JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. DARBOUX

Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 5-56.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série;

PAR M. G. DARBOUX.

INTRODUCTION.

Dans son Mémoire sur les séries trigonométriques, Riemann fait la remarque que la théorie de ces développements a été pour certaines branches de l'Analyse l'origine des plus importants progrès. Après avoir tracé l'historique détaillé de cette grande théorie, après avoir reconnu toute la valeur du Mémoire célèbre de Dirichlet, il fait remarquer cependant que la démonstration de Dirichlet ne s'applique pas à certaines fonctions exceptionnelles, et il cherche à résoudre, sans aucune limitation, le problème suivant : *Une fonction étant définie de la manière la plus générale, quelles sont les conditions qui assurent la* *légitimité de son développement en série trigonométrique?* ou, ce qui est la même chose, *quels sont les caractères distinctifs des séries trigonométriques considérées comme servant de développement à une fonction?*

Le Mémoire de Riemann a rappelé l'attention sur une question qui paraissait épuisée, qui l'était même pour les fonctions ordinairement employées en Analyse. Plusieurs des élèves de l'illustre géomètre ont publié d'intéressants Mémoires sur cette théorie, en adoptant le point de vue de leur maître et en essayant de résoudre plusieurs difficultés relatives aux fonctions singulières et à la convergence des séries qui les développent.

Le point de départ de mon travail se trouve dans l'examen de questions toutes différentes relatives aux séries trigonométriques, questions qui ont été un peu négligées depuis la publication du Mémoire de Dirichlet. Avant lui, on avait essayé de démontrer la légitimité des développements trigonométriques, en se rendant compte de l'ordre de grandeur des termes de la série. Cette évaluation n'est pas suffisante, comme Dirichlet le fait remarquer; car il fallait démontrer non-seulement que la série est convergente, mais encore en déterminer la somme, ce qui présentait des difficultés sérieuses, levées pour la première fois et d'une manière complète par l'illustre géomètre.

On connaît les résultats obtenus par Dirichlet. Toute fonction de la nature de celles employées habituellement en Analyse sera développable tant qu'elle restera finie ou même quand elle deviendra, pour une ou plusieurs valeurs de la variable, infinie d'un ordre inférieur à 1, son intégrale restant, par conséquent, finie.

Dans le travail qui va suivre, je donne d'abord des caractères précis pour reconnaître l'ordre de grandeur des termes d'une série trigonométrique, j'applique ensuite les résultats obtenus à l'étude d'une belle question que Laplace s'est proposée dans le *Calcul des probabilités* et pour la solution de laquelle il a donné une méthode célèbre : à savoir l'approximation des fonctions de très-grands nombres qu'on rencontre, soit dans le Calcul des probabilités, soit en Mécanique céleste.

Il est facile de comprendre comment cette question se relie à celle que j'ai indiquée plus haut. La plupart des fonctions de très-grands nombres entrent ou peuvent entrer comme coefficients des puissances élevées de x dans une série

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances entières de la variable. Or il suffit de remplacer dans de telles séries x par $\mathrm{R}e^{i\omega}$ et de considérer ω comme la seule variable pour obtenir une série trigonométrique, et nos méthodes se prêtent alors à l'évaluation approchée des coefficients de la série.

Parmi les applications que j'ai développées, j'indiquerai les suivantes :

1° L'approximation des polynômes de Legendre. Je donne, en particulier, une formule qui permet d'obtenir une expression approchée, l'erreur commise étant de l'ordre d'une puissance aussi grande qu'on le voudra de $\frac{1}{n}$.

2° L'approximation indéfinie des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de

$$(1 - x^2)^{-\alpha}, \quad (1 + x^2)^{-\alpha}$$

et, en général, de

$$(x - a_1)^{\alpha_1}, \quad \ldots, \quad (x - a_p)^{\alpha_p},$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ étant quelconques.

3° L'approximation de l'intégrale

$$\int f(x)\,\varphi^n(x)\,dx.$$

J'étends le résultat de Laplace au cas où les fonctions f et φ sont imaginaires, ainsi que les limites de l'intégrale.

4° L'approximation du terme général de la série de Lagrange

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)\,\varphi^n(x).$$

5° L'approximation indéfinie des polynômes qui naissent de la série hypergéométrique, et qui ont été étudiés par Jacobi et par M. Tchebychef.

Ce dernier résultat m'a permis de résoudre une question intéressante.

Les polynômes de la série hypergéométrique peuvent être employés dans les développements. On peut exprimer une fonction par une série composée de ces polynômes tout à fait semblables à ceux de Legendre, qu'ils comprennent d'ailleurs comme cas particulier. Cette série est-elle convergente et représente-t-elle la fonction ?

L'étude de cette question m'a conduit à des résultats qui ne se présentent pas dans la théorie des séries trigonométriques. Pour plus de netteté, je les énoncerai ici en supposant que les polynômes qui entrent dans la série soient ceux de Legendre. En général, si la fonction ne devient pas infinie, alors même qu'elle serait discontinue, la série représente la fonction de la même manière que si elle était une série trigonométrique, c'est-à-dire que, si la fonction est discontinue pour $x = \alpha$, la série pour $x = \alpha$ aura pour somme

$$\tfrac{1}{2}[f(\alpha + 0) + f(\alpha - 0)].$$

Mais, si la fonction devient infinie pour l'une des limites extrêmes $+1$ ou -1, la série ne sera convergente que si l'ordre de l'infini est inférieur à $\frac{3}{4}$. Ainsi la fonction $(x-1)^{-\frac{4}{5}}$ ne serait pas développable en une série convergente de fonctions X_n, quoique les intégrales qui déterminent les coefficients de la série conservent un sens déterminé.

Après avoir examiné cette première question, j'étudie les mêmes séries en donnant à la variable des valeurs imaginaires, et je montre que les résultats connus pour les fonctions de Legendre se conservent pour les polynômes les plus généraux. Les courbes qui limitent la région de convergence sont des ellipses homofocales.

J'introduis des fonctions de seconde espèce, analogues à celles que l'on connaît pour les polynômes de Legendre, et je montre en terminant que la méthode employée dans ce Mémoire peut être appliquée à tous les développements ordonnés suivant des fonctions formant une suite de Sturm [*].

