JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. DE SAINT-GERMAIN

Mouvement d'un point pesant sur un paraboloïde

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 3 (1877), p. 401-414.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3__401_0>

Mouvement d'un point pesant sur un paraboloïde;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN,

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

Un point pesant, assujetti à se mouvoir sur une surface donnée sans éprouver de frottements ni de résistances de milieu, peut décrire une infinité de trajectoires, que M. Resal m'a proposé, dans une conversation particulière, d'appeler *lignes de thalweg,* parce qu'elles figurent le trajet d'un filet liquide, très-mince et parfaitement fluide, qui coulerait sur la surface. Pour qu'une ligne de thalweg soit déterminée, il ne suffit pas, comme dans le cas d'une ligne géodésique, de connaître un de ses points et la tangente en ce point, il faut encore tenir compte de l'orientation de la surface et de la vitesse avec laquelle le mobile décrivant passe au point donné : aussi les propriétés générales des lignes de thalweg doivent-elles être beaucoup plus compliquées que celles des lignes géodésiques; mais on peut les étudier sur une surface particulière, et je me suis proposé de le faire sur un paraboloïde, elliptique ou hyperbolique, dont l'axe est vertical.

En partant des équations ordinaires du mouvement d'un point sur une surface, j'obtiens une équation du premier ordre à laquelle satisfont les lignes de thalweg des paraboloïdes; je montre comment la méthode de Jacobi peut donner la solution du problème, mais elle est moins élémentaire que la première et indique moins clairement la valeur des constantes d'intégration. J'étudie avec détails la forme des lignes de thalweg, et je trouve entre autres une propriété analogue à celle que M. Puiseux a démontrée au tome VII de ce Journal sur la différence d'azimut des points où la hauteur d'un pendule sphérique est maximum. Enfin, en supposant que l'action de la pesanteur devienne nulle, l'équation des lignes de thalweg se réduit à celle des lignes géodésiques du paraboloïde; il y a quelque intérêt à considérer ces dernières directement, au lieu de n'en faire qu'un cas particulier des lignes géodésiques sur les surfaces du second ordre.

Prenons trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, le dernier dirigé en sens contraire de la pesanteur, et considérons d'abord le paraboloïde elliptique

$$(1) \qquad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0,$$

qui tourne sa convexité vers le bas; les équations du mouvement d'un point pesant sur cette surface ont une forme bien connue,

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = k\frac{x}{p}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = k\frac{y}{q}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -k - g.$$

Quand le mobile reste très-près du sommet, on peut regarder k comme sensiblement égal à $-g$, et les deux premières équations donnent la loi approchée du mouvement de la projection sur le plan horizontal,

$$x = a\cos\sqrt{\frac{g}{p}}(t - t_1), \quad y = b\cos\sqrt{\frac{g}{q}}(t - t_2);$$

ces équations, qu'on trouve dans plusieurs questions de Physique, représentent un mouvement suffisamment connu.

Revenons au cas général, et ajoutons les équations (2) multipliées respectivement par $\frac{x}{p}$, $\frac{y}{q}$ et -1; nous aurons

$$\frac{x}{p}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{y}{q}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2z}{dt^2} = k\left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + 1\right) + g;$$

différentions deux fois l'équation (1) par rapport au temps, et retranchons le résultat du précédent, il reste

$$-\frac{1}{p}\frac{dx^2}{dt^2} - \frac{1}{q}\frac{dy^2}{dt^2} = k\left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + 1\right) + g.$$

J'élimine k entre cette équation et celle que j'obtiendrais en multipliant la première équation (2) par $\frac{1}{p}\frac{dx}{dt}$, la deuxième par $\frac{1}{q}\frac{dy}{dt}$; et, ajoutant membre à membre, le résultat de l'élimination peut s'écrire

$$\frac{\frac{1}{p}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{q}\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{1}{p}\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{1}{q}\frac{dy^2}{dt^2}+g}+\frac{\frac{x}{p^2}\frac{dx}{dt}+\frac{y}{q^2}\frac{dy}{dt}}{\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}+1}=0.$$

