir du nœud du plan invariable sur le plan fixe. Si l'on veut que ψ_1 se réduise à g pour $t = -\tau$, la constante ajoutée au second membre sera nulle, et l'on aura

$$\psi_1 - g = \left(\frac{k}{C} + k\sqrt{L}\right)(t+\tau) + \frac{\eta}{4}\sin 2k\sqrt{L}(t+\tau).$$

Remarquons que la quantité g qui entre dans cette équation est précisément celle qui a été représentée par cette lettre au n° **2**. Si l'on tenait compte du carré de η, on verrait facilement qu'il faut ajouter au second membre de la formule précédente les termes

$$\frac{1}{8}\eta^2\sin 2k\sqrt{L}(t+\tau) + \frac{1}{32}\eta^2\sin 4k\sqrt{L}(t+\tau).$$

Formules qui déterminent les trois angles φ, θ, ψ.

6. Calculons les trois angles θ, φ, ψ définis au n° **1**, au moyen des formules (A), en nous appuyant sur ce que l'angle θ_1 est très-petit; ce qui nous permettra de négliger les puissances de θ_1 supérieures à la deuxième. De la première de ces formules

$$\cos\theta = \cos\gamma\cos\theta_1 - \sin\gamma\sin\theta_1\cos\psi_1,$$

on déduit

$$\cos\theta = \cos\gamma\,(1 - \theta_1\tan\!g\,\gamma\cos\psi_1 - \tfrac{1}{2}\theta_1^2);$$

on en conclut aussi ces formules qui nous serviront :

$$\sin^2\theta = \sin^2\gamma\left(1 + 2\theta_1\cot\gamma\cos\psi_1 + \theta_1^2\cot^2\gamma - \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_1^2}{2}\cos 2\psi_1\right),$$

$$\sin\theta\cos\theta = \sin\gamma\cos\gamma[1 + 2\theta_1\cot 2\gamma\cos\psi_1 - \tfrac{3}{2}\theta_1^2 - \theta_1^2(1 + \tfrac{1}{2}\cot^2\gamma)\cos 2\psi_1],$$

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\gamma}\left[1 - \theta_1\cot\gamma\cos\psi_1 + \frac{1}{4\sin^2\gamma}\theta_1^2 + \tfrac{1}{4}\theta_1^2(1 + 3\cot^2\gamma)\cos 2\psi_1\right].$$

De la formule du n° **1**

$$\sin(\psi - \alpha) = \sin\psi_1\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta},$$

on déduit

$$\sin(\psi - \alpha) = \frac{\theta_1\sin\psi_1}{\sin\gamma} - \theta_1^2\sin\psi_1\cos\psi_1\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}$$

et, avec le même degré d'approximation,

$$(a)\qquad \psi = \alpha + \frac{\theta_1\sin\psi_1}{\sin\gamma} - \theta_1^2\frac{\cos\gamma}{2\sin^2\gamma}\sin 2\psi_1.$$

Enfin on a la formule

$$\sin(\varphi_1 - \varphi) = \sin\psi_1\frac{\sin\gamma}{\sin\theta},$$

de laquelle on déduit

$$\sin(\varphi_1 - \varphi) = \sin\psi_1 \left[1 - \theta_1 \cot\gamma \cos\psi_1 + \frac{1}{4\sin^2\gamma}\theta_1^2 \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{4}\theta_1^2(1 + 3\cot^2\gamma)\cos 2\psi_1 \right].$$

Au moyen de cette formule qui donne le sinus de $\varphi_1 - \varphi$, on peut développer l'arc même suivant les puissances de θ_1, et l'on en conclut

$$(b) \qquad \varphi = \varphi_1 - \psi_1 + \theta_1 \sin\psi_1 \cot\gamma - \tfrac{1}{4}(1 + 2\cot^2\gamma)\theta_1^2 \sin 2\psi_1.$$

Des formules (a) et (b) on déduira facilement les sinus et cosinus de φ, ψ et de leurs multiples ordonnés suivant les puissances de θ_1.

Calcul de la fonction perturbatrice.

7. Soient S la masse du Soleil, qu'on peut supposer réunie à son centre de gravité, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées de ce centre de gravité, rapportées respectivement aux axes principaux d'inertie A, B, C, passant par le centre de gravité de la Terre. Soient aussi a, b, c les trois coordonnées rapportées aux mêmes axes d'un point du globe terrestre, et dm un élément de sa masse qui passe en ce point. L'attraction de S produit la fonction perturbatrice

$$V = S \int \frac{dm}{[(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

l'intégrale s'étendant à la masse entière de la Terre. Désignons par L la masse de la Lune, et par x'_1, y'_1, z'_1 les mêmes coordonnées pour la Lune que x_1, y_1, z_1 pour le Soleil; l'attraction de L donne la fonction perturbatrice

$$V' = L \int \frac{dm}{[(x'_1 - a)^2 + (y'_1 - b)^2 + (z'_1 - c)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

et la fonction Ω du n° **2** est la somme de V et V'.

D'après les propriétés du centre de gravité et des axes principaux d'inertie, on a

$$\int a\,dm = 0, \quad \int b\,dm = 0, \quad \int c\,dm = 0,$$
$$\int bc\,dm = 0, \quad \int ca\,dm = 0, \quad \int ab\,dm = 0.$$

Désignons par ρ et u les distances de S et de l'élément dm au centre de gravité de la Terre; en développant suivant les puissances de a, b, c la quantité comprise sous le signe $\int$ dans l'expression de V, nous aurons

$$V = \frac{S}{\rho}\int dm - \frac{S}{2\rho^3}\int u^2\,dm + \frac{3S}{2\rho^5}\left(x_1^2\int a^2dm + y_1^2\int b^2dm + z_1^2\int c^2dm\right) + \delta V,$$

δV étant la partie de V qui résulterait des termes du troisième degré et d'ordres supérieurs par rapport à a, b, c. Si aux coordonnées x_1, y_1, z_1, rapportées à des axes mobiles, on substitue les coordonnées x, y, z, rapportées aux axes fixes du n° **1**, les quantités x_1, y_1, z_1 seront exprimées au moyen de ces coordonnées et des angles φ, θ, ψ; il en résulte que V est une fonction de ces trois angles, et qu'il ne dépend que par ces angles des six éléments h, β, k, τ, α, g. Toutefois ρ ne dépend pas de ces quantités, et, comme V ne doit entrer dans notre recherche que par ses dérivées, par rapport aux six éléments h, β,..., nous pouvons supprimer les deux premiers termes de V; de plus, en nous servant des égalités

$$z_1^2 = \rho^2 - x_1^2 - y_1^2,$$
$$\int (a^2 - c^2)dm = C - A, \quad \int (b^2 - c^2)dm = C - B,$$