---

[*] Ce travail a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 7 février 1876.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Considérons une fonction réelle ou imaginaire d'une variable réelle x développée en série trigonométrique

$$f(x) = a_0 + \Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1}$$

On sait que l'on a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Supposons que l'on se propose de développer la dérivée de la même manière; on aura

$$f'(x) = \Sigma(a'_n \cos nx + b'_n \sin nx),$$

où les coefficients sont déterminés de même par les intégrales

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx\,dx, \quad b'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\,dx,$$

et, en intégrant par partie,

$$a_n = \frac{1}{\pi}[f(2\pi) - f(0)] + nb_n, \quad b'_n = -na_n.$$

Ces dernières formules supposent toutefois que $f(x)$ ne soit pas discontinue et, par exemple, ne passe pas brusquement d'une valeur à une autre quand x varie de zéro à 2π; elles supposent, en outre, que $f(x)$ ne devienne pas infinie dans les limites de l'intégration. Admettons de plus que $f(x)$ soit une fonction analytique de période 2π. Dans ces conditions, la dérivée sera développable en série trigonométrique, les formules deviendront

$$a'_n = nb_n, \quad b'_n = -na_n,$$

et, comme a'_n, b'_n tendent vers zéro, il en sera de même de na_n, nb_n. En étendant ce raisonnement au cas où l'on considère plusieurs dérivées successives, on obtient la proposition suivante :

Si la fonction périodique $f(x)$ est telle que sa $h-1^{\text{ième}}$ dérivée et, par conséquent, les précédentes demeurent toujours continues et finies, les produits $n^h a_n$, $n^h b_n$ ont pour limite zéro quand n croît indéfiniment.

Examinons maintenant le cas où la fonction réelle ou imaginaire $f(x)$ devient infinie entre les limites de l'intégration, mais de telle manière que, si $f(x)$ devient infinie pour $x = a$, on puisse poser

$$f(x) = \frac{A}{(x-a)^p} + \psi(x), \tag{2}$$

$\psi(x)$ demeurant finie pour $x = a$ et A étant une constante. Cette supposition se réalise dans l'immense majorité des cas, toutes les fois que p est plus petit que 1. Supposons d'abord pour plus de netteté qu'il y ait un seul infini de $f(x)$ entre les limites 0, 2π, alors on aura

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos n(x-t)\,dt}{(t-a)^p} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(t) \cos n(x-t)\,dt.$$

$\psi(x)$ demeurant finie, sa dérivée sera développable en série trigonométrique et, par conséquent, la seconde intégrale du second membre donne un terme dont le produit par n tend vers zéro. Évaluons la première. Si l'on y effectue la substitution

$$t = a + \frac{u}{n};$$

elle devient

$$\frac{A n^{p-1}}{\pi} \cos n(x-a) \int_{-na}^{2n\pi - na} \frac{\cos u\,du}{u^p}$$
$$+ \frac{A n^{p-1}}{\pi} \sin n(x-a) \int_{-na}^{2n\pi - na} \frac{\sin u\,du}{u^p}.$$

Les deux intégrales qui figurent dans cette expression tendent vers des limites finies et déterminées quand n augmente indéfiniment. Ces limites sont

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u \, du}{u^p}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u \, du}{u^p}.$$

On voit donc qu'ici la partie principale des coefficients a_n, b_n est de l'ordre de $\frac{1}{n^{1-p}}$, c'est-à-dire que son produit par n^{1-p} est une quantité finie, quoique en général indéterminée, à cause de la présence des facteurs $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$.

Il est du reste facile de déterminer les valeurs des intégrales (3). Elles se déduisent, en particulier, de celles que l'on trouve à la page 197 du *Calcul intégral* de M. Serret, et l'on a

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u \, du}{u^p} &= [1 + (-1)^p]\,\Gamma(1-p) \sin \frac{p\pi}{2}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u \, du}{n^p} &= [1 - (-1)^p]\,\Gamma(1-p) \cos \frac{p\pi}{2}. \end{aligned} \right.$$

En général, la détermination que l'on doit prendre pour $(-1)^p$ et qui résulte de celle du radical $(x-a)^p$ est

$$(-1)^p = e^{-pi\pi}.$$

Dans ce cas, les formules (4) se simplifient, et l'on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u \, du}{u^p} = \frac{\pi}{\Gamma(p)} e^{-ip\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u \, du}{u^p} = \frac{-i\pi}{\Gamma(p)} e^{-ip\frac{\pi}{2}}.$$

Mais la valeur précise de ces intégrales nous sera inutile; le seul point qu'il nous importe de connaître, c'est qu'elles sont finies.

Supposons maintenant que la fonction, tout en étant développable en série trigonométrique, admette plusieurs infinis, nécessairement d'ordre inférieur à l'unité. Nous pourrons poser

$$f(x) = \frac{A}{(x-a)^p} + \frac{A'}{(x-a')^{p'}} + \ldots + \psi(x),$$

$\psi(x)$ demeurant toujours finie, et l'on appliquera la méthode précédente à chacun des termes du second membre. La partie principale des coefficients a_n, b_n s'obtiendra en remplaçant $f(x)$ par le terme correspondant à l'infini de l'ordre le plus élevé, et, s'il y en a plusieurs du même ordre, par la somme des termes correspondant à ces infinis de l'ordre le plus élevé.

On peut d'ailleurs étendre la méthode précédente de manière à obtenir une approximation indéfinie de a_n et de b_n.

En effet, il résulte des remarques déjà faites que, si la fonction et ses $p-1$ premières dérivées ne deviennent pas infinies, la $p^{ième}$ dérivée sera développable en série trigonométrique, les coefficients de $\sin nx$, $\cos nx$ étant $n^p a_n, n^p b_n$. Si maintenant cette dérivée d'ordre p devient infinie de l'ordre γ, le produit des coefficients précédents par $n^{1-\gamma}$ demeurera fini quand n croîtra. Ainsi:

Si la première dérivée de la fonction qui devient infinie est la dérivée $p^{ième}$ et si l'ordre de son plus grand infini est γ, les produits

$$n^{p+1-\gamma}a_n, \quad n^{p+1-\gamma}b_n$$

demeureront finis quand n croîtra indéfiniment.

D'après cela, si l'on peut trouver un groupe de termes ou une fonction $\varphi(x)$ se développant suivant la formule

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \Sigma(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

et tel que la $p^{ième}$ dérivée de $f(x) - \varphi(x)$ soit la première qui devient infinie, et qu'elle le devienne de l'ordre γ, on aura

$$a_n - \alpha_n = \frac{h}{n^{p+1-\gamma}}, \quad b_n - \beta_n = \frac{h_1}{n^{p+1-\gamma}},$$

h, h_1 désignant des quantités finies; α_n, β_n représentent donc a_n, b_n avec une approximation marquée par l'exposant $p+1-\gamma$.

Toutes les remarques qui précèdent sont bien simples, et la méthode précédente paraît au premier abord peu susceptible d'applications étendues. Nous espérons cependant que la suite de ce travail montrera qu'elle valait la peine d'être étudiée et proposée.

