JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LAGUERRE

Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 247-256.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__247_0>

Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux;

PAR M. LAGUERRE.

I.

1. Soit une surface de second ordre $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$ et un point M de cette surface dont les coordonnées soient ξ, η, ζ. On a la relation

$$\frac{\xi^2}{a}+\frac{\eta^2}{b}+\frac{\zeta^2}{c}=1, \tag{1}$$

et les coordonnées d'un point quelconque de la normale menée au point M sont données par les formules

$$x=\xi\left(1+\frac{\lambda}{a}\right),\quad y=\eta\left(1+\frac{\lambda}{b}\right),\quad z=\zeta\left(1+\frac{\lambda}{c}\right),$$

où λ détermine un paramètre variable. Je supposerai λ déterminé de telle sorte que le point considéré soit un des centres de courbure principaux de la surface au point M.

En désignant, pour un instant, par x_0, y_0 et z_0 les coordonnées de ce point, les pieds des normales abaissées de ce point sur la surface sont, comme on le sait, déterminés par les équations

$$\frac{x_0-x}{\frac{x}{a}}=\frac{y_0-y}{\frac{y}{a}}=\frac{z_0-z}{\frac{z}{a}}=\rho,$$

où ρ désigne une racine quelconque de l'équation

$$\frac{ax_0^2}{(a+\rho)^2}+\frac{by_0^2}{(b+\rho)^2}+\frac{cz_0^2}{(c+\rho)^2}=1,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\frac{(a+\lambda)^2\xi^2}{a(a+\rho)^2}+\frac{(b+\lambda)^2\eta^2}{b(b+\rho)^2}+\frac{(c+\lambda)^2\zeta^2}{c(c+\rho)^2}=1.$$

Puisque, par hypothèse, le point (x_0, y_0, z_0) est un des centres de courbure principaux de la surface au point M, l'équation précédente en ρ doit avoir une racine double égale à λ; cette équation est, en effet, en vertu de la relation (1), identiquement satisfaite quand on y fait $\rho=\lambda$; mais, de plus, la dérivée doit encore s'annuler pour cette valeur; d'où l'équation suivante :

$$(2)\qquad \frac{\xi^2}{a(a+\lambda)}+\frac{\eta^2}{b(b+\lambda)}+\frac{\zeta^2}{c(c+\lambda)}=0,$$

qui donne les valeurs de λ, déterminant les deux centres de courbure principaux au point M.

2. Les pieds des normales abaissées du point (x_0, y_0, z_0) sur la surface se trouvent sur la cubique gauche déterminée par les équations

$$xy\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{yx_0}{b}-\frac{xy_0}{a}=0,\quad yz\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\frac{zy_0}{c}-\frac{yz_0}{b}=0,$$
$$zx\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+\frac{xz_0}{a}-\frac{zx_0}{c}=0;$$

multiplions la première de ces équations par z_0, la deuxième par x_0 et la troisième par y_0, il viendra

$$xyz_0\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+yzx_0\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+zxy_0\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=0,$$

équation du cône ayant pour sommet le centre de la surface et contenant les pieds des normales.

Il est clair que le plan tangent à ce cône au point (ξ, η, ζ) est le plan passant par le centre de la surface et l'axe de l'indicatrice, au point M, qui correspond au centre de courbure considéré.

L'équation de ce plan tangent est

$$\sum x\left[\eta z_0\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\zeta y_0\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\right]=0,$$

ou, en remplaçant x_0, y_0 et z_0 par leurs valeurs et faisant quelques réductions faciles,

$$(3)\qquad (a+\lambda)(b-c)\frac{x}{\xi}+(b+\lambda)(c-a)\frac{y}{\eta}+(c+\lambda)(a-b)\frac{z}{\zeta}=0.$$

3. Soient λ' et λ'' les deux racines de l'équation (2), elles correspondent aux deux axes de l'indicatrice et aux deux centres de courbure principaux corrélatifs.