nous pourrons réduire V à cette expression

$$V = \frac{3S}{2\rho^5}\left[(C-A)x_1^2 + (C-B)y_1^2\right] + \delta V;$$

nous aurons de même

$$V' = \frac{3L}{2\rho'^5}\left[(C-A)x_1'^2 + (C-B)y_1'^2\right] + \delta V'.$$

Il est utile de se représenter l'ordre de grandeur de la fonction perturbatrice, et pour cela nous la comparerons à la demi-force vive qui provient du mouvement de rotation de la Terre. Comme p et q sont très-petits, on a à très-peu près pour cette demi-force vive $h = \frac{1}{2} Cr^2$. Ensuite, en désignant par m la vitesse angulaire du Soleil dans son orbite, on a $\frac{S}{a^3} = m^2$, a étant le demi-grand axe de cette orbite. En prenant le rapport de V à h, on trouve que la première quantité est, par rapport à la seconde, de l'ordre $\left(\frac{m}{r}\right)^2 \varepsilon$, ε étant l'aplatissement de la Terre, c'est-à-dire de l'ordre

$$\frac{1}{366,25^2} \times \frac{1}{306} = 0,0000000 2436.$$

Nous imaginerons que l'on prenne pour le plan fixe des x, y le plan de l'écliptique à une époque déterminée. Si l'on désigne par a, b, c les cosinus des angles de l'axe des x avec les axes des x_1, y_1, z_1, par a′, b′, c′ les mêmes quantités pour l'axe des y, par a″, b″, c″ pour l'axe des z, on passe des coordonnées du premier système à celles du second et réciproquement par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{a} x_1 + \mathrm{b} y_1 + \mathrm{c} z_1, & x_1 &= \mathrm{a} x + \mathrm{a}' y + \mathrm{a}'' z, \\ y &= \mathrm{a}' x_1 + \mathrm{b}' y_1 + \mathrm{c}' z_1, & y_1 &= \mathrm{b} x + \mathrm{b}' y + \mathrm{b}'' z, \\ z &= \mathrm{a}'' x_1 + \mathrm{b}'' y_1 + \mathrm{c}'' z_1, & z_1 &= \mathrm{c} x + \mathrm{c}' y + \mathrm{c}'' z, \end{aligned}$$

et, en remplaçant a, b, c,... par leurs valeurs, en fonction de φ, θ, ψ, qu'on trouve dans tous les ouvrages de Géométrie analytique, on a

$$\begin{aligned} x_1 &= (-\sin\varphi \sin\psi \cos\theta + \cos\varphi \cos\psi) x \\ &\quad + (\sin\varphi \cos\psi \cos\theta + \cos\varphi \sin\psi) y + \sin\theta \sin\varphi\, z, \\ y_1 &= (-\cos\varphi \sin\psi \cos\theta - \sin\varphi \cos\psi) x \\ &\quad + (\cos\varphi \cos\psi \cos\theta - \sin\varphi \sin\psi) y + \sin\theta \cos\varphi\, z, \\ z_1 &= \sin\theta \sin\psi\, x - \sin\theta \cos\psi\, y + \cos\theta\, z. \end{aligned}$$

Nous négligerons d'abord δV, sauf à avoir égard dans la suite à son influence, et nous aurons

$$V = \frac{3S}{2\rho^3} [(C - A)(x_1^2 + y_1^2) - (B - A) y_1^2];$$

de même, en négligeant $\delta V'$, nous aurons

$$V' = \frac{3L}{2\rho'^3}[(C-A)(x_1'^2+y_1'^2)-(B-A)y_1'^2].$$

Si B — A n'est pas nul, il est certainement très-petit par rapport à C — A, de sorte que la seconde partie de V et V' est très-petite par rapport à la première.

Désignons par ρ_1 la projection du rayon ρ sur le plan des x, y, et par ν l'angle de cette projection avec l'axe des x; nous aurons

$$x = \rho_1 \cos\nu, \quad y = \rho_1 \sin\nu,$$

et il en résultera

$$x_1 = \rho_1 \sin\varphi \cos\theta \sin(\nu-\psi) + \rho_1 \cos\varphi \cos(\nu-\psi) + z\sin\theta \sin\varphi,$$
$$y_1 = \rho_1 \cos\varphi \cos\theta \sin(\nu-\psi) - \rho_1 \sin\varphi \cos(\nu-\psi) + z\sin\theta \cos\varphi;$$

nous en concluons

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 = \rho_1^2 - \tfrac{1}{2}\rho_1^2 \sin^2\theta + \tfrac{1}{2}\rho_1^2 \sin 2\theta \cos^2(\nu-\psi) \\ + z^2\sin^2\theta + 2\rho_1 z \sin\theta\cos\theta \sin(\nu-\psi), \end{aligned}$$

et nous aurons à substituer cette expression indépendante de φ dans le premier terme de V. On opérerait de la même manière pour le premier terme de V'.

Calcul des quantités h et k.

8. Pour calculer les deux quantités h et k, qui représentent la demi-force vive du mouvement de rotation de la Terre et la grandeur de l'axe du plan invariable, nous emploierons les deux formules (n° 2)

$$(a) \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{d\Omega}{d\tau},$$

$$(b) \qquad \frac{dk}{dt} = \frac{d\Omega}{dg},$$

où Ω est égal à $V + V'$. Nous sommes conduit d'après cela à calculer les expressions de

$$\frac{d(x_1^2+y_1^2)}{d\tau}, \quad \frac{d(x_1^2+y_1^2)}{dg}, \quad \frac{d(y_1^2)}{d\tau}, \quad \frac{d(y_1^2)}{dg}.$$

Les termes de ces expressions qui dépendent de l'angle ψ_1 se rapportent à des inégalités qui sont à peu près d'un jour; car l'angle ψ_1 ne se trouve combiné dans ces termes qu'à d'autres angles, qui croîtront avec t beaucoup plus lentement. Ce sont surtout les termes indépendants de ψ_1 qu'il nous importe d'examiner.

Nous avons, en différentiant la dernière formule du n° **7**,

$$(c)\left\{\begin{aligned}\frac{d(x_1^2+y_1^2)}{d\tau} = {} & \left(-\frac{1}{2}\rho_1^2 + z^2\right)\frac{d\sin^2\theta}{d\tau} + \frac{1}{2}\rho_1^2\,\frac{d\sin^2\theta}{d\tau}\cos 2(\nu-\psi) \\ & + 2\rho_1 z\,\frac{d\sin\theta\cos\theta}{d\tau}\sin(\nu-\psi) + \rho_1^2\sin^2\theta\sin 2(\nu-\psi)\,\frac{d\psi}{d\tau} \\ & - 2\rho_1 z\sin\theta\cos\theta\cos(\nu-\psi)\,\frac{d\psi}{d\tau}.\end{aligned}\right.$$

D'après le n° **6**, on a

$$(d)\left\{\begin{aligned}\frac{d\sin^2\theta}{d\tau} = {} & \sin^2\gamma(2\cot\gamma\cos\psi_1 + 2\theta_1\cot^2\gamma - \theta_1 - \theta_1\cos 2\psi_1)\,\frac{d\theta_1}{d\tau} \\ & + (-\theta_1\sin 2\gamma\sin\psi_1 + \theta_1^2\sin^2\gamma\sin 2\psi_1)\,\frac{d\psi_1}{d\tau},\end{aligned}\right.$$

et, en désignant par ε la très-petite quantité $\frac{N}{M}$, on a (n° **3**)

$$\theta_1^2 = \frac{1}{2Lk^2}\left(2h - \frac{k^2}{C}\right)(M - N\cos\upsilon),$$

$$\theta_1\frac{d\theta_1}{d\tau} = \frac{M}{2k\sqrt{L}}\left(2h - \frac{k^2}{C}\right)\varepsilon\sin\upsilon,$$

$$\frac{d\theta_1}{d\tau} = \sqrt{\frac{M}{2}}\sqrt{2h - \frac{k^2}{C}}\left(\varepsilon\sin\upsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2\sin 2\upsilon\right);$$

on a aussi (n° **5**)