Une remarque générale peut d'ailleurs nous faire prévoir le succès de la méthode. La plupart des fonctions de très-grands nombres qu'on a à évaluer figurent comme coefficients dans les séries ordonnées suivant les puissances de la variable ; or les rapports qui existent entre ces séries et les séries trigonométriques sont bien connus. Dans le développement

$$A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n,$$

il suffit de remplacer la variable z par $Re^{i\omega}$, R et ω étant le module et l'argument de z, pour obtenir une série trigonométrique d'une variable réelle ω, R étant considéré comme constant, c'est-à-dire le point z se déplaçant sur le cercle de rayon R. Ces rapports entre les deux classes de séries ont même été utilisés par M. O. Bonnet pour la démonstration du théorème de Cauchy : le beau *Mémoire sur la théorie générale des séries* couronné par l'Académie de Bruxelles contient, en effet, la démonstration de la proposition suivante :

Si une fonction $f(z)$ est finie et uniforme à l'intérieur d'un cercle et que, sur le cercle même, elle soit développable en une série trigonométrique ordonnée suivant les sinus et les cosinus des multiples de l'argument, elle sera développable à l'intérieur du cercle en une série convergente ordonnée suivant les puissances de la variable z.

Cette proposition permet l'étude d'une question qu'on laisse en général de côté quand on s'occupe du développement des fonctions suivant les puissances entières de la variable. La série qui développe $f(z)$ étant supposée convergente pour tous les points situés à une distance moindre que R de l'origine, que deviendra la série pour un point situé sur le cercle même de convergence ? Nous voyons que, si $f(z)$, considérée comme fonction de l'argument ω de z sur le cercle de convergence, est développable en série trigonométrique, la série qui développe $f(z)$ suivant les puissances de z demeurera encore convergente sur le cercle limite ; elle cessera de l'être dans le cas contraire.

Cette remarque générale est confirmée par l'étude des cas particuliers; ainsi la fonction $\log(1+z)$ se réduit sur le cercle de convergence à

$$\frac{i\omega}{2} + \log 2i + \log\sin\frac{\omega}{2},$$

et cette fonction est développable en série trigonométrique. Donc la série qui développe $\log(1+z)$ demeurera convergente et représentera la fonction, même sur le cercle de rayon 1. Il en est de même pour $\operatorname{arc tang} x$, $\arcsin x$. Au contraire, la série du binôme qui développe $(1+z)^m$ ne sera pas toujours convergente sur le cercle limite. Si la partie réelle de m est négative et supérieure à l'unité en valeur absolue, $(1+z)^m$ deviendra infinie d'un ordre supérieur à 1 pour $z=-1$ et par conséquent ne sera pas développable en série trigonométrique convergente. Ainsi la série du binôme ne demeurera convergente sur le cercle limite que si la partie réelle de m est supérieure à -1, ce qui est conforme aux résultats trouvés par Abel.

Imaginons d'après cela qu'étant donnée une série

$$(5) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances de z, on veuille obtenir l'évaluation approchée du coefficient a_n pour n très-grand. Voici la méthode que l'on pourra suivre et qui réussit pour la plupart des fonctions que l'on a à considérer dans cette théorie.

Remarquons d'abord que, si R est le rayon du cercle de convergence, on aura

$$\lim a_n (\mathrm{R}-h)^n = 0,$$

$\mathrm{R}-h$ désignant un module quelconque inférieur à R. Quant à la limite de $a_n \mathrm{R}^n$, elle dépend de la nature des séries et peut être nulle, finie, indéterminée, infinie.

Supposons d'abord que la convergence de la série cesse au delà du cercle de rayon R, parce que la fonction $f(z)$ admet sur le cercle de convergence un ou plusieurs points à *discontinuité polaire*, c'est-à-dire pour lesquels la fonction inverse $\frac{1}{f(z)}$ demeure finie et continue. Considérons d'abord le cas où il y a un seul point de ce genre. Soit α la valeur de z correspondant à ce pôle : on pourra poser, comme on sait,

$$(6) \qquad f(z) = \frac{A_0}{(\alpha - z)^h} + \frac{A_1}{(\alpha - z)^{h-1}} + \cdots + \frac{A_{h-1}}{\alpha - z} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ demeurant finie pour $z = \alpha$ et étant par conséquent développable en une série

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n,$$

convergente dans un cercle de rayon ρ plus grand que R. En développant chacun des termes $\frac{A_i}{(\alpha - z)^{h-i}}$ suivant les puissances de z et égalant les coefficients de z^n dans les deux membres de l'équation (6), on aura

$$\begin{aligned} a_n \alpha^n = {} & \frac{A_0}{\alpha^h}(n+1)(n+2)\ldots(n+h-1) \\ & + \frac{A_1}{\alpha^{h-1}}(n+1)\ldots(n+h-2) + \ldots + \frac{A_{h-1}}{\alpha} + b_n \alpha^n. \end{aligned}$$

Or la série qui développe $\varphi(z)$ étant convergente dans un cercle de rayon $\rho > \mathrm{R}$, on a, en désignant par $\rho - k$ un nombre inférieur à ρ, mais supérieur à R,

$$\lim (\rho - k)^n b_n = 0,$$

et par conséquent

$$b_n = \frac{\varepsilon_n}{(\rho - k)^n},$$

ε_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On a donc

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_n \alpha^n = {} & \frac{A_0}{\alpha^h}(n+1)\ldots(n+h-1) \\ & + \frac{A_1}{\alpha^{h-1}}(n+1)\ldots(n+h-2) + \ldots \\ & + \frac{A_{h-1}}{\alpha} + \varepsilon_n \left[\frac{\alpha}{(\rho - k)}\right]^n, \end{aligned} \right.$$

et ce développement se compose :

1° D'une suite de termes qui sont par rapport à n des ordres de

$$n^h, \quad n^{h-1}, \quad \ldots, \quad n, \quad n^0;$$

2° Du terme

$$\varepsilon_n \left(\frac{\alpha}{\rho - k}\right)^n,$$

qui est infiniment petit par rapport à toute puissance de $\frac{1}{n}$, puisque le module R de α est inférieur à $\rho - k$.

Si l'on demande seulement le premier terme de l'expression approchée de a_n, on aura

$$a_n \alpha^n = \frac{A_0}{\alpha^h}(n+1)(n+2)\ldots(n+h-1)(1+\varepsilon),$$

ou plus simplement

$$a_n = \frac{A_0 n^{h-1}}{\alpha^{n+h}}(1+\varepsilon'),$$

ε, ε' tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Il est clair que la méthode s'applique au cas où la fonction $f(z)$ possède plusieurs points à discontinuité polaire sur le cercle de convergence. On pourra alors poser

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-\alpha)^h} + \frac{A_1}{(z-\alpha)^{h-1}} + \ldots + \frac{B_0}{(z-\beta)^k} + \frac{B_1}{(z-\beta)^{k-1}} + \ldots + \varphi(z),$$

et l'on montrera comme précédemment que le développement de $\varphi(z)$ donne des termes d'ordre nul qu'on peut négliger, par rapport à ceux qui proviennent du développement des termes simples $\frac{A_0}{(z-\alpha)^h}\cdots$. Si l'on veut avoir le premier terme seul de l'expression approchée de a_n, on pourra se borner à considérer celui des termes

$$\frac{A_0}{(z-\alpha)^h}, \quad \frac{B_0}{(z-\beta)^k}, \quad \ldots,$$

pour lequel l'exposant du dénominateur est le plus grand, ou, s'il y en a plusieurs de même exposant, le groupe des termes correspondant à l'exposant le plus élevé.