On aperçoit immédiatement l'intégrale de cette équation,

$$(3)\qquad \left(\frac{1}{p}\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{1}{q}\frac{dy^2}{dt^2}+g\right)\left(\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}+1\right)=c.$$

Écrivons maintenant l'intégrale des forces vives

$$(4)\qquad \frac{1}{2}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}+gz=\frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2}+gz=h;$$

il suffit d'éliminer dt entre cette équation et la précédente pour avoir une équation à laquelle satisfait la trajectoire cherchée, ligne de thalweg sur le paraboloïde,

$$(5)\qquad \left[2(h-gz)\left(\frac{dx^2}{p}+\frac{dy^2}{q}\right)+g\,ds^2\right]\left(\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}+1\right)=c\,ds^2.$$

Je désigne par T la ligne de thalweg que je considère; l'équation de sa projection horizontale s'obtiendrait en remplaçant dans (5) z et dz par leurs valeurs tirées de (1); malheureusement les variables x et y ne se séparent pas dans l'équation de la projection, à moins de supposer p ou q infini, ce qui fait disparaître plusieurs termes. Dans ce cas le paraboloïde dégénère en un cylindre parabolique dont les génératrices sont parallèles à OX ou à OY; T se projette horizontalement suivant une courbe de forme analogue à une sinusoïde qui serpenterait entre les projections de deux génératrices. Ce cas aurait pu se traiter sans former l'équation (3) : on écrirait que dt est proportionnel à dx ou à dy, et on le remplacerait par sa valeur dans l'équation (4).

Un autre cas simple est celui où $p=q$; on peut faire cette hypothèse dans les formules générales, ou, employant des coordonnées semi-polaires, r, θ et z, associer à l'intégrale des forces vives l'équation alors évidente $r^2 d\theta = c\,dt$; la ligne de thalweg est formée d'une infinité d'arcs égaux touchant alternativement deux parallèles de la surface.

Quand le paraboloïde est quelconque, pour ramener à des quadratures l'intégration de (5), je considère les paraboloïdes homofocaux au proposé,

$$(6) \qquad \frac{x^2}{\lambda - p} + \frac{y^2}{\lambda - q} = \lambda - 2z, \quad \frac{x^2}{p - \mu} - \frac{y^2}{\mu - q} = 2z - \mu.$$

Je suppose que l'on ait

$$\lambda > p > \mu > q;$$

les surfaces précédentes coupent le paraboloïde donné suivant ses deux séries de lignes de courbure; celles qui sont données par les surfaces λ se projettent horizontalement suivant des ellipses, et ont elles-mêmes la forme d'un ovale non situé dans un plan; je représenterai par E_l celle qui correspond à une valeur l de λ. Les lignes de courbure données par les surfaces μ se projettent suivant des hyperboles; elles-mêmes sont formées de deux branches symétriques par rapport au plan ZOX qu'elles ne rencontrent pas; j'appelle H_m celle qui correspond à la valeur m de μ. On peut voir que H_q se réduit à la parabole principale P, située dans le plan ZOX; E_p se réduit à un arc de la parabole Q située dans le plan YOZ, arc compris entre les deux ombilics N, N'; enfin H_p se compose des deux parties de la même parabole qui sont séparées par l'arc NON'.

A chaque valeur de x, y, z correspondent des valeurs uniques de λ et de μ, satisfaisant aux inégalités admises, tandis qu'à des valeurs connues de λ et de μ répondent quatre points de notre surface. Les équations (1) et (6) donnent, par un calcul bien connu,

$$x^2 = \frac{p(\lambda - p)(p - \mu)}{p - q}, \quad y^2 = \frac{q(\lambda - q)(\mu - q)}{p - q}, \quad z = \frac{\lambda + \mu - p - q}{2}.$$