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = \frac{k}{C} + k\sqrt{L} + \frac{n}{2}k\sqrt{L}\cos\upsilon.$$

Donc l'expression (d) ne renferme qu'un terme indépendant de ψ_1

$$\sin^2\gamma(2\cot^2\gamma - 1)\theta_1\frac{d\theta_1}{d\tau}$$

et, par suite, la première partie de l'expression (c) renferme le terme

$$(1)\qquad -\left(\frac{1}{2}\rho_1^2 - z^2\right)(2 - 3\sin^2\gamma)\frac{M}{2k\sqrt{L}}\left(2h - \frac{k^2}{C}\right)\varepsilon\sin v,$$

qui est indépendant de ψ_1, mais qui dépend de v et dont la période est d'environ cent cinquante-trois jours, en supposant que $C\sqrt{L} = \frac{1}{306}$.

2° Dans la deuxième partie de l'expression (c) faisons

$$\cos 2(\nu - \psi) = \cos 2(\nu - \alpha) + 2\theta_1\frac{\sin\psi_1}{\sin\gamma}\sin 2(\nu - \alpha),$$

et il en résulte ces deux termes indépendants de ψ_1

$$(2)\qquad \tfrac{1}{2}\rho_1^2\cos 2(\nu - \alpha)(2 - 3\sin^2\gamma)\theta_1\frac{d\theta_1}{d\tau},$$

$$(2')\qquad -\rho_1^2\theta_1^2\cos\gamma\sin 2(\nu - \alpha)\frac{d\psi_1}{d\tau},$$

le second terme provenant d'un terme en $\sin^2\psi_1$ qu'on a remplacé par $\frac{1}{2}(1 - \cos 2\psi_1)$.

3° Dans la troisième partie de l'expression (c), faisons

$$\sin(\nu - \psi) = \sin(\nu - \alpha) - \theta_1\frac{\sin\psi_1}{\sin\gamma}\cos(\nu - \alpha),$$

et remplaçons $\sin\theta\cos\theta$ par sa valeur (n° 6), nous trouverons ces deux termes indépendants de ψ_1

$$(3)\qquad -\rho_1 z\sin\gamma\cos\gamma(5 + \cot^2\gamma)\theta_1\frac{d\theta_1}{d\tau}\sin(\nu - \alpha),$$

$$(3')\qquad 2\rho_1 z\cos\gamma\cot 2\gamma\,\theta_1^2\cos(\nu - \alpha)\frac{d\psi_1}{d\tau}.$$

4° On trouve de même que la quatrième partie de l'expression (c) renferme les deux termes

$$(4) \qquad -\rho_1^2 \theta_1 \frac{d\theta_1}{d\tau} \cos 2(\nu - \alpha),$$

$$(4') \qquad \rho_1^2 \theta_1^2 \cos\gamma \sin 2(\nu - \alpha) \frac{d\psi_1}{d\tau}.$$

5° La dernière partie de (c) donne enfin

$$(5) \qquad -\rho_1 z \cot\gamma\, \theta_1 \frac{d\theta_1}{d\tau} \sin(\nu - \alpha),$$

$$(5') \qquad -2\rho_1 z \theta_1^2 \cos\gamma \cot 2\gamma \cos(\nu - \alpha) \frac{d\psi_1}{d\tau}.$$

En faisant la somme des termes (1), (2), (3), (4) et (5), on obtient

$$\begin{aligned}\Big[\big(-\tfrac{1}{2}\rho_1^2 + z^2\big)(2 - 3\sin^2\gamma) &- \tfrac{3}{2}\rho_1^2 \sin^2\gamma \cos 2(\nu - \alpha) \\ &- 2\rho_1 z(2\sin^2\gamma + 1)\sin(\nu - \alpha)\Big]\theta_1 \frac{d\theta_1}{d\tau};\end{aligned}$$

or $\theta_1 \frac{d\theta_1}{d\tau}$ renferme $\varepsilon \sin \upsilon$ comme facteur, et l'angle υ ne peut disparaître de ces termes que par sa combinaison avec l'angle ν; il n'en peut donc résulter dans h que des inégalités périodiques et dont la période n'est pas très-grande. Remarquons que ces termes renferment ε comme facteur et, par conséquent, ils sont absolument nuls si B est égal à A.

Les termes (2′), (3′), (4′) et (5′) semblent, au contraire, donner dans h des inégalités séculaires; car ρ_1 et z peuvent, à très-peu près, être considérés comme des fonctions périodiques dont la période est l'année, et, en les supposant développées en séries de sinus et cosinus, les termes précédents produiraient des termes constants dans $\frac{dh}{dt}$ et des termes proportionnels à t dans h. Mais il arrive justement que le terme (2′) se détruit avec (4′) et (3′) avec (5′).

9. Examinons ensuite les termes de $\frac{d(x_1^2 + y_1^2)}{dg}$, qui sont indépendants de l'angle ψ_1. Nous aurons

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d(x_1^2+y_1^2)}{dg} = &-\left(\frac{\rho_1^2}{2}-z^2\right)\frac{d\sin^2\theta}{dg}+\tfrac{1}{2}\rho_1^2\frac{d\sin^2\theta}{dg}\cos 2(\nu-\psi)\\ &+2\rho_1 z\sin(\nu-\psi)\frac{d\sin\theta\cos\theta}{dg}\\ &+\rho_1^2\sin^2\theta\sin 2(\nu-\psi)\frac{d\psi}{dg}\\ &-2\rho_1 z\sin\theta\cos\theta\cos(\nu-\psi)\frac{d\psi}{dg},\end{aligned}\right.$$

et, d'après les formules du n° **6**, on a

$$\frac{d\sin^2\theta}{dg} = \sin^2\gamma(-2\delta_1\cot\gamma\sin\psi_1+\delta_1^2\sin 2\psi_1),$$

$$\frac{d\sin\theta\cos\theta}{dg} = \sin\gamma\cos\gamma[-2\delta_1\cot 2\gamma\sin\psi_1+\delta_1^2(2+\cot^2\gamma)\sin 2\psi_1],$$

$$\frac{d\psi}{dg} = \delta_1\frac{\cos\psi_1}{\sin\gamma}-\delta_1^2\cos 2\psi_1\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}.$$

La première partie de la formule (e) ne donne aucun terme indépendant de ψ_1. La deuxième contient un terme en $\sin^2\psi_1$ qui produit

$$-\delta_1^2\rho_1^2\cos\gamma\sin 2(\nu-\alpha);$$

la troisième contient aussi un terme en $\sin^2\psi_1$ qui produit

$$2\delta_1^2\rho_1 z\cos\gamma\cot 2\gamma\cos(\nu-\alpha);$$

la quatrième contient un terme en $\cos^2\psi_1$ qui donne

$$\delta_1^2\rho_1^2\cos\gamma\sin 2(\nu-\alpha);$$

enfin la cinquième contient aussi un terme en $\cos^2\psi_1$ qui donne

$$-2\delta_1^2\rho_1 z\cos\gamma\cot 2\gamma\cos(\nu-\alpha).$$

On voit que ces quatre termes se détruisent. On peut donc regarder tous les termes de l'expression (e) comme dépendants de l'angle ψ_1.