Tout ce qui précède est, on le voit, un corollaire des beaux résultats que cette partie de l'Analyse doit à Cauchy. De même que, pour discuter la convergence d'une série, il faut reconnaître quels sont les points de discontinuité de la fonction qu'elle développe, de même ici la recherche de la partie principale des coefficients de la série dépend de la manière dont la fonction devient infinie sur le cercle de convergence.

J'examinerai maintenant le cas ou la fonction admet sur le cercle de convergence une discontinuité analogue à celle des radicaux algébriques. Supposons que, α étant la valeur de z à laquelle correspond cette discontinuité, on ait

$$f(z) = (z-\alpha)^k \varphi(z) + \psi(z), \tag{7}$$

φ et ψ désignant des fonctions développables suivant les puissances entières de $z-\alpha$ et k un nombre *fractionnaire positif ou négatif*. En développant $\varphi(z)$ suivant les puissances de $z-\alpha$, on pourra écrire

$$\varphi(z) = \varphi(\alpha) + (z-\alpha)\varphi'(\alpha) + \ldots + (z-\alpha)^{p-1}\frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\ldots p-1} + (z-\alpha)^p \varpi(z),$$

$\varpi(z)$ étant de même nature que $\varphi(z)$, et par suite

$$\begin{aligned} f(z) &= \varphi(\alpha)(z-\alpha)^k + \varphi'(\alpha)(z-\alpha)^{k+1}\ldots \\ &+ \frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\ldots p-1}(z-\alpha)^{k+p-1} + (z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z), \end{aligned}$$

égalité que l'on pourra écrire

$$f(z) - \mathrm{U}_p = (z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z), \tag{8}$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{U}_p = \varphi(\alpha)(z-\alpha)^k + \varphi'(\alpha)(z-\alpha)^{k+1} + \ldots + \frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\ldots p-1}(z-\alpha)^{p+k-1}.$$

Dans la formule (8), les deux membres sont deux expressions différentes d'une même fonction. Si l'on développe U_p suivant les puissances de z en une série

$$\mathrm{U}_p = \Sigma a'_n z^n,$$

le développement de cette fonction sera

$$(9) \qquad f(z) - U_p = (z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z) = \Sigma(a_n - a'_n)z^n.$$

De la première expression de la fonction $f(z) - U_p$, il résulte que ce développement sera convergent à l'intérieur du cercle de rayon R, comme celui de $f(z)$, et que d'ailleurs cette fonction ne pourra devenir infinie ou discontinue sur le cercle de convergence que pour $z = \alpha$. Si nous avons pris p quelconque, mais assez grand pour que $p+k$ soit positif, il ressort de la deuxième expression de $f(z) - U_p$ que cette fonction ne deviendra pas infinie pour $z = \alpha$, et par conséquent que son développement ne cessera pas d'être convergent sur le cercle-limite.

Posons

$$z = \mathrm{R}e^{i\omega},$$

la série (9)

$$(10) \qquad (z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z) = \Sigma(a_n - a'_n)\mathrm{R}^n e^{ni\omega}$$

deviendra une série trigonométrique, et il est aisé de trouver l'ordre de grandeur de ses coefficients. Désignons par e le plus grand entier contenu dans $p+k$, on aura

$$p + k = e + f,$$

f étant la partie fractionnaire. La première dérivée de

$$(z-\alpha)^{p+k}\varpi(z) + \psi(z),$$

qui deviendra infinie, sera celle de l'ordre $e+1$, et elle deviendra infinie de l'ordre de

$$(z-\alpha)^{f-1}$$

pour $z = \alpha$, les coefficients de la série (10) seront par conséquent, d'après ce qui a été démontré, de l'ordre de

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{e+f+1} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{n}\right)^{p+k+1}$$

c'est-à-dire que l'on aura

$$(a_n - a'_n)R^n = \frac{h}{n^{p+k+1}},$$

h étant une quantité finie, quand n croît indéfiniment.

En d'autres termes, $a'_n R^n$ représente $a_n R^n$ avec une approximation de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+k+1}}$. On voit donc que, toutes les fois qu'on prendra un terme de plus dans U_p, c'est-à-dire qu'on ajoutera une unité à p, on aura un nouveau terme de la formule d'approximation des coefficients de la série qui développe $f(z)$.

Il est très-facile de trouver l'expression développée de a'_n. Si nous nous reportons à l'expression de U_p, et que nous développions chaque terme suivant la formule du binôme, nous aurons

$$\begin{aligned}\alpha^n a'_n &= \varphi(\alpha)(-1)^k \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n}\\ &\quad \varphi'(\alpha)(-1)^k \frac{(k+1)k\ldots(k-n+2)}{1.2\ldots n} + \frac{\varphi''(\alpha)}{1.2}(-1)^k \frac{(k+2)\ldots(k-n+3)}{1.2\ldots n}\\ &\quad + \ldots + (-1)^{p+k-1} \frac{(k+p-1)\ldots(k+p-n)}{1.2\ldots n} \frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\ldots p-1}.\end{aligned}$$

Le rapport de chacun des termes au précédent est de l'ordre de $\frac{1}{n}$. La partie principale de l'expression approchée des coefficients proviendra donc du terme en $\varphi(\alpha)$. Il est du reste facile de reconnaître l'ordre de chacun des termes. En effet, si l'on supprime le dernier en $\varphi_{p-1}(\alpha)$, c'est-à-dire si l'on change p en $p-1$, l'erreur commise sur $a_n\alpha^n$, en prenant $a'_n\alpha^n$ qui était de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+k+1}}$ deviendra de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+k}}$. Donc le dernier terme en $\varphi_{p-1}(\alpha)$ est précisément de ce dernier ordre, et par conséquent le premier en $\varphi(\alpha)$ est de l'ordre de $\frac{1}{n^{k+1}}$. C'est du reste ce qu'on établirait aussi en substituant aux factorielles leurs expressions approchées.

De tout ce qui précède résulte le théorème suivant :

Si sur le cercle de convergence la fonction $f(z)$ devient discontinue *à la manière des radicaux algébriques, et que l'on ait*

$$f(z) = (z-\alpha)^k \varphi(z) + \psi(z),$$

φ et ψ étant deux fonctions développables suivant les puissances de $z-\alpha$, la partie principale des coefficients de $f(z)$ s'obtiendra en substituant au développement de cette fonction celui de

$$\varphi(\alpha)(z-\alpha)^k;$$

si l'on veut obtenir une approximation plus grande, on remplacera $f(z)$ par

$$\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\varphi'(\alpha)\right](z-\alpha)^k,$$

$$\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\varphi'(\alpha) + \frac{(z-\alpha)^2}{1.2}\varphi''(\alpha)\right](z-\alpha)^k,$$

$$\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\varphi'(\alpha) + \ldots + \frac{(z-\alpha)^p}{1.2\ldots p}\varphi_p(\alpha)\right](z-\alpha)^k.$$

l'erreur commise étant toujours de l'ordre du dernier terme ajouté dans l'expression approchée, multiplié par $\frac{1}{n}$.