De ce que je viens de dire il résulte que le plan passant par le centre de la surface et l'un des axes de l'indicatrice a pour équation

$$(4)\qquad (a+\lambda')(b-c)\frac{x}{\xi}+(b+\lambda')(c-a)\frac{y}{\eta}+(c+\lambda')(a-b)\frac{z}{\zeta}=0.$$

Considérons le centre de courbure principal N correspondant à l'autre axe de l'indicatrice; les coordonnées sont données par les formules

$$x=\xi\left(1+\frac{\lambda''}{a}\right),\quad y=\eta\left(1+\frac{\lambda''}{b}\right),\quad z=\zeta\left(1+\frac{\lambda''}{c}\right).$$

Soient A, B, C les points où la normale MN rencontre respectivement les plans principaux de la surface Oyz, Ozx et Oxy.

Les coordonnées du point C sont

$$x=\xi\left(1-\frac{c}{a}\right),\quad y=\eta\left(1-\frac{c}{b}\right),\quad z=0.$$

Par ce point, menons un plan perpendiculaire à la normale et prenons son intersection avec la droite, menée par le point N, parallèlement à l'axe des z. En désignant par C′ ce point, un calcul facile montre que ses coordonnées ont pour valeurs

$$x = \xi\left(1 + \frac{\lambda''}{a}\right), \quad y = \eta\left(1 + \frac{\lambda''}{b}\right), \quad z = \zeta\left(1 + \frac{\lambda''}{c}\right) - \frac{c(c+\lambda'')}{\zeta}\mathrm{P},$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$\mathrm{P} = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}.$$

Menons de même, par le point B, un plan perpendiculaire à MN et désignons par B′ le point où ce plan rencontre la droite menée par N parallèlement à l'axe des y; ses coordonnées seront données par les formules

$$x = \xi\left(1 + \frac{\lambda''}{a}\right), \quad y = \eta\left(1 + \frac{\lambda''}{b}\right) - \frac{b(b+\lambda'')}{\eta}\mathrm{P}, \quad z = \zeta\left(1 + \frac{\lambda''}{c}\right).$$

Désignons enfin par A′ le point où la droite menée par le point N, parallèlement à l'axe des x, rencontre le plan mené par A perpendiculairement à MN.

Le plan, passant par le centre O de la surface et les points B′ et C′, a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \xi\left(1+\frac{\lambda''}{a}\right) & \eta\left(1+\frac{\lambda''}{b}\right) & \zeta\left(1+\frac{\lambda''}{c}\right) - \frac{c(c+\lambda'')}{\zeta}\mathrm{P} \\ \xi\left(1+\frac{\lambda''}{a}\right) & \eta\left(1+\frac{\lambda''}{b}\right) - \frac{b(b+\lambda'')}{\eta}\mathrm{P} & \zeta\left(1+\frac{\lambda''}{c}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(5) \qquad \frac{\xi x}{a(a+\lambda'')} + \frac{\eta y}{b(b+\lambda'')} + \frac{\zeta z}{c(c+\lambda'')} = 0.$$

Cette équation étant symétrique par rapport aux lettres x, y et z, on en conclut que le plan OB′C′ passe par le point A′. Ainsi, les trois points A', B' et C' sont situés dans un même plan passant par le centre de la surface.

Je dis maintenant que ce plan passe par l'axe de l'indicatrice, au point M, qui correspond au centre de courbure principal distinct de N.