10. En élevant au carré l'expression de y_1,

$$y_1 = \rho_1 \cos\varphi \cos\theta \sin(\nu - \psi) - \rho_1 \sin\varphi \cos(\nu - \psi) + z \sin\theta \cos\varphi,$$

trouvée au n° **7**, nous aurons

$$\begin{aligned} y_1^2 = {} & \tfrac{1}{4}\rho_1^2[\cos^2\theta(1+\cos 2\varphi) + 1 - \cos 2\varphi] \\ & + \tfrac{1}{4}\rho_1^2[-\cos^2\theta(1+\cos 2\varphi) + 1 - \cos 2\varphi]\cos 2(\nu - \psi) \\ & - \tfrac{1}{2}\rho_1^2 \sin 2\varphi \cos\theta \sin 2(\nu - \psi) \\ & + \rho_1 z \sin\theta\cos\theta(1+\cos 2\varphi)\sin(\nu-\psi) - \rho_1 z \sin\theta \sin 2\varphi \cos(\nu - \psi) \\ & + \tfrac{1}{2} z^2 \sin^2\theta(1+\cos 2\varphi). \end{aligned}$$

Comme y_1^2 dans l'expression de V est multipliée par B — A, quantité extrêmement petite, si elle n'est pas nulle, nous négligerons dans le calcul de $\frac{d(y_1^2)}{d\tau}$ et de $\frac{d(y_1^2)}{dg}$ les termes multipliés par θ_1^2 ou par $\theta_1 \frac{d\theta_1}{d\tau}$.

En différentiant y_1^2 par rapport à τ, nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{d(y_1^2)}{d\tau} = {} & \frac{1}{4}\rho_1^2\left[-(1+\cos 2\varphi)\frac{d\sin^2\theta}{d\tau} - \sin^2\theta\frac{d\cos 2\varphi}{d\tau}\right] \\ & + \frac{1}{4}\rho_1^2\left[(1+\cos 2\varphi)\frac{d\sin^2\theta}{d\tau} - (1+\cos^2\theta)\frac{d\cos 2\varphi}{d\tau}\right]\cos 2(\nu - \psi) \\ & + \frac{1}{2}\rho_1^2[\sin^2\theta - (1+\cos^2\theta)\cos 2\varphi]\sin 2(\nu - \psi)\frac{d\psi}{d\tau} \\ & - \frac{1}{2}\rho_1^2\frac{d\sin 2\varphi}{d\tau}\cos\theta \sin 2(\nu - \psi) - \frac{1}{2}\rho_1^2 \sin 2\varphi\frac{d\cos\theta}{d\tau}\sin 2(\nu - \psi) \\ & + \rho_1^2 \sin 2\varphi \cos\theta \cos 2(\nu - \psi)\frac{d\psi}{d\tau} \\ & + \rho_1 z\frac{d\sin\theta\cos\theta}{d\tau}(1+\cos 2\varphi)\sin(\nu - \psi) \\ & + \rho_1 z \sin\theta\cos\theta\frac{d\cos 2\varphi}{d\tau}\sin(\nu - \psi) \\ & - \rho_1 z \sin\theta\cos\theta(1+\cos 2\varphi)\cos(\nu - \psi)\frac{d\psi}{d\tau} \\ & - \rho_1 z\frac{d\sin\theta}{d\tau}\sin 2\varphi\cos(\nu - \psi) - \rho_1 z \sin\theta\frac{d\sin 2\varphi}{d\tau}\cos(\nu - \psi) \\ & - \rho_1 z \sin\theta \sin 2\varphi \sin(\nu - \psi)\frac{d\psi}{d\tau} + \frac{1}{2}z^2\frac{d\sin^2\theta}{d\tau}(1+\cos 2\varphi) \\ & + \frac{1}{2}z^2\sin^2\theta\frac{d\cos 2\varphi}{d\tau}. \end{aligned}$$

En négligeant θ_1^2, on a (nº **6**)

$$\varphi = \varphi_1 - \psi_1 + \theta_1 \cot\gamma \sin\psi_1,$$

$$\begin{aligned}\cos 2\varphi = {} & \cos 2\varphi_1 \cos 2\psi_1 + \sin 2\varphi_1 \sin 2\psi_1 \\ & - 2\theta_1 \cot\gamma \sin\psi_1 (\sin 2\varphi_1 \cos 2\psi_1 - \cos 2\varphi_1 \sin 2\psi_1),\\ \sin 2\varphi = {} & \sin 2\varphi_1 \cos 2\psi_1 - \cos 2\varphi_1 \sin 2\psi_1 \\ & + 2\theta_1 \cot\gamma \sin\psi_1 (\cos 2\varphi_1 \cos 2\psi_1 + \sin 2\varphi_1 \sin 2\psi_1),\end{aligned}$$

et, d'après le nº **4**, on a les formules

$$\cos 2\varphi_1 = \frac{C(B-A) + [2AB - (A+B)C]\cos v}{ABC(M - N\cos v)},$$

$$\sin 2\varphi_1 = 2\sqrt{L}\,\frac{\sin v}{M - N\cos v},$$

qu'on peut facilement développer en séries de cosinus ou de sinus de multiples de v.

On aura

$$\frac{d\sin^2\theta}{d\tau} = \left(\frac{d\theta_1}{d\tau}\cos\psi_1 + \theta_1 \sin\psi_1 \frac{d\psi_1}{d\tau}\right)\sin 2\gamma;$$

$$\frac{d\sin\theta\cos\theta}{d\tau} = \left(\frac{d\theta_1}{d\tau}\cos\psi_1 - \theta_1 \sin\psi_1 \frac{d\psi_1}{d\tau}\right)\cos 2\gamma;$$

à ces formules on ajoutera celles qui déterminent

$$\frac{d\psi_1}{d\tau},\quad \sin(\nu - \psi),\quad \cos(\nu - \psi),\quad \sin 2(\nu - \psi),\quad \cos 2(\nu - \psi),$$

et, en examinant successivement toutes les parties de $\frac{d(\gamma_1^2)}{d\tau}$, on verra qu'elles ne peuvent produire de termes indépendants de ψ_1, si l'on néglige ceux qui sont multipliés par θ_1^2 ou $\theta_1 \frac{d\theta_1}{d\tau}$.

On verra aussi que $\frac{d(\gamma_1^2)}{dg}$ ne renferme que des termes dépendants de l'angle ψ_1 avec le même degré d'approximation. Cette seconde vérification se fait plus rapidement que la première.