Il est clair que si, sur le cercle de convergence, il y a plusieurs points de la nature précédente, il faudra les examiner séparément et réunir les termes provenant de chacun d'eux.

II.

Appliquons les propositions précédentes à la fonction X_n de Legendre, qui naît du développement

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \Sigma t^n X_n,$$

et supposons d'abord la variable x réelle et comprise entre -1 et $+1$. Posons $x = \cos\varphi$, la fonction précédente devient infinie de l'ordre $\frac{1}{2}$

pour $t = e^{i\varphi}$, $t = e^{-i\varphi}$; car on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-te^{i\varphi})(1-te^{-i\varphi})}}.$$

En appliquant les règles données, on voit que, pour avoir l'expression approchée de X_n, il suffira de substituer à la fonction proposée la somme des deux termes

$$\frac{1}{\sqrt{(1-te^{i\varphi})(1-e^{-2i\varphi})}} + \frac{1}{\sqrt{(1-te^{-i\varphi})(1-e^{2i\varphi})}},$$

que l'on développe très-facilement suivant les puissances de t; on aura ainsi

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\left(\frac{e^{ni\varphi}}{\sqrt{1-e^{-2i\varphi}}} + \frac{e^{-ni\varphi}}{\sqrt{1-e^{2i\varphi}}}\right);$$

ou, en réduisant et remplaçant le facteur numérique par son expression approchée $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$,

$$(11) \qquad X_n = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\varphi}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{\pi}{4}\right],$$

l'erreur commise étant de l'ordre de $\frac{1}{n\sqrt{n}}$. C'est l'expression connue de Laplace.

La même méthode s'applique au cas où x est plus grand que 1 ou imaginaire. Posons, en effet,

$$x + \sqrt{x^2-1} = \xi,$$

et choisissons le signe du radical, de telle manière que le module de ξ soit plus grand que 1. Cela est possible dans le cas actuel. En effet, aux deux déterminations du radical correspondent pour ξ deux valeurs dont le produit est l'unité, et ces valeurs n'ont l'unité pour module que si x est compris entre -1 et $+1$. Dans tous les autres cas, l'une d'elles a un module supérieur à l'unité. Ce module est même susceptible d'une représentation géométrique élégante. C'est la somme des deux demi-axes de l'ellipse ayant pour foyers les deux points $1, -1$ et passant par le point x.

La plus petite valeur de t qui annule $\sqrt{1-2tx+t^2}$ est $\frac{1}{\xi}$. L'expression $\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$ sera donc développable en série convergente, tant que le module de t sera inférieur ou égal à $\frac{1}{\xi}$ sur le cercle de convergence; elle deviendra infinie pour $t=\frac{1}{\xi}$ et comme le terme simple

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t\xi)(1-\xi^{-2})}}.$$

La partie principale de $\frac{X_n}{\xi^n}$ sera donc le coefficient de t^n dans le développement de ce terme suivant les puissances de t, et l'on aura

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^{-2}}}\left(1+\frac{p}{n}\right), \tag{12}$$

p demeurant une quantité finie lorsque, ξ restant fixe, n croît indéfiniment.

La même méthode s'applique aux polynômes très-importants qui naissent de la série hypergéométrique, et qui ont été considérés par Jacobi dans un travail posthume, inséré au tome 56 du *Journal de Crelle*, et par M. Tchebychef, dans un Mémoire de 1869 (Académie de Saint-Pétersbourg). On sait que la série hypergéométrique est définie par l'équation

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 &+ \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots \\ &+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{1.2\ldots p}\frac{\beta\ldots(\beta+p-1)}{\gamma\ldots(\gamma+p-1)}x^p+\ldots. \end{aligned}$$

Elle se termine si l'un des éléments α, β qui y entrent symétriquement est un nombre entier négatif. Jacobi donne, pour les polynômes qu'on obtient ainsi, l'expression élégante

$$X_n = F(\alpha+n,-n,\gamma,x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}x^{n+\gamma-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}. \tag{13}$$

Il en fait connaître une fonction génératrice qui a été aussi employée par M. Tchebychef. On a, en remplaçant, pour abréger, $1-2x$ par z,

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\left(t-1+\sqrt{1-2tz+t^2}\right)^{\gamma-1}\left(1+t-\sqrt{1-2tz+t^2}\right)^{\alpha-\gamma}}{(2t)^{\alpha-1}\sqrt{1-2tz+t^2}} = \mathrm{H} \\ &= \sum \frac{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n} t^n \mathrm{X}_n. \end{aligned} \right.$$

Or supposons x comprise entre zéro et 1, et posons $x = \sin^2\varphi$. Le premier membre est développable en série convergente, tant que le module de t est inférieur à l'unité, et il devient infini de l'ordre $\frac{1}{2}$ pour deux points du cercle de convergence correspondant aux valeurs $t = e^{2i\varphi}$, $t = e^{-2i\varphi}$. Appliquons la règle de l'article précédent. On aura les valeurs approchées des coefficients de la série en substituant à H la somme du terme

$$\mathrm{A} = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}(e^{2i\varphi}-1)^{\gamma-1}(e^{2i\varphi}+1)^{\alpha-\gamma}}{(2e^{2i\varphi})^{\alpha-1}\sqrt{(1-te^{-2i\varphi})(1-e^{-4i\varphi})}},$$

correspondant au premier infini, et du terme A' correspondant au second infini, que l'on déduit du précédent en y changeant i en $-i$. Le développement de ces deux termes suivant les puissances de t s'effectue sans difficulté par la formule du binôme, et l'on obtient l'expression approchée du coefficient de t^n,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n}\mathrm{X}_n = \sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma}\cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}}\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n} \\ \times\cos\left[(2n+\alpha)\varphi - \frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right] + \frac{p}{n\sqrt{n}} \end{aligned}$$

et, en remplaçant les factorielles par leurs expressions approchées,

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{X}_n = {}& \frac{\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}} n^{\frac{1}{2}-\gamma}\sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma}\cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} \\ & \cos\left[(2n+\alpha)\varphi - \frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right] + \frac{p_1}{n^{\frac{1}{2}+\gamma}}, \end{aligned} \right.$$

expression qui comprend comme cas particulier celle qui a été donnée pour les polynômes de Legendre. Les dérivées des polynômes généraux X_n étant encore des séries hypergéométriques, on s'assurera aisément que ces expressions approchées peuvent être différentiées jusqu'à un ordre quelconque, mais fixe quand n croîtra; nous avons utilisé cette propriété dans notre Mémoire *Sur les fonctions de deux angles*, etc. (*Journal de M. Liouville*, 2^e^ série, t. XIX), pour obtenir les expressions approchées des dérivées des polynômes de Legendre.