L'équation (2) donne en effet l'identité suivante :

$$\frac{\xi^2}{a}(b+\lambda)(c+\lambda)+\frac{\eta^2}{b}(c+\lambda)(a+\lambda)+\frac{\zeta^2}{c}(a+\lambda)(b+\lambda)=(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda''),$$

d'où, en faisant $\lambda=-a$,

$$a(a+\lambda'')=-\frac{\xi^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+\lambda')(b-c)},$$

et de même

$$b(b+\lambda'')=-\frac{\eta^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(b+\lambda')(c-a)},$$

$$c(c+\lambda'')=-\frac{\zeta^2(a-b)(b-c(c-a)}{(c+\lambda')(a-b)}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (5), il viendra

$$\frac{x(a+\lambda')(b-c)}{\xi}+\frac{y(b+\lambda')(c-a)}{\eta}+\frac{z(c+\lambda')(a-b)}{\zeta}=0;$$

c'est précisément, comme on le voit par la relation (4), l'équation du plan passant par le centre de la surface et l'axe de l'indicatrice conjugué au centre principal de courbure distinct de N. La proposition est donc démontrée.

4. De là résulte immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Soient un point* M *situé sur une surface du second ordre,* MT *et* MT' *les tangentes aux deux lignes de courbure qui se croisent en ce point. Par la droite* MT' *et le centre de la surface menons un plan* P; *puis, au point où la normale élevée au point* M *rencontre un des plans de symétrie de la surface, un plan perpendiculaire à cette normale. Ce plan coupe le plan* P *suivant une droite; par cette droite, menons un plan perpendiculaire au plan de symétrie considéré. Ce dernier* *plan rencontre la normale au centre de courbure de la section normale de la surface qui est tangente à la droite* MT [*].

5. La normale, menée à la surface par le point M, rencontre les trois points de symétrie de cette surface aux points A, B et C.

Menons par ces points des droites respectivement perpendiculaires à ces plans de symétrie. Ces droites, qui ont pour équation

$$x = \xi\left(1 - \frac{c}{a}\right), \quad y = \eta\left(1 - \frac{c}{b}\right).$$
$$y = \eta\left(1 - \frac{a}{b}\right), \quad z = \zeta\left(1 - \frac{a}{c}\right),$$
$$z = \zeta\left(1 - \frac{b}{c}\right), \quad x = \xi\left(1 - \frac{b}{a}\right),$$

sont trois génératrices d'un hyperboloïde H; je dirai que ces génératrices sont du système (G). Cet hyperboloïde admet un autre système de génération (G′); trois des génératrices de ce système sont, en particulier, déterminées par les équations

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \xi\left(1 - \dfrac{b}{a}\right), & y = \eta\left(1 - \dfrac{a}{b}\right), \\ y = \eta\left(1 - \dfrac{c}{b}\right), & z = \zeta\left(1 - \dfrac{b}{c}\right), \\ z = \zeta\left(1 - \dfrac{a}{c}\right), & x = \xi\left(1 - \dfrac{c}{a}\right). \end{cases}$$

Considérons le centre de courbure N de la surface, situé sur la normale au point N et correspondant à l'axe de l'indicatrice MT.

La génératrice de l'hyperboloïde H, passant par N et appartenant au système (G), se détermine facilement par la condition qu'elle rencontre les droites définies par les équations (6); on trouve ainsi que

[*] Ce théorème est l'extension aux surfaces du second ordre d'une élégante proposition due à M. Mannheim :

Si, au point où la normale, élevée en un point M *d'une conique, rencontre un axe de cette conique, on mène une droite perpendiculaire à cette normale, la droite, passant par le point de rencontre de cette perpendiculaire avec le diamètre qui aboutit au point* M, *et menée perpendiculairement à l'axe considéré, rencontre la normale au centre du cercle osculateur en* M.

ses équations sont

$$\frac{x - \xi\left(1 + \frac{\lambda''}{a}\right)}{\frac{\xi}{a(a+\lambda'')}} = \frac{y - \eta\left(1 + \frac{\lambda''}{b}\right)}{\frac{\eta}{b(b+\lambda'')}} = \frac{z - \zeta\left(1 + \frac{\lambda''}{c}\right)}{\frac{\zeta}{c(c+\lambda'')}}.$$

En les comparant à l'équation (5), on en conclut immédiatement que cette génératrice est perpendiculaire au plan OMT'.