11. Il résulte de ce qui précède que $\frac{dV}{d\tau}$ ne renferme aucun terme constant et qu'il ne contient que des termes périodiques. Le plus grand nombre de ces termes périodiques dépendent de l'angle ψ_1, en sorte que leur période diffère peu d'un jour sidéral ; les autres dépendent de l'angle v combiné par addition ou soustraction au moyen mouvement du Soleil et à ses multiples. Les mêmes choses ont lieu pour l'expression de $\frac{dV'}{d\tau}$, avec cette différence que le moyen mouvement du Soleil y est remplacé par celui de la Lune.

On déduit donc de la formule (a) le théorème suivant :

La quantité h, qui représente la demi-force vive due au mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, n'est sujette à aucune inégalité séculaire ; ses inégalités sont toutes périodiques ; la plupart ont une période qui diffère peu d'un jour, et les autres dépendent d'un argument, qui s'accroît de quatre angles droits dans l'intervalle d'environ 153 *jours, combiné avec des multiples du moyen mouvement du Soleil ou de la Lune.*

D'après ce que nous avons vu ci-dessus, tous les termes de $\frac{dV}{dg}$ dépendent de l'angle ψ_1; il en est de même de ceux de $\frac{dV'}{dg}$. De la formule (b) on conclut donc le théorème suivant :

La quantité k, qui représente la grandeur de l'axe du plan invariable, n'est sujette à aucune inégalité séculaire ; ses inégalités sont toutes périodiques et leur période diffère peu d'un jour sidéral.

Il suit de là que la quantité h renferme un certain genre d'inégalités qui ne se trouvent pas dans k; mais nous verrons plus loin que ces inégalités sont insensibles.

Sur l'influence de δV et $\delta V'$.

12. Dans les considérations qui précèdent, nous avons négligé les parties de V et V' désignées par δV et $\delta V'$. Examinons quelle peut être l'influence de ces quantités. Nous avons trouvé au n° **7**

$$V = S\int \frac{dm}{[(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

et nous avons développé la quantité soumise au signe $\int$ suivant les puissances de a, b, c; alors nous avons désigné par δV la partie de V, qui est du troisième degré ou de degré supérieur par rapport à a, b, c. Si l'on fait le calcul, en négligeant ce qui est du quatrième degré, on a

$$\begin{aligned}\delta V = &-\frac{3S}{2\rho^5}\Big[x_1\int(a^3+ab^2+ac^2)dm + y_1\int(a^2b+b^3+bc^2)dm \\ &\qquad\qquad + z_1\int(a^2c+b^2c+c^3)dm\Big] \\ &+\frac{5S}{2\rho^7}\left(x_1^3\int a^3dm + y_1^3\int b^3dm + z_1^3\int c^3dm\right) \\ &+\frac{15S}{2\rho^7}\Big[\, x_1^2y_1\int a^2bdm + x_1y_1^2\int ab^2dm \\ &\qquad + y_1^2z_1\int b^2cdm + y_1z_1^2\int bc^2dm \\ &\qquad + z_1x_1^2\int ca^2dm + x_1z_1^2\int ac^2dm + 2x_1y_1z_1\int abcdm\Big].\end{aligned}$$

La Terre différant peu d'un solide de révolution, nous pouvons admettre, dans le calcul actuel, qu'elle est rigoureusement symétrique par rapport aux deux plans qui passent par l'axe C et par l'axe A ou B; mais, pour plus de rigueur, nous supposerons que cette symétrie n'ait pas lieu exactement par rapport au plan de l'équateur. Alors, en supprimant comme nulles toutes les intégrales des différentielles impaires en a ou b, on a

$$\begin{aligned}\delta V = &-\frac{S}{2}\left(\frac{3z_1}{\rho^5}-\frac{5z_1^3}{\rho^7}\right)\int c^3dm + \frac{3S}{2}\left(\frac{-z_1}{\rho^5}+\frac{5x_1^2z_1}{\rho^7}\right)\int a^2cdm \\ &+\frac{3S}{2}\left(\frac{-z_1}{\rho^5}+\frac{5y_1^2z_1}{\rho^7}\right)\int b^2cdm.\end{aligned}$$

On a ensuite

$$-\frac{z_1}{\rho^5}+\frac{5x_1^2z_1}{\rho^7} = \frac{1}{2}\left(\frac{3z_1}{\rho^5}-\frac{5z_1^3}{\rho^7}\right)+\frac{5}{2}\frac{z_1(x_1^2-y_1^2)}{\rho^7},$$

parce que $y_1^2 = \rho^2 - x_1^2 - z_1^2$, et l'on a de même

$$-\frac{z_1}{\rho^5}+\frac{5y_1^2z_1}{\rho^7} = \frac{1}{2}\left(\frac{3z_1}{\rho^5}-\frac{5z_1^3}{\rho^7}\right)-\frac{5}{2}\frac{z_1(x_1^2-y_1^2)}{\rho^7}.$$

On en conclut

$$\delta V = \frac{S}{4}\left(\frac{3z_1}{\rho^5} - \frac{5z_1^3}{\rho^7}\right)\left[-2\int c^3 dm + 3\int (a^2+b^2)c\,dm\right]$$
$$+ \frac{15}{4} S \frac{z_1(x_1^2 - y_1^2)}{\rho^7}\left(\int a^2 c\,dm - \int b^2 c\,dm\right).$$

La Terre étant supposée un solide de révolution, la seconde partie de cette expression de δV est nulle, et l'on peut écrire

$$\delta V = SK\left(\frac{3z_1}{\rho^5} - \frac{5z_1^3}{\rho^7}\right).$$

Examinons l'influence de cette expression dans le calcul de $\frac{dV}{d\tau}$ et $\frac{dV}{dg}$. En faisant, comme précédemment (n° **7**),

$$x = \rho_1 \cos\nu, \quad y = \rho_1 \sin\nu,$$

nous aurons

$$z_1 = -\rho_1 \sin\theta \sin(\nu - \psi) + z\cos\theta.$$

S'il existe une différence d'aplatissement entre les deux hémisphères, elle est excessivement petite; donc K est très-petit, et nous pouvons négliger dans δV les termes en θ_1^2, $\theta_1 \frac{d\theta_1}{d\tau}$. Or on voit que, avec ce degré d'approximation, les quantités

$$\frac{dz_1}{d\tau} = -\rho_1 \sin(\nu - \psi)\frac{d\sin\theta}{d\tau} + \rho_1 \sin\theta\cos(\nu - \psi)\frac{d\psi}{d\tau} + z\frac{d\cos\theta}{d\tau},$$
$$\frac{dz_1}{dg} = -\rho_1 \sin(\nu - \psi)\frac{d\sin\theta}{dg} + \rho_1 \sin\theta\cos(\nu - \psi)\frac{d\psi}{dg} + z\frac{d\cos\theta}{dg}$$

ne renferment que des termes dépendant de ψ_1. Il en est de même des deux expressions

$$\frac{d(z_1^3)}{d\tau} = 3z_1^2\frac{dz_1}{d\tau}, \quad \frac{d(z_1^3)}{dg} = 3z_1^2\frac{dz_1}{dg};$$

car, comme les termes de $\frac{dz_1}{d\tau}$, $\frac{dz_1}{dg}$ renferment tous la quantité θ_1 ou $\frac{d\theta_1}{d\tau}$ en facteur, on doit réduire z_1^2 à l'expression

$$[-\rho_1 \sin\gamma \sin(\nu - \alpha) + z\cos\gamma]^2,$$

qui est entièrement indépendante de ψ_1. Ainsi δV ne renferme que des termes qui dépendent de ψ_1; la même chose a lieu pour $\delta V'$.