On en tire dx, dy, dz, et, en combinant les valeurs obtenues, on trouve

$$(7)\qquad \begin{cases} 4ds^2 = \dfrac{\lambda(\lambda-\mu)\,d\lambda^2}{(\lambda-p)(\lambda-q)} + \dfrac{\mu(\lambda-\mu)\,d\mu^2}{(p-\mu)(\mu-q)}, \\ 4\left(\dfrac{dx^2}{p}+\dfrac{dy^2}{q}\right) = \dfrac{(\lambda-\mu)\,d\lambda^2}{(\lambda-p)(\lambda-q)} + \dfrac{(\lambda-\mu)\,d\mu^2}{(p-\mu)(\mu-q)}, \\ \dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}+1 = \dfrac{\lambda\mu}{pq}. \end{cases}$$

On a tout ce qu'il faut pour transformer l'équation (5) en fonction des coordonnées curvilignes λ et μ; on substitue, on divise par $4(\lambda-\mu)$, et, après quelques transpositions qui se présentent d'elles-mêmes, on trouve pour équation des lignes de thalweg

$$(8)\qquad \frac{\pm\, d\lambda\sqrt{\lambda}}{\sqrt{-f(\lambda)(\lambda-p)(\lambda-q)}} = \frac{\pm\, d\mu\sqrt{\mu}}{\sqrt{f(\mu)(p-\mu)(\mu-q)}},$$

en posant, pour abréger,

$$(9)\qquad f(u) = gu^2 - (2h+gp+gq)u + cpq.$$

Pour appliquer la méthode de Jacobi à l'étude du mouvement qui nous occupe, on exprime la demi-force vive F en fonction des dérivées λ' et μ' de λ et de μ par rapport au temps; la première équation (7) donne tout de suite

$$F = \frac{1}{8}\,\frac{\lambda(\lambda-\mu)}{(\lambda-p)(\lambda-q)}\,\lambda'^2 + \frac{1}{8}\,\frac{\mu(\lambda-\mu)}{(p-\mu)(\mu-q)}\,\mu'^2;$$

on introduit comme variables nouvelles $\dfrac{\partial F}{\partial\lambda'}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial\mu'}$ à la place de λ' et μ', et l'on exprime F en fonction de λ, μ et des variables introduites, qu'on remplace ensuite par $\dfrac{\partial S}{\partial\lambda}$ et $\dfrac{\partial S}{\partial\mu}$; on porte le résultat obtenu dans la relation $F + gz = h$, et l'on a l'équation aux dérivées partielles

$$2\,\frac{(\lambda-p)(\lambda-q)}{\lambda(\lambda-\mu)}\left(\frac{\partial S}{\partial\lambda}\right)^2 + 2\,\frac{(p-\mu)(\mu-q)}{\mu(\lambda-\mu)}\left(\frac{\partial S}{\partial\mu}\right)^2 + g\,\frac{\lambda+\mu-p-q}{2} = h.$$

En multipliant par $\lambda-\mu$, on peut aisément dédoubler l'équation et obtenir une intégrale renfermant une arbitraire a,

$$S_1 = \int d\lambda \sqrt{\lambda \frac{(2h+gp+gq)\lambda - g\lambda^2 - a}{(\lambda-p)(\lambda-q)}} + \int d\mu \sqrt{\mu \frac{g\mu^2 - (2h+gp+gq)\mu + a}{(p-\mu)(\mu-q)}}.$$

Jacobi a démontré que les intégrales du problème peuvent s'écrire

$$\frac{dS_1}{da} = b, \quad \frac{dS_1}{dh} = t + \varepsilon;$$

la première ne diffère pas de l'équation (8) intégrée après qu'on a remplacé cpq par a; la seconde devient, en employant notre fonction f, équation (9),

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\pm \lambda^{\frac{3}{2}} d\lambda}{\sqrt{-f(\lambda)(\lambda-p)(\lambda-q)}} + \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\pm \mu^{\frac{3}{2}} d\mu}{\sqrt{f(\mu)(p-\mu)(\mu-q)}} = t;$$

elle détermine la loi du mouvement sur la trajectoire. On l'obtiendrait en transformant l'intégrale des forces vives à l'aide des équations (7) et (8), mais la méthode de Jacobi la donne plus naturellement.