D'où la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *La normale, menée en un point* M *d'une surface du second ordre, rencontre les plans principaux de cette surface en trois points. Menons respectivement par ces points trois droites* (D) *perpendiculaires aux plans principaux; elles déterminent un hyperboloïde.*

Cela posé, on peut construire deux génératrices de cet hyperboloïde, appartenant au même système que les droites (D) *et perpendiculaires au diamètre passant par le point* M. *Ces génératrices rencontrent la normale aux deux centres de courbure principaux de la surface relatifs au point* M *et les plans, menés par le diamètre, perpendiculairement à ces deux génératrices, coupent le plan tangent en* M, *suivant les axes de l'indicatrice.*

Il est à remarquer qu'en désignant par MT et MT' les tangentes à l'indicatrice, et par N, N' les centres de courbure des sections normales correspondantes, le plan mené par OM perpendiculairement à la génératrice de l'hyperboloïde passant par le point N coupe le plan tangent suivant la droite MT'.

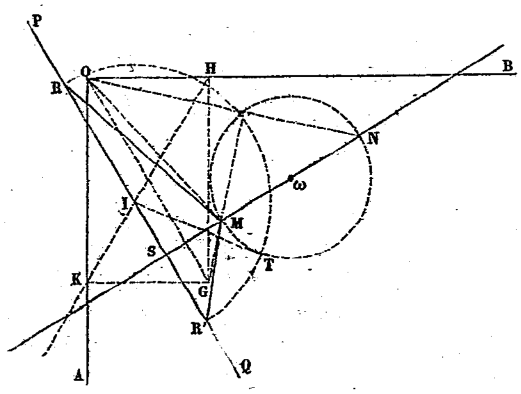
II.

6. Les trois axes d'une surface du second ordre étant donnés de position, cette surface est déterminée si l'on se donne un de ses points m et la normale en ce point. Ces données sont donc suffisantes pour obtenir en ce point les directions des axes de l'indicatrice et les centres de courbure principaux.

A cet effet, on peut, pour déterminer les axes de l'indicatrice, employer la construction suivante :

Soient OA *et* OB *deux des axes de la surface du second ordre,* M *la* *projection du point m sur le plan de ces axes,* N *et* PQ *les traces sur ce même plan de la normale et du plan tangent au point* M; PQ *est, comme on le sait, perpendiculaire à* MN.

Construisons le point de rencontre G *des hauteurs du triangle* OMN; *puis, de ce point, abaissons des perpendiculaires* GH *et* GK *sur les axes* OA *et* OB. *La droite* KH, *qui joint leurs pieds, rencontre* PQ *au*



point I. *Menons du point* I, *au cercle décrit sur* MN *comme diamètre, une droite touchant ce cercle au point* T, *et, du point* I *comme centre, décrivons un cercle ayant* IT *pour rayon : ce cercle rencontre* PQ *en deux points* R *et* R'.

Les droites MR *et* MR' *sont les projections sur le plan* OAB *des axes de l'indicatrice au point* M.

Démonstration. — Soient mL un des axes de l'indicatrice au point m et F le centre de courbure de la section normale correspondante. Deux des normales, que l'on peut mener du point F à la surface, ont leurs pieds en m et un point m' situé à une distance infiniment petite, sur l'axe mL; on sait d'ailleurs que les pieds des normales, le point F et les quatre sommets du tétraèdre formé par les plans principaux de la surface et le plan de l'infini, sont situés sur une même cubique gauche. Il en résulte que, si l'on joint le point m au point m', au point F et aux quatre sommets du tétraèdre, on a six droites situées sur un même cône du second ordre.

En d'autres termes, les droites menées par le point m parallèlement aux axes de la surface, la normale en ce point, le diamètre passant par ce point et l'axe de l'indicatrice mT, sont sur un même cône du second ordre. On voit que ce cône est circonscrit à un trièdre trirectangle; par suite, et en vertu d'une proposition bien connue, le deuxième axe mT' de l'indicatrice au point m, étant perpendiculaire aux deux génératrices mT et mF du cône, est également situé sur ce cône.