Si la variable x est imaginaire ou n'est pas comprise entre zéro et 1, nous poserons encore

$$z = 1 - 2x, \quad z + \sqrt{z^2 - 1} = \xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x},$$

le signe du radical étant déterminé par la condition que le module de ξ soit supérieur à l'unité. Le développement de H sera convergent tant que le module de t ne dépassera pas $\frac{1}{\xi}$. Sur le cercle de convergence, H aura un seul infini correspondant à la valeur $t = \frac{1}{\xi}$; en substituant donc à H le terme unique

$$\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}(1-\xi)^{\gamma-1}(1+\xi)^{\alpha-\gamma}}{2^{\alpha-1}\sqrt{(1-\xi^{-2})(1-t\xi)}},$$

et développant suivant les puissances de t, on sera conduit pour X_n à l'expression approchée

$$(16) \qquad X_n = \frac{\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}} n^{\frac{1}{2}-\gamma} 2^{\alpha-1} (1 - \xi^{-1})^{\frac{1}{2}-\gamma} (1 + \xi^{-1})^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} \xi^n \left(1 + \frac{p}{n}\right),$$

expression qui se réduit bien à celle que nous avons obtenue pour les polynômes de Legendre quand on y fait $\alpha = \gamma = 1$. Elle est, on le voit, de la forme

$$(17) \qquad X_n = \varphi(\xi) n^{\frac{1}{2}-\gamma} \xi^n (1 + \varepsilon), \quad \xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x},$$

$\varphi(\xi)$ désignant une fonction indépendante de n et ε une quantité de l'ordre de $\frac{1}{n}$.

III.

Avant de continuer l'étude des polynômes précédents, nous allons montrer que la méthode que nous avons proposée s'applique à la plupart des exemples traités par Laplace et nous nous proposerons d'abord de trouver l'expression approchée, pour n très-grand, de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de l'expression $(1 - x^2)^{-\alpha}$. Cette dérivée, divisée par $\Gamma(n+1)$, est le coefficient de t^n dans le développement de

$$[1 - (x+t)^2]^{-\alpha},$$

suivant les puissances de t. Or ce développement sera évidemment convergent tant que le module de t sera inférieur au plus petit des modules des binômes $1 - x$, $1 + x$. Supposons d'abord que ces deux derniers modules ne soient pas égaux et que le plus petit soit celui de $1 - x$. L'expression précédente pouvant s'écrire

$$(1 - x - t)^{-\alpha}(1 + x + t)^{-\alpha},$$

pour avoir l'expression approchée des coefficients des puissances de t dans son développement, il faudra, d'après la règle donnée, la remplacer par le terme simple

$$(1 - x - t)^{-\alpha} 2^{-\alpha},$$

qu'on obtient en remplaçant t par $1 - x$ dans le second facteur. On obtient ainsi

$$\frac{1}{1\,2\,..n} \frac{d^n}{dx^n}(1 - x^2)^{-\alpha} = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(1-x)^{n+\alpha}\,1.2\ldots n} 2^{-\alpha}\left(1 + \frac{p}{n}\right),$$

p ayant la signification déjà donnée, ou, en remplaçant les factorielles par leurs expressions approchées,

$$\frac{d^n}{dx^n}(1 - x^2)^{-\alpha} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha - \frac{1}{2}} \frac{n^n e^{-n}\sqrt{\pi}}{(1-x)^{n+\alpha}}(1 + \varepsilon).$$

Si l'on fait $\alpha = \frac{1}{2}$, on retrouve le résultat de Laplace, résultat auquel ce grand géomètre parvient par une analyse assez longue, et moins rigoureuse que la précédente.

Il nous reste à traiter le cas où les modules de $1-x$, $1+x$ sont égaux, c'est-à-dire où x est de la forme zi, z étant réel. Alors il y aura deux infinis sur le cercle de convergence, et il faudra réunir au terme précédent celui qu'on obtient en changeant dans l'équation x en $-x$. On a ainsi

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{-\alpha} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{n^n e^{-n}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{(1-x)^{n+\alpha}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+\alpha}}\right].$$

On voit que, si l'on change x en ix, on aura, pour toutes les valeurs réelles de x,

$$\frac{d^n}{dx^n}(1+x^2)^{-\alpha} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{n^n e^{-n}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{i^n}{(1-ix)^{n+\alpha}} + \frac{(-i)^n}{(1+ix)^{n+\alpha}}\right].$$

La méthode s'applique sans modification au produit suivant :

$$(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\ldots(x-a_p)^{m_p},$$

et, sans qu'il soit nécessaire d'insister, on voit que l'on sera conduit à la formule suivante :

$$(18)\quad \frac{d^n}{dx^n}(x-a_1)^{m_1}\ldots(x-a_p)^{m_p} = (a_1-a_2)^{m}\ldots(a_1-a_p)^{m_p}\frac{d^n}{dx^n}(x-a_1)^{m_1},$$

où a_1 désigne celle des quantités $a_1, \ldots, a_p$ la plus rapprochée de x. S'il existe plusieurs racines également rapprochées, on prendra celle qui correspond à l'exposant le plus petit. S'il y en a plusieurs également rapprochées de x avec le même exposant, il faudra faire la somme des termes que l'équation (18) donnerait pour chacune d'elles. Du reste, ces résultats pourraient se justifier, quoique d'une manière moins simple, par l'application de la règle de Leibnitz relative à la différentiation d'un produit, et ils sont pleinement confirmés par ce que l'on sait sur les dérivées des fractions rationnelles.

Nous allons maintenant examiner une question tout à fait nouvelle et chercher comment on peut déterminer l'expression approchée du terme général de la série de Lagrange.