Pour discuter la forme des lignes de thalweg, il convient de chercher les valeurs de u qui annulent $f(u)$. Les équations (3) et (4) donnent les valeurs de c et de h en fonction de $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$, c'est-à-dire des conditions initiales du mouvement; les équations (7) permettent de transformer ces expressions en fonction de $\lambda_0, \mu_0, \lambda'_0, \mu'_0$, et, en les substituant dans (9), on a

$$f(u) = g(u-\lambda_0)(u-\mu_0) - \frac{\lambda_0(\lambda_0-\mu_0)\lambda_0'^2}{4(\lambda_0-p)(\lambda_0-q)}(u-\mu_0) - \frac{\mu_0(\lambda_0-\mu_0)\mu_0'^2}{4(p-\mu_0)(\mu_0-q)}(u-\lambda_0).$$

Or $f(\mu_0)$ est essentiellement positif, car c'est un carré; $f(\lambda_0)$ est négatif, et $f(\infty)$ positif; $f(u) = 0$ admet donc une racine α supérieure à λ_0, et une β comprise entre λ_0 et μ_0. Nous pouvons écrire, au lieu de l'équation (8),

$$(10) \quad \frac{\pm d\lambda \sqrt{\lambda}}{\sqrt{(\alpha-\lambda)(\lambda-\beta)(\lambda-p)(\lambda-q)}} = \frac{\pm d\mu \sqrt{\mu}}{\sqrt{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(p-\mu)(\mu-q)}}.$$

Je dis que les binômes $\alpha - \lambda$, $\lambda - \beta$, $\alpha - \mu$, $\beta - \mu$ sont positifs; en effet, l'équation (8) prouve que $-f(\lambda)$ et $f(\mu)$ ont le même signe. Or la somme

$$-f(\lambda) + f(\mu) = [2h + g(p + q - \lambda - \mu)](\lambda - \mu) = (\lambda - \mu)\frac{ds^2}{dt^2}$$

est positive; il en est de même de $f(\mu)$ et de $-f(\lambda)$; le coefficient de u^2 dans $f(u)$ étant positif, $\lambda - \alpha$ et $\lambda - \beta$ sont de signes contraires, et c'est nécessairement le second qui est > 0; $\mu - \alpha$ et $\mu - \beta$ ont le même signe, et c'est le signe $-$, qui convient certainement à $\mu - \alpha$.

Déterminons encore les angles i, i' que T fait en un de ses points avec les lignes de courbure qui y passent; celles-ci forment avec les deux lignes de courbure infiniment voisines un petit rectangle dont la diagonale est ds, et les côtés sont les valeurs auxquelles se réduirait ds si l'on y faisait tour à tour $d\lambda$ ou $d\mu$ égaux à zéro; ce rectangle donne

$$\frac{\sin^2 i}{\sin^2 i'} = \frac{\lambda(\lambda - \mu)\,d\lambda^2}{(\lambda - p)(\lambda - q)} : \frac{\mu(\lambda - \mu)\,d\mu^2}{(p - \mu)(\mu - q)};$$

mais, si $d\lambda$ et $d\mu$ vérifient l'équation (10), ce rapport devient

$$\frac{\sin^2 i}{\sin^2 i'} = \frac{(\alpha - \lambda)(\lambda - \beta)}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)}. \tag{11}$$