Nous pouvons conclure de là qu'une différence d'aplatissement entre les deux hémisphères terrestres n'apporterait aucune modification aux conclusions auxquelles nous sommes arrivé (n° **11**) sur les valeurs de h et k.

Les expressions de δV et $\delta V'$ contiennent ensuite des termes qui sont du quatrième degré par rapport à a, b, c; on comprend aisément qu'ils sont très-petits et négligeables. D'ailleurs on peut démontrer que, par rapport aux premiers termes de V, V', ils sont de l'ordre du carré de la parallaxe de l'astre perturbateur, multiplié par le carré de l'aplatissement de la Terre. (*Voir* le Mémoire de M. Serret, *Annales de l'Observatoire*, 1859, t. V, p. 264.)

Remarque. — Nous avons supposé dans nos raisonnements les masses du Soleil et de la Lune condensées à leurs centres de gravité; mais décomposons la masse de la Lune en parties infiniment petites, et prenons la fonction perturbatrice provenant de chacun de ces éléments, nous arriverons pour chaque élément aux mêmes conclusions auxquelles nous sommes parvenu pour le centre; il en sera donc de même si nous prenons la fonction perturbatrice provenant de la masse entière de la Lune. Ensuite, comme la théorie du mouvement de rotation de la Terre ne dépend pas du mouvement de rotation du Soleil, on peut remplacer ce dernier mouvement par un autre qui s'effectuerait comme pour la Lune, dans le même temps que la translation du Soleil; donc, en décomposant le Soleil en éléments, on arrive encore aux mêmes conclusions qu'en supposant sa masse concentrée en son centre de gravité.

Sur les inégalités périodiques et séculaires de la vitesse de rotation de la Terre et sur la mesure du temps en jours sidéraux.

13. Désignons par h_0, k_0 les parties constantes de h, k et par Δh, Δk les parties restantes, en sorte que l'on a (n° **8**)

$$\Delta h = \int \frac{d\Omega}{d\tau}\, dt, \quad \Delta k = \int \frac{d\Omega}{dg}\, dt;$$

nous avons vu que Δh, Δk ne renferment pas d'inégalités séculaires, mais des inégalités périodiques que nous avons énumérées.

En négligeant le carré de Δk, nous avons

$$2h - \frac{k^2}{C} = 2h_0 - \frac{k_0^2}{C} + 2\left(\Delta h - \frac{k_0}{C}\Delta k\right),$$

et nous avons trouvé

$$\theta_1^2 = \frac{1}{2Lk^2}\left(2h - \frac{k^2}{C}\right)(M - N\cos v);$$

θ_1 est sensiblement égal à l'angle de l'axe de rotation de la Terre avec l'axe du plus grand moment d'inertie (n° 3). Examinons comment tourne le plan de cet angle autour de l'axe d'inertie.

On a, pour les composantes de la vitesse de rotation par rapport aux axes principaux d'inertie,

$$p = \frac{k}{A}\theta_1 \sin\varphi_1, \quad q = \frac{k}{B}\theta_1 \cos\varphi_1, \quad r = \frac{k}{C}\left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right).$$

De la dernière expression on conclut que la vitesse de rotation de la Terre est à peu près égale à $\frac{k_0}{C}$, que nous représenterons par n; si l'on prend pour unité de temps le jour sidéral, n est donc égal à 360 degrés. Dans un jour sidéral, φ_1, qui est sensiblement égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{v}{2}$, diminue environ de $k\sqrt{L}$ ou de $\frac{n}{306}$. L'angle de la projection de l'axe de rotation sur le plan de l'équateur avec l'axe d'inertie A a pour tangente $\frac{q}{p}$ ou tang $\frac{v}{2}$, parce que A et B sont très-peu différents; donc, dans l'intervalle d'un jour sidéral, le plan de l'axe de rotation et de l'axe du plus grand moment d'inertie décrit autour de ce dernier un angle égal à $\frac{n}{306}$; autrement dit, le rayon mené du pôle de l'axe principal d'inertie au pôle de l'axe de rotation décrira une révolution entière dans l'intervalle de 306 jours.

Comme les périodes des inégalités qui composent θ_1 ne sont pas commensurables avec cette période de 306 jours, si l'angle θ_1 peut atteindre la valeur d'une seconde, la latitude d'un lieu de la Terre doit pouvoir varier d'une quantité s'élevant jusqu'à deux secondes dans l'intervalle de 153 jours. Jusqu'à présent l'observation n'a pu constater la variation de latitude d'un lieu de la Terre. L'expression ci-dessus de θ_1^2 a donc une valeur très-petite, et, par suite, quoique h_0 et k_0 aient des valeurs considérables, la quantité $2h_0 - \frac{k_0^2}{C}$ a une valeur positive excessivement petite, que nous désignerons par j, et nous aurons

$$2h - \frac{k^2}{C} = j + 2(\Delta h - n\Delta k).$$

Nous avons vu que Δh, Δk ne renferment pas d'inégalités séculaires et ne contiennent que des inégalités périodiques et à courtes périodes. Donc la quantité précédente ne subit non plus aucune variation séculaire, et il en est de même de θ_1^2. Or, d'après les observations, θ_1 ne prend pas de valeur sensible dans les intervalles de temps indiqués par les périodes de Δh, Δk. Donc θ_1 et θ_1^2 ne subissent ni inégalités séculaires ni inégalités périodiques appréciables.

Il en résulte que p et q ne peuvent prendre que des valeurs insensibles, et, d'après ce qui a été démontré de la quantité k, la quantité r ne peut varier aussi d'une quantité appréciable.

14. Cependant le résultat que nous venons d'obtenir n'est pas encore suffisant pour que l'on soit assuré que le temps peut être mesuré avec exactitude en jours sidéraux; car une différence insensible sur la grandeur de la vitesse de rotation de la Terre pourrait apporter sur la mesure d'un temps considérable une différence appréciable. On a pour la vitesse angulaire ω, autour de l'axe instantané de rotation,

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = r\left(1 + \frac{p^2 + q^2}{2r^2}\right),$$

et la longueur du jour sidéral est le temps pendant lequel l'intégrale $\int \omega\, dt$ s'accroît de 2π. Donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^t \omega\, dt$ est la mesure du temps en jours sidéraux depuis le temps $t = 0$, et il s'agit de prouver que cette quantité est effectivement proportionnelle à t.