Soit

$$y = x + t\varphi(y) \tag{19}$$

une équation définissant y en fonction de x et de t. On aura

$$f(y)\frac{dy}{dx} = \Sigma \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n}{dx^n} \varphi^n(x) f(x). \tag{20}$$

La série sera convergente tant que t sera inférieur au plus petit des modules pour lesquels la racine qu'on développe cesse d'être uniforme. Supposons, comme cela a lieu dans le plus grand nombre des cas, que la convergence cesse parce que la racine devient double. Supposons que, pour $t = h$, y devienne égal à β et racine double. On aura

$$\beta = x + h\varphi(\beta), \quad 1 = h\varphi'(\beta). \tag{21}$$

Pour avoir l'expression approchée de y dans le voisinage de β, posons

$$y = \beta + z, \quad t = h + u, \tag{22}$$

z et u étant infiniment petites. Substituons ces valeurs dans l'équation proposée, et développons en série, nous aurons, en nous bornant au premier terme,

$$z^2 = -\frac{2u\varphi(\beta)}{h\varphi'(\beta)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - t\varphi'(\beta)} = -\frac{1}{hz\varphi'(\beta)},$$

d'où, en substituant et remplaçant u par $t - h$ et h par sa valeur déduite des formules

$$f(y)\frac{dy}{dx} = \frac{f(\beta)\varphi'(\beta)}{\sqrt{2\varphi(\beta)\varphi''(\beta)[1 - t\varphi'(\beta)]}}.$$

Ainsi la fonction qu'on développe devient infinie de l'ordre $\frac{1}{2}$ sur le cercle de convergence. En la réduisant au terme précédent, que l'on développera suivant les puissances de t, on aura la partie principale de chaque coefficient. On trouve ainsi

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n}{dx^n}[\varphi^n(x)f(x)] = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\frac{f(\beta)\varphi'^{n+1}(\beta)}{\sqrt{2\varphi(\beta)\varphi''(\beta)}},$$

ou bien

$$(23)\qquad \frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n}{dx^n}[\varphi^n(x)f(x)] = \frac{f(\beta)}{\sqrt{2\pi n}}\frac{\varphi'^{n+1}(\beta)}{\sqrt{\varphi(\beta)\varphi''(\beta)}}(1+\varepsilon).$$

Si dans cette formule on change n en $n-p$, $f(x)$ en $f(x)\varphi^p(x)$, on a

$$(24)\qquad \frac{1}{\Gamma(n+1-p)}\frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}[\varphi^n(x)f(x)] = \frac{f(\beta)}{\sqrt{2\pi n}}\frac{\varphi^p(\beta)\varphi'^{n-p+1}(\beta)}{\sqrt{\varphi(\beta)\varphi''(\beta)}}(1+\varepsilon').$$

Si, en particulier, on fait $p=1$, on a le terme général de la série que développe non plus $f(y)\frac{dy}{dx}$, mais $f(y)$

Ces formules, qui sont nouvelles, me paraissent intéressantes en ce qu'elles font dépendre l'expression approchée d'une fonction de x des valeurs d'une fonction d'une autre variable β.

Si, quand la variable t atteint le module h, il pouvait y avoir plusieurs valeurs de t pour lesquelles la racine qu'on développe devient égale à une autre, il faudrait faire entrer en considération plusieurs termes semblables à ceux que donne la formule (20).

C'est ce qui arrive notamment si, $\varphi(x)$ et x étant réels, β est imaginaire; car supposons que, lorsque t tend vers une valeur h, la racine qu'on développe tende vers la racine double β. Lorsque t tendra vers la valeur h' conjuguée de h, la racine y tendra vers la racine β' double et conjuguée de β. Il faudra donc ajouter au terme que donnent les formules (23), (24) le terme imaginaire conjugué, c'est-à-dire prendre le double de la partie réelle de ce terme.

Laplace a déjà traité par une méthode spéciale l'équation

$$u - e\sin u = \zeta,$$

que l'on rencontre dans la théorie des planètes.

IV.

Une des applications principales que Laplace traite dans cette théorie de l'approximation des fonctions de très-grands nombres consiste dans la solution de la question suivante : Trouver l'expression approchée de

$$\int u^s u'^{s'} u''^{s''}, \ldots f(x)\, dx$$

lorsque les exposants s, s', ... sont très-grands, u, u', u'', ..., $f(x)$ désignant des fonctions continues quelconques de x. Les exposants s, s', s'' peuvent être mis sous la forme $\alpha n + \beta$, où α et β sont finis et où n est un entier qui seul sera supposé très-grand. On voit que l'on aura à chercher la limite d'une expression de la forme

$$v_n = \int_a^b \varphi^n(x) f(x)\, dx, \tag{25}$$

n étant entier.

On peut trouver beaucoup de développements dont les coefficients contiennent les intégrales précédentes. Par exemple, si l'on considère une fonction $\varpi(x)$ développable suivant la formule de Maclaurin

$$\varpi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$$

on aura

$$\int_a^b \varpi[t\varphi(x)] f(x)\, dx = a_0 v_0 + a_1 v_1 t + \ldots + a_n v_n t^n + \ldots.$$

Nous choisirons une fonction particulière et nous étudierons le développement

$$\int_a^b \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{1 - t\varphi(x)}} = \Sigma \frac{1.3.5 \ldots 2n-1}{2.4.6 \ldots 2n} v_n t^n. \tag{26}$$

D'après la formule de Wallis, l'expression approchée du développement de $v_n t^n$ est $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Supposons, pour traiter le cas le plus important, que la fonction

$\varphi(x)$ ait un ou plusieurs maxima et que sa plus grande valeur absolue ne corresponde pas à une des limites de l'intégrale. Supposons que cette valeur soit atteinte une seule fois pour $x = \alpha$. S'il n'en était ainsi, on décomposerait l'intégrale en plusieurs autres jouissant de cette propriété. La série

$$\frac{1}{\sqrt{1 - t\varphi(x)}} = \Sigma \frac{1.3 \ldots 2n-1}{2.4 \ldots 2n} t^n \varphi^n(x)$$

sera convergente dans les limites de l'intégration tant que $t\varphi(\alpha)$ aura un module plus petit que l'unité. Multiplions par $f(x)\,dx$ et intégrons, nous retrouverons la formule (26), et nous voyons que le développement en série sera convergent toutes les fois que t sera inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{\varphi(\alpha)}$. Voyons comment l'intégrale devient infinie pour $t = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$.

A cet effet, considérons la différence entre cette intégrale et la suivante :

$$\int_a^b \frac{f(\alpha)\,dx}{\sqrt{1 - t\varphi(\alpha) - \frac{\varphi''(\alpha)(x-\alpha)^2}{2\varphi(\alpha)}}},$$

En se rappelant que $\varphi(\alpha)$ est un maximum et que, par conséquent, $\varphi'(\alpha)$ est nul, on verra facilement que la différence des deux intégrales demeure finie, même pour $t = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$. En effet, la différence des éléments correspondants peut alors s'écrire

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(\alpha)}}} - \frac{f(\alpha)\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{-\frac{\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}}},$$

et en réduisant cette différence de deux fractions à un dénominateur commun on reconnaîtra sans peine qu'elle reste finie pour $x = \alpha$. Ainsi l'intégrale (26) devient infinie comme l'intégrale plus simple

$$\int_a^b \frac{f(\alpha)\,dx}{\sqrt{1 - t\varphi(\alpha) - \frac{\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}(x-\alpha)^2}},$$

et, par conséquent, on aura la partie principale des coefficients de la série (26) en remplaçant l'intégrale du premier membre par le terme précédent. Comme d'ailleurs l'intégrale précédente est la somme de trois autres prises entre les limites suivantes :

$$\int_a^{\alpha-h}, \quad \int_{\alpha-h}^{\alpha+h}, \quad \int_{\alpha+h}^{b},$$

et que la première et la troisième de ces intégrales demeurent toujours finies, on pourra se borner, pour simplifier l'écriture, à la seconde, où h sera supposé fixe, mais aussi petit qu'on le voudra. Cette intégrale a pour valeur

$$\frac{f(\alpha)}{\text{A}} \log \frac{\text{A}h + \sqrt{1 - t\varphi(\alpha) + \text{A}^2h^2}}{-\text{A}h + \sqrt{1 - t\varphi(\alpha) + \text{A}^2h^2}},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\text{A} = \sqrt{\frac{-\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}}.$$