Il s'agit maintenant de voir ce que nous donnerait l'intégration de l'équation (10); les deux signes $\pm$ doivent être tels que les deux membres soient tous deux > 0 ou tous deux < 0; je puis faire en sorte qu'ils soient positifs. Je distingue deux cas, selon que β est $< p$ ou $> p$. Dans la première hypothèse, λ doit rester compris entre p et α, μ entre q et β; l'équation (11) montre que, pour $\lambda = \alpha$, T est tangente à E_α, tandis que, pour $\lambda = p$, elle coupe sous un angle fini E_p, c'est-à-dire l'arc de parabole principale NON' : de même T touchera H_β et traversera H_q, c'est-à-dire P. Notre trajectoire sera inscrite dans le quadrilatère compris entre E_α et les deux branches de H_β. Si α est très-voisin de p, ou β de q, le mobile restera sur une zone très-étroite; il oscillera tout près de P ou de Q sans s'en écarter beaucoup; il est nécessaire toutefois, pour qu'il reste dans le voisinage de Q, qu'il ne monte pas plus haut que les ombilics. Les petites oscillations étudiées dès l'abord rentrent dans ce premier cas.

Quand $\beta > p$, μ peut prendre toutes les valeurs dont il est susceptible, c'est-à-dire varier entre p et q; λ doit rester entre α et β; T est comprise dans une zone annulaire entre les courbes E_α et E_β qu'elle touche tour à tour, tandis qu'elle traverse P et Q; elle pourrait même se confondre avec une ligne de courbure si α était égal à β. En les supposant inégaux, étudions le mouvement à partir du moment où le mobile a touché E_α; alors $\lambda = \alpha$ et $\mu = \mu_0$. Supposons que μ aille d'abord en croissant; λ décroîtra jusqu'à β pour revenir à α, tandis que μ, ayant atteint sa limite p, descendra jusqu'à q, puis augmentera pour être égal à μ_1 au point où T reviendra toucher E_α; or je dis que μ_1 est $> \mu_0$, c'est-à-dire que, pendant que le mobile part d'un premier point de contact avec E_α pour revenir le toucher de nouveau, son azimut a augmenté de plus de 180 degrés.

Remarquons que les deux différentielles qui entrent dans l'équation (10) sont identiques; les limites de l'intégration diffèrent seules; je désigne par le symbole $\mid a, b \mid$ l'intégrale de l'un ou de l'autre membre prise entre les limites a et b, en faisant en sorte que tous les éléments soient positifs. Cela posé, quand λ varie de α jusqu'à β pour revenir à α, l'intégrale du premier membre de (10) croît de $2 \mid \beta, \alpha \mid$; si μ, partant de μ_0 pour arriver à p, diminue jusqu'à q et revient ensuite seulement jusqu'à μ_0, ou à plus forte raison jusqu'à une valeur moindre que μ_0, l'intégrale du second membre croît au plus de

$$\mid \mu_0, p \mid + \mid q, p \mid + \mid q, \mu_0 \mid = 2 \mid q, p \mid;$$

cet accroissement est moindre que celui de l'intégrale du premier membre, car on a évidemment

$$\mid \beta, \alpha \mid > \int_\beta^\alpha \frac{d\lambda \sqrt{p}}{\sqrt{(\alpha - \lambda)(\lambda - \beta)(\lambda - p)(\lambda - q)}},$$

$$\mid q, p \mid < \int_q^p \frac{d\mu \sqrt{p}}{\sqrt{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(p - \mu)(\mu - q)}}.$$

L'inégalité annoncée résulte de ce que les seconds membres des deux inégalités ci-dessus sont égaux, en vertu d'une propriété de l'intégrale elliptique de première espèce, que je démontre, du reste, en deux mots. Dans l'intégrale en μ substituons à cette variable une autre variable ρ qui lui soit liée par la relation

$$\mu\rho - \frac{p\alpha - q\beta}{p+\alpha-q-\beta}(\mu+\rho) + \frac{p\alpha(\beta+q) - q\beta(p+\alpha)}{p+\alpha-q-\beta} = 0,$$

l'intégrale se transforme en une autre, identique à l'intégrale en λ.