En négligeant le produit de θ_1^2 par $\frac{B-A}{B}$, qui est excessivement petit, comme on le verra dans le numéro suivant, on a

$$p^2+q^2=k^2\theta_1^2\left(\frac{\sin^2\varphi_1}{A^2}+\frac{\cos^2\varphi_1}{B^2}\right)=\frac{k^2\theta_1^2}{A^2};$$

on a donc

$$\omega=r+\frac{1}{2r}\frac{k^2}{A^2}\theta_1^2$$

et, en remplaçant r par sa valeur,

$$\omega=\frac{k}{C}+\frac{k}{2C}\frac{C^2-A^2}{A^2}\theta_1^2.$$

Si l'on néglige les termes périodiques très-petits de k, on peut remplacer $\frac{k}{C}$ par la valeur constante n, et l'on a

$$\int\omega\,dt=nt+\frac{n}{2}\frac{C^2-A^2}{A^2}\int\theta_1^2\,dt.$$

En désignant par P la quantité $2(\Delta h-n\Delta k)$, qui est entièrement périodique, on a

$$\theta_1^2=\frac{1}{2Lk^2}(j+P)(M-N\cos v).$$

Le produit de P par $N\cos v$ ne donnerait que des termes périodiques, et d'ailleurs il est négligeable; donc, en supprimant la partie très-petite périodique, on a

$$(a)\qquad \int\omega\,dt=nt+\frac{n}{4}\frac{C^2-A^2}{A^2}\frac{M}{Lk^2}jt,$$

quantité proportionnelle à t, comme il fallait le démontrer. La vitesse moyenne de rotation de la Terre est donc égale à

$$n+\frac{n}{4}\frac{C^2-A^2}{A^2}\frac{M}{Lk^2}j$$

ou à

$$n+\frac{1}{Cn}j,$$

en commettant une très-petite erreur sur le second terme, qui est lui-même excessivement petit. En effet, supposons que θ_1 soit toujours plus petit qu'une seconde, en sorte que la latitude d'un lieu de la Terre ne puisse varier de deux secondes, on aura

$$\frac{M}{2Lk^2}(j+P) < \frac{\pi^2}{180^2 \times 60^4}.$$

La quantité P peut être positive, négative ou nulle; donc, l'inégalité devant avoir lieu pour $P = 0$, on a

$$\frac{M}{2Lk^2}j < \frac{\pi^2}{180^2 \times 60^4}$$

ou

$$\frac{306}{Cn^2}j < \frac{\pi^2}{180^2 \times 60^4};$$

on a donc

$$\frac{1}{Cn}j < \frac{n\pi^2}{306 \times 180^2 \times 60^4},$$

et le second terme de la formule (a) ne variera pas d'une seconde d'arc dans 170 000 ans.

En résumant tout ce qui précède, on obtient les résultats suivants : L'axe de rotation de la Terre ne pourra jamais s'écarter de l'axe du plus grand moment d'inertie que d'une quantité insensible, en sorte que la longitude et la latitude d'un lieu de la Terre ne changeront pas par la suite des temps. La vitesse moyenne de rotation de la Terre est constante et la longueur du jour sidéral est invariable, si l'on fait abstraction de petites inégalités périodiques insensibles; enfin cette longueur peut être employée comme unité pour la mesure du temps.

Détermination d'une limite de la quantité $\frac{B-A}{B}$.

15. On doit remarquer que tous les termes de $\frac{d\Omega}{d\tau}$, $\frac{d\Omega}{dg}$, excepté ceux qui sont multipliés par $B - A$, renferment le facteur très-petit θ_1 ou

$\frac{d\theta_1}{d\tau}$. Or on a

$$\frac{dh}{dt} - n\frac{dk}{dt} = \frac{d\Omega}{d\tau} - n\frac{d\Omega}{dg};$$

donc, pour calculer les termes les plus influents de $\Delta h - n\Delta k$, on peut réduire l'expression précédente à

$$(1) \qquad -\frac{3}{2}\frac{S}{\rho^3}(B - A)\left[\frac{d(y_1^2)}{d\tau} - n\frac{d(y_1^2)}{dg}\right],$$

en ne considérant d'abord que l'action du Soleil.

Les parties les plus considérables de l'expression

$$(2) \qquad \frac{d(y_1^2)}{d\tau} - n\frac{d(y_1^2)}{dg},$$

et devant lesquelles les autres peuvent être négligées, sont, comme on le voit facilement,

$$\left[-\tfrac{1}{4}\rho_1^2\sin^2\theta - \tfrac{1}{4}\rho_1^2(1+\cos^2\theta)\cos 2(\nu-\psi) + \rho_1 z\sin\theta\cos\theta\sin(\nu-\psi)\right]$$
$$\times\left(\frac{d\cos 2\varphi}{d\tau} - n\frac{d\cos 2\varphi}{dg}\right)$$
$$-\left[\frac{1}{2}\rho_1^2\cos\theta\sin 2(\nu-\psi) + \rho_1 z\sin\theta\cos(\nu-\psi)\right]\left(\frac{d\sin 2\varphi}{d\tau} - n\frac{d\sin 2\varphi}{dg}\right).$$

En négligeant $(B - A)^2$, on peut faire ici $2\varphi_1 = \pi - v$, et par suite (n° **10**)

$$\cos 2\varphi = -\cos(2\psi_1 + v); \quad \sin 2\varphi = \sin(2\psi_1 + v),$$
$$\frac{d\cos 2\varphi}{d\tau} - n\frac{d\cos 2\varphi}{dg} = 4k\sqrt{L}\sin(2\psi_1 + v),$$
$$\frac{d\sin 2\varphi}{d\tau} - n\frac{d\sin 2\varphi}{dg} = 4k\sqrt{L}\cos(2\psi_1 + v).$$

Les termes qui renferment le facteur z étant très-petits vis-à-vis des autres, on peut les négliger dans la recherche actuelle; ensuite on peut remplacer ϑ par γ, et l'on obtient pour l'expression (2)

$$\begin{gathered}[-\sin^2\gamma-(1+\cos^2\gamma)\cos 2(\nu-\psi)]\; k\sqrt{L}\rho_1^2\sin(2\psi_1+\upsilon)\\ -2k\sqrt{L}\cos\gamma\,\rho_1^2\sin 2(\nu-\psi)\cos(2\psi_1+\upsilon).\end{gathered}$$

Si l'on désigne par m le moyen mouvement du Soleil, on a à peu près, en regardant ρ comme constant,

$$\frac{S}{\rho^3}=m^2=\frac{n^2}{366^2};$$

en faisant aussi $\rho_1=\rho$, on aura pour l'expression (1)

$$\begin{gathered}+\tfrac{3}{2}m^2(B-A)k\sqrt{L}[\sin^2\gamma+(1+\cos^2\gamma)\cos 2(\nu-\psi)]\sin(2\psi_1+\upsilon)\\ +3m^2(B-A)k\sqrt{L}\cos\gamma\sin 2(\nu-\psi)\cos(2\psi_1+\upsilon).\end{gathered}$$

On commettra une erreur que l'on peut négliger ici, en intégrant par rapport à t cette expression, comme si l'angle ψ_1 renfermait seul le temps de t, et, en doublant, on aura pour la partie de $2(\Delta h-n\Delta k)$ qui provient du Soleil,

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&-\frac{3m^2}{2n}(B-A)k\sqrt{L}[\sin^2\gamma+(1+\cos^2\gamma)\cos 2(\nu-\psi)]\cos(2\psi_1+\upsilon)\\ &+\frac{3m^2}{n}(B-A)k\sqrt{L}\cos\gamma\sin 2(\nu-\psi)\sin(2\psi_1+\upsilon).\end{aligned}\right.$$