Considérons les traces de ces six droites sur le plan OAB; elles sont situées sur une même conique; d'où cette conclusion :

Les traces des axes de l'indicatrice sur le plan OAB sont données par l'intersection de la droite PQ avec l'hyperbole équilatère passant par les points O, M, N, et ayant ses asymptotes parallèles aux droites OA et OB

Pour construire ces points d'intersection, je remarque que le point G, où se rencontrent les hauteurs du triangle OMN, est situé sur cette hyperbole. Si donc du point Gm on abaisse des perpendiculaires sur les axes OA et OB, la droite HK, qui joint leurs pieds, est le diamètre de l'hyperbole conjuguée à la direction PQ. En effet, cette droite fait avec les axes des angles égaux à ceux que fait avec ces axes la droite PQ, et, de plus, elle passe par le point milieu de la corde OG de l'hyperbole, corde parallèle à PQ. Le point I, où KH rencontre PQ, est donc le point milieu des deux points R et R', où les axes de l'indicatrice rencontrent la trace du plan tangent.

Pour achever de déterminer ces points, je remarque que l'angle RmR' est droit. Considérons la perpendiculaire abaissée du point m sur PQ; le pied de cette perpendiculaire est le point S, où PQ rencontre MN. On a

$$\overline{SR}\,.\,\overline{SR} = \overline{mS}^2 = \overline{SM}\,.\,\overline{SN}\,;$$

ou bien encore, si l'on désigne par ω le centre du cercle, décrit sur MN comme diamètre, et par ρ le rayon de ce cercle,

$$\overline{IR}^2 - \overline{IS}^2 = \overline{S\omega}^2 - \rho^2\,;$$

d'où l'on conclut que les cercles, décrits respectivement sur RR' et MN comme diamètres, se coupent à angle droit; et de là résulte immédiatement la construction que j'ai donnée ci-dessus.

7. Pour déterminer maintenant les projections sur le plan AOB des

centres de courbure principaux de la surface au point m, il suffit d'inscrire une parabole dans chacun des quadrilatères formés respectivement par les droites OA, OB, MN, MR et OA, OB, MN, MR'. Les points de contact de ces paraboles avec la droite MN sont les projections cherchées des centres de courbure principaux, et ils se déterminent, comme on le sait, très-facilement au moyen de simples lignes droites.

Cette construction est justifiée par le théorème suivant :

Si, sur le plan de deux des axes de symétrie OA *et* OB *d'une surface de second ordre, on projette la normale en un point* m *de cette surface et l'un des axes de l'indicatrice en ce point, la parabole, tangente aux projections de ces deux droites et aux axes* OA *et* OB, *touche la projection de la normale en un point qui est la projection du centre de courbure de la section normale passant par l'axe de l'indicatrice considéré.*

Démonstration. — Soit mL l'axe de l'indicatrice considéré et F le centre de courbure principal correspondant. Comme je l'ai déjà rappelé, deux des normales que l'on peut abaisser du point F sur la surface ont leurs pieds au point m et au point m', situé à une distance infiniment petite sur ML.

Soit p le pied d'une autre normale quelconque passant par le point F; on sait que les sommets du tétraèdre F$mm'p$ et du tétraèdre formé par les plans principaux de la surface et le plan à l'infini sont situés sur une même cubique gauche.

Par suite, en vertu d'un théorème connu, les faces de ces tétraèdres sont osculatrices d'une autre cubique gauche, et le plan normal principal Fmm' est coupé par les sept autres faces suivant cinq droites tangentes à une même conique.

En d'autres termes, le plan normal principal passant par mL coupe les trois plans principaux de la surface suivant trois droites. Ces trois droites et la normale au point m sont tangentes à une parabole touchant la normale au point F; par suite, les projections des trois droites et de la normale sont tangentes à une parabole touchant la projection de la normale, au point qui est la projection de F; d'où la proposition énoncée ci-dessus.