Il faut que μ atteigne non-seulement la valeur μ_0, mais la dépasse et soit égal à μ_1 quand λ redevient égal à α, de sorte que

$$(12) \qquad 2\,|\,\beta,\alpha\,| - 2\,|\,q,p\,| = |\,\mu_0,\mu_1\,|\,;$$

μ pourrait être obligé d'atteindre de nouveau la limite p et de décroître ensuite, mais il n'en résulte pas de difficulté. Supposons β très-peu supérieur à p; quand μ est voisin de p, le coefficient de $d\mu$ dans (10) est très-grand, et en général nous aurons notre valeur μ_1 satisfaisant à l'égalité (12) sans que μ atteigne une seconde fois p; les coordonnées des points de contact de T avec E_α seront $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \mu_{n+1}, \ldots$; mais plus μ_n sera près de p, moins μ_{n+1} devra lui être supérieur pour que $|\,\mu_n, \mu_{n+1}\,|$ soit égal au premier membre de (12). Il est clair que les arcs successifs de T se rapprocheront d'abord de plus en plus de la portion de Q intérieure à E_α; mais, au bout d'un certain temps, ils s'en éloigneront. On pourrait faire en sorte que le mobile oscillât sur la parabole principale Q, ou que μ fût toujours égal à p; mais le moindre écart suffirait pour éloigner la trajectoire de sa position primitive; il faut, bien entendu, que l'arc décrit primitivement sur Q dépasse les ombilics.

Quand le paraboloïde est de révolution, les points de contact avec E_α sont des points où la hauteur du mobile est maximum, et l'on a le théorème analogue à celui de M. Puiseux sur le pendule sphérique.

Supposons $\beta = p$: l'équation (10) ne conduit qu'à des intégrales elliptiques; il n'est pas nécessaire de les calculer pour avoir la forme de T. On fera varier λ entre p et α, μ entre p et q; admettons encore que, pour $\lambda = \alpha$, μ soit égal à μ_0 et aille en croissant vers la limite p; comme $|\mu_0, p|$ est infini, aussi bien que $|p, \alpha|$, quand μ sera égal à p, λ devra arriver à la même valeur, c'est-à-dire que T passera par un ombilic. La courbe dépassera ce point, λ et μ prendront des valeurs différentes de p, atteindront, le premier α, le second q, et reviendront tous deux vers la valeur p qu'elles reprendront simultanément; T passera au second ombilic. La courbe est formée d'une suite d'arcs allant d'un ombilic à l'autre en touchant E_α, et sans rencontrer Q autre part qu'en N et N'; il résulte du paragraphe précédent que les points de contact avec E_α se rapprochent de plus en plus de l'un des sommets de cette ligne situés dans le plan ZOY, et T tend indéfiniment à se confondre avec un arc de Q.

Le mouvement d'un point pesant sur un paraboloïde hyperbolique se déduit aisément de ce qui précède : il suffit de changer dans les formules q en $-q$. Il faut aussi remarquer que les deux séries de surfaces homofocales qui coupent réellement la proposée sont représentées par les équations

$$\frac{x^2}{\lambda - p} + \frac{y^2}{\lambda + q} = \lambda - 2z, \quad \frac{x^2}{p - \mu} - \frac{y^2}{q + \mu} = 2z - \mu,$$

λ étant plus grand que p, et $\mu < -q$. Je continue à désigner par E_l et H_m les lignes de courbure répondant à $\lambda = l$ ou à $\mu = m$, quoique ces deux systèmes de lignes se projettent suivant des hyperboles; les deux branches de E_l sont séparées par le plan YOZ, et celles de H_m par le plan ZOX; il n'y a plus d'ombilics. L'équation (10) devient dans ce cas

$$(13) \quad \frac{\pm d\lambda\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(\alpha - \lambda)(\lambda - \beta)(\lambda - p)(\lambda + q)}} = \frac{\pm d\mu\sqrt{\mu}}{\sqrt{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(p - \mu)(q + \mu)}};$$

on démontre, comme dans la première question, que tous les binômes qui entrent dans (13) doivent être positifs, sauf $\mu + q$, qui est négatif comme μ; α et β sont encore les racines d'une équation du second degré, la première supérieure à λ_0, la seconde comprise entre λ_0 et

μ_0. La ligne de thalweg aura trois formes différentes selon que β sera plus grand que p, compris entre p et $-q$, enfin inférieur à $-q$.