En regardant ρ et ρ' comme constants, désignons par χ le rapport de $\frac{L}{\rho'^3}$ à $\frac{S}{\rho^3}$, qui mesure le rapport des actions perturbatrices du Soleil et de la Lune et qu'on trouve, d'après la théorie des marées, égal à 2,35. On aura, pour la partie de $P=2(\Delta h-n\Delta k)$ qui provient de la Lune, les termes analogues aux termes (3)

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&-\frac{3m^2}{2n}\chi(B-A)k\sqrt{L}[\sin^2\gamma+(1+\cos^2\gamma)\cos 2(\nu'-\psi)]\cos(2\psi_1+\upsilon)\\ &+\frac{3m^2}{n}\chi(B-A)k\sqrt{L}\cos\gamma\sin 2(\nu'-\psi)\sin(2\psi_1+\upsilon).\end{aligned}\right.$$

D'après le n° **13**, on a

$$\theta_1^2 = \frac{1}{2Lk^2}(j+P)(M - N\cos\upsilon),$$

et approximativement

$$(5) \qquad \theta_1^2 = \frac{M}{2Lk^2}(j+P).$$

Aux époques des équinoxes, on a $\nu = \psi$ ou $= \psi + \pi$; aux époques des syzygies, on a $\nu' = \nu$ ou $= \nu + \pi$; donc, si l'on se trouve très-près d'un équinoxe en même temps qu'à une nouvelle ou à une pleine Lune, P étant la somme des expressions (3) et (4), on a, pour la valeur de P, à très-peu près,

$$-\frac{3m'^2}{n}(1+\chi)(B-A)k\sqrt{L}\cos(2\psi_1 + \upsilon).$$

On a, à très-peu près (*voir* n° **3**),

$$\sqrt{L} = \frac{1}{306}\,\frac{1}{C}, \quad M = \frac{2}{306}\,\frac{1}{B};$$

donc, si l'on pose

$$\lambda = \frac{3m'^2}{2n}(B-A)\frac{M}{k\sqrt{L}}(1+\chi),$$

on aura

$$\lambda = 3\,\frac{B-A}{B}\,\frac{1}{366^2}(1+\chi),$$

et la partie de la formule (5) qui est multipliée par P deviendra $-\lambda\cos(2\psi_1 + \upsilon)$; sa valeur variera de zéro à $\pm\lambda$, dans l'intervalle d'environ un quart de jour sidéral.

Nous avons posé précédemment

$$2h - \frac{k^2}{C} = j + P,$$

j étant la partie constante et P la partie périodique, qui est essentiellement différente de zéro, si B est différent de A. Or la quantité P peut changer de signe, et, comme le premier membre de l'égalité est toujours positif (n° **1**), il faut en conclure que j a une valeur très-petite positive, mais essentiellement différente de zéro, tant que B est supposé différent de A.

La quantité P reste toujours inférieure à j; si l'on admet que la latitude d'un lieu de la Terre ne peut varier de 2 secondes dans l'espace de quelques jours, la partie de θ_1^2 provenant de j est plus petite que le carré d'une seconde d'arc (n° **14**); il faut donc en conclure que l'on a aussi

$$\lambda < \frac{\pi^2}{180^2 \times 60^4}$$

et, par suite,

$$\frac{B-A}{B} < \frac{\pi^2\, 366^2}{3(1+\chi)\, 180^2 60^4},$$

et, en faisant le calcul,

$$\frac{B-A}{B} < \frac{1}{3197939}.$$

On en conclut que le rapport $\frac{B-A}{B}$ est plus petit que le tiers d'un millionième, et plus petit aussi que le $\frac{1}{10000}$ de l'aplatissement des pôles.

Remarques sur la théorie précédente et comparaison de cette théorie avec celle de Poisson.

16. Tout le Mémoire qui précède s'appuie sur la formule du n° **3**

$$\theta_1^2 = \frac{1}{2Lk^2}\left(2h - \frac{k^2}{C}\right)(M - N\cos v),$$

d'après laquelle on est conduit à regarder θ_1 et, par suite, p, q comme de l'ordre de la racine carrée de la fonction perturbatrice. La quantité θ_1

ne serait de l'ordre de la fonction perturbatrice qu'autant qu'on admettrait *a priori* que $\frac{B-A}{B}$ est de l'ordre de cette fonction.

Une considération très-simple, mais très-importante, de ma théorie consiste à diviser les fonctions V et V' en deux parties (n° 7), l'une qui est multipliée par C — A, et l'autre qui est multipliée par B — A. La première partie donne dans θ_1^2 des termes qui sont très-petits, parce qu'ils sont de l'ordre de la fonction perturbatrice multipliée par θ_1 ou $\frac{d\theta_1}{d\tau}$; la seconde partie donnerait dans θ_1^2 des termes très-influents, si B — A n'était pas très-petit, et ces termes me permettent de démontrer, en m'appuyant sur les observations astronomiques, que le rapport $\frac{B-A}{B}$ est extrêmement petit.

Poisson, dans son Mémoire *Sur le mouvement de rotation de la Terre* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VII, 1827), néglige les termes de la fonction perturbatrice qui dépendent de l'angle $\nu - \psi$ ou $\nu' - \psi$, par la raison qu'ils ne peuvent donner des termes à longue période, et il néglige comme très-petits les termes qui sont multipliés par les excentricités des deux orbites ou par leurs inclinaisons sur l'écliptique d'une époque déterminée. On peut reconnaître par le n° 15 que les termes les plus importants de θ_1^2 sont deux termes multipliés par $\cos 2(\nu - \psi)$ et $\sin 2(\nu - \psi)$, et ils ne peuvent être rejetés dans la recherche des inégalités séculaires qu'autant qu'on a remarqué que ces termes dépendent de l'angle $2\psi_1 + \nu$; car, autrement, le produit de $\cos 2(\nu - \psi)$ par le terme qui dépend du carré de l'excentricité dans $\frac{1}{\rho^3}$ ou $\frac{1}{\rho'^3}$ donnerait une inégalité séculaire.

A la vérité, ce terme en $\cos 2(\nu - \psi)$ est multiplié par $\frac{B-A}{B}$, qui est extrêmement petit; mais il faut observer que l'extrême petitesse de cette quantité a été démontrée pour la première fois dans le Mémoire actuel. Remarquons encore, à cette occasion, qu'on peut, avec une grande approximation, remplacer la quantité $\frac{2C-A-B}{2C}$ qu'on rencontre dans la théorie de la précession des équinoxes par $\frac{C-A}{C}$, en faisant $B = A$, sans que $\frac{B-A}{B}$ soit extrêmement petit. Ainsi, par exemple, si l'on supposait que $\frac{B-A}{B}$ fût $\frac{1}{50}$ de $\frac{C-A}{C}$, en remplaçant B par A dans l'expression $\frac{2C-A-B}{2C}$, on ne commettrait sur cette quantité qu'une erreur de $\frac{1}{100}$ de sa valeur. Néanmoins on avait cru utile jusqu'à présent de faire dans cette expression la distinction de A et B.