Soit $\beta > p$; λ doit rester compris entre α et β, μ prenant toutes les valeurs dont il est susceptible, c'est-à-dire variant de $-q$ à $-\infty$. T traverse ZOX pour $\mu = -q$, et s'éloigne indéfiniment de ce plan de part et d'autre, tout en serpentant entre les branches de E_α et de E_β qui sont situées d'un même côté de ZOY; il n'y a qu'un nombre fini de points de contact, car le symbole $|a, b|$ ayant une signification analogue à celle que nous lui avons donnée d'abord, $|-\infty, -q|$ a une valeur finie; μ variant de $-q$ à $-\infty$, λ ne peut aller qu'un nombre fini de fois de α à β.

Quand β est compris entre p et $-q$, λ varie entre p et α, μ entre $-q$ et $-\infty$; T a une forme analogue à celle que je viens de décrire, sauf qu'elle serpente entre les deux branches de E_α, au lieu que ce soit entre une d'elles et une branche de E_β. Quand $\beta > -q$, μ varie entre β et $-\infty$, T touche une fois H_β et s'en éloigne suivant deux lignes qui serpentent entre les branches de E_α.

L'équation (13) conduit à de simples intégrales elliptiques quand β est égal à p, à zéro ou à $-q$; dans les deux premiers cas, la forme de T se déduit aisément de ce qui précède et est peu remarquable; elle le devient pour $\beta = -q$. Je suppose que μ augmente à partir de μ_0 en tendant vers $-q$; si l'on intègre l'équation (13), le second membre devient $|\mu_0, -q|$ et est infini; il doit en être de même de l'intégrale en λ, et il faut pour cela que λ aille un nombre infini de fois de p à α et de α à p; T oscillant un nombre infini de fois entre les branches de E_α se rapproche indéfiniment de P; sa projection horizontale tend à prendre la forme de la courbe $x = \sin\frac{1}{y}$.

Le mouvement sur un paraboloïde elliptique qui tourne sa convexité vers le haut se déduirait de nos premiers calculs en supposant OZ dirigé dans le sens de la pesanteur, ou en changeant dans nos formules g en $-g$. Les valeurs α et β pour lesquelles $f(u)$ s'annule sont, la première comprise entre λ_0 et μ_0, la seconde inférieure à μ_0; $f(\mu)$ et $-f(\lambda)$ doivent encore être > 0; mais, comme dans $f(u)$ le terme du second degré est $-gu^2$, on trouve que λ doit être supérieur à α et à β,

μ compris entre ces deux quantités. Il y a quatre cas dans la discussion de T, selon que $\alpha \gtrless p$ et $\beta \gtrless q$. Soit $\alpha > p$ et $\beta < q$; λ doit varier entre α et ∞, μ entre p et q; T touche E_α puis s'en éloigne indéfiniment en traversant toutes les lignes H, mais elle ne fait qu'un nombre fini de circuits autour du paraboloïde, $|\alpha, \infty|$ étant fini. Dans les trois autres hypothèses, les formes de T se rapprochent de celles qu'on trouve sur le paraboloïde hyperbolique, et je ne les passe pas en revue.

Supposons enfin que la pesanteur disparaisse ou que g s'annule; les lignes de thalweg deviennent des lignes géodésiques que je désigne par G; leur équation sur le paraboloïde elliptique se déduit de (8) et peut s'écrire

$$(14) \qquad \frac{\pm d\lambda\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(\lambda-\alpha)(\lambda-p)(\lambda-q)}} = \frac{\pm d\mu\sqrt{\mu}}{\sqrt{(\alpha-\mu)(p-\mu)(\mu-q)}},$$

α étant égal à $\frac{cpq}{2h}$. L'équation (11) se réduit à la suivante :

$$\frac{\sin^2 i}{\sin^2 i'} = \frac{\lambda-\alpha}{\alpha-\mu}, \quad \lambda \sin^2 i' + \mu \sin^2 i = \alpha,$$

propriété connue des lignes géodésiques sur les surfaces du second ordre. Quand $\alpha > p$, λ varie de α à ∞, μ de p à q; G, après avoir touché E_α, s'en éloigne indéfiniment, mais en tournant comme une spirale autour du paraboloïde; car ici $|\alpha, \infty|$ (ce symbole ayant une signification analogue à celle qu'il a eue jusqu'ici) est infini; quand donc λ va de α à ∞, il faut que μ aille un nombre illimité de fois de p à q. Si $\alpha < p$, G serpente entre les deux branches de H_α qu'elle touche un nombre infini de fois.

Lorsque α est égal à p, (14) pourrait s'intégrer à l'aide de logarithmes; mais remarquons que λ et μ peuvent prendre toutes les valeurs dont ils sont susceptibles, et supposons que λ croisse d'abord à partir de λ_0, il augmentera indéfiniment; l'intégrale du premier membre de (14) deviendra infinie; il devra en être de même pour le second membre, et cela exige que μ tende vers p en même temps que λ vers ∞. G a une branche infinie dont la projection horizontale aurait une asymptote parallèle à OY; mais cette asymptote est rejetée à l'infini. Soit, en effet, $p - \varepsilon$ la valeur de μ correspondant à une très-grande valeur λ_1 de λ; les intégrales $|\lambda_0, \lambda_1|$ et $|\mu_0, p - \varepsilon|$, qui sont égales et très-grandes, ne diffèrent que de quantités finies, l'une de $L\lambda_1$, l'autre de $\sqrt{\frac{p}{p-q}}\, L\, \frac{1}{\varepsilon}$; donc $\lambda_1 = \frac{1}{\varepsilon^n}$, n étant > 1; or, pour les points à l'infini sur G ou sur sa projection,

$$\lim x = \lim \sqrt{\frac{p\varepsilon(\lambda_1 - p)}{p-q}} = \infty.$$

Si l'on suit G à partir du point initial dans le sens où λ décroît, on voit que, quand cette variable arrive à p, il en doit être de même de μ; G passe par un ombilic, puis s'en éloigne en donnant une seconde partie dont la projection forme aussi une branche parabolique dans la direction de OY.

Les lignes géodésiques du paraboloïde hyperbolique seraient données par l'équation (14) en y changeant q en $-q$. Si α est $> p$ ou $< -q$, G se compose de deux branches infinies qui partent d'un point où elles touchent E_α ou H_α, et traversent toutes les lignes de courbure du système opposé. Quand α est entre p et $-q$, G coupe toutes les lignes de courbure; si, en particulier, on fait $\alpha = 0$, l'équation (14) modifiée donne

$$\frac{\pm d\lambda}{\sqrt{(\lambda - p)(\lambda + q)}} = \frac{\pm d\mu}{\sqrt{-(p-\mu)(\mu + q)}},$$

$$\frac{d\lambda^2}{(\lambda - p)(\lambda + q)} + \frac{d\mu^2}{(p-\mu)(\mu+q)} = 0;$$

on pourrait intégrer; mais, en se reportant aux équations (7), on trouve que cette relation, sous sa forme rationnelle, équivaut à

$$\frac{dx^2}{p} - \frac{dy^2}{q} = 0, \quad \frac{dx}{\sqrt{p}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{q}};$$

elle représente les génératrices rectilignes qu'on devait trouver au nombre des lignes géodésiques. Enfin, quand α est égal à p ou à $-q$, G coupe encore toutes les lignes de courbure, mais sa projection horizontale est asymptote à OY dans le premier cas, à OX dans le second. Il serait aisé de vérifier par le calcul que les lignes géodésiques sur le paraboloïde présentent les mêmes propriétés que sur les surfaces à centre, mais c'est leur forme que je me suis surtout proposé d'indiquer.