A sera une quantité réelle, puisque pour tout maximum en valeur absolue $\varphi(\alpha)$ et $\varphi''(\alpha)$ sont de signes contraires. Si t tend vers $\frac{1}{\varphi(\alpha)}$, le dénominateur de la quantité placée sous le signe logarithmique devient nul. En multipliant par la quantité conjuguée, on a

$$2\frac{f(\alpha)}{\text{A}} \log\left[\text{A}h + \sqrt{1 - t\varphi(\alpha) + \text{A}^2h^2}\right] - \frac{f(\alpha)}{\text{A}} \log[1 - t\varphi(\alpha)].$$

La première partie de cette expression demeure finie, et il nous suffira de considérer la seconde

$$\frac{-f(\alpha)}{\text{A}} \log[1 - t\varphi(\alpha)] = -f(\alpha)\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}} \log[1 - t\varphi(\alpha)].$$

En la développant suivant les puissances de t, et prenant le coefficient de t^n, nous aurons l'expression approchée des coefficients de la formule (26)

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} v_n = f(\alpha)\frac{\varphi^n(\alpha)}{n}\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}(1+\varepsilon),$$

ou, en remplaçant la factorielle du premier membre par son expression approchée,

$$(27)\qquad v_n = \int_a^b f(x)\,\varphi^n(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,f(\alpha)\,\varphi^n(\alpha)\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}\,(1+\varepsilon').$$

C'est la formule de Laplace. Elle est établie en toute rigueur et ne suppose rien sur la nature de $f(x)$, qui peut être réelle ou imaginaire.

On peut encore obtenir le même résultat par la considération de l'intégrale plus simple

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{1-t\varphi(x)} = v_0 + v_1 t + \ldots + v_n t^n + \ldots.$$

Remarquons d'abord que, si on la décompose en trois

$$\int_a^{\alpha-h},\quad \int_{\alpha-h}^{\alpha+h},\quad \int_{\alpha+h}^{b},$$

la première et la troisième demeurent finies pour $t=\frac{1}{\varphi(\alpha)}$, et tout se borne à la considération de la seconde, où h est fixe, mais pris aussi petit qu'on le veut. Ainsi nous avons à rechercher une évaluation approchée de

$$\int_{\alpha-h}^{\alpha+h} \frac{f(x)\,dx}{1-t\varphi(x)}.$$

Posons

$$1-t\varphi(\alpha)=u^2,\quad x-\alpha=uz,$$

cette intégrale deviendra

$$\int_{-\frac{h}{u}}^{\frac{h}{u}} \frac{uf(\alpha+uz)\,dz}{1-\varphi(\alpha+uz)\,\dfrac{1-u^2}{\varphi(\alpha)}}.$$

En développant l'élément suivant les puissances de u et nous bornant aux deux premiers termes, nous trouvons

$$\frac{1}{u}\int_{-\frac{h}{u}}^{\frac{h}{u}} \frac{f(z)\,dz}{1-\frac{\varphi''}{2\varphi}z^2} + \int_{-\frac{h}{u}}^{\frac{h}{u}} \frac{z\,dz}{1-\frac{\varphi''}{2\varphi}z^2}\left(f' + \frac{f\varphi'''}{6\varphi}\,\frac{z^2}{1-\frac{\varphi''}{2\varphi}z^2}\right) + u\int + \ldots,$$

et il serait facile de prouver, comme dans la méthode précédente, que la différence entre l'intégrale proposée et la somme des deux précédentes demeure finie, même pour $t = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$. La première devenant infinie d'un ordre supérieur, nous pouvons négliger l'autre, et le calcul de cette première intégrale nous donne

$$\frac{2f(\alpha)}{u}\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}\,\text{arc tang}\frac{h}{u}\sqrt{\frac{-\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}},$$

ou, pour u suffisamment petit,

$$\frac{\pi f(\alpha)}{u}\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}} = \frac{\pi f(\alpha)}{\sqrt{1-t\varphi(\alpha)}}\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}.$$

Le développement de ce terme suivant les puissances de t conduit au même résultat que la première méthode. Nous voyons d'ailleurs comment, en continuant le développement suivant les puissances de u, nous aurons autant de termes qu'on le voudra de l'expression approchée.

Il est à remarquer que la formule (27), établie pour n entier, s'applique au cas de n fractionnaire. En effet, soit n' la partie entière de n et posons $n = n' + k$, on aura

$$\int_a^b f(x)\varphi^{n'}(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{n'}}\,f(\alpha)\varphi^{n'}(\alpha)\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}(1+\varepsilon).$$

En remplaçant $f(x)$ par $f(x)\varphi^k(x)$, et remarquant qu'il est indifférent de mettre n' ou n en dénominateur dans le second membre, nous retrouverons la formule (27), étendue au cas de n fractionnaire.

Laplace fait un grand nombre d'applications de cette formule. Nous indiquerons seulement la suivante. Prenons

$$f(x) = x^{\alpha-1}, \quad \varphi(x) = x e^{-x}.$$

Le maximum de $\varphi(x)$ a lieu pour $x = 1$, et nous aurons

$$\int_0^\infty x^{n+\alpha-1} e^{-nx}\, dx = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n^{n+\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, e^{-n} \sqrt{2}$$

ou

$$(28) \qquad \Gamma(n+\alpha) = \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\alpha-\frac{1}{2}}.$$

C'est l'expression approchée de Stirling. La présence de l'arbitraire α que nous y laissons est très-commode pour les applications.

Nous avons fait usage plusieurs fois déjà de cette expression approchée pour réduire les factorielles; mais remarquons que nous aurions pu commencer par cette application et que nous ne nous appuyons que sur le résultat

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

déduit de la formule de Wallis. Nous aurions même pu ne pas l'admettre et le déduire de la comparaison entre les deux résultats fournis par les deux méthodes que nous avons données successivement, mais cela n'a pas d'importance.

Avec des modifications convenables, la méthode précédente s'étend aux intégrales prises entre des limites imaginaires ou pour lesquelles $\varphi(x)$ est imaginaire. Reprenons le développement

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1 - t\varphi(x)}} = \Sigma \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} v_n t^n,$$

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont maintenant des fonctions imaginaires définies dans une certaine région du plan.

Si l'intégrale est prise entre deux points A et B, la série

$$\frac{1}{\sqrt{1 - t\varphi(x)}} = \Sigma \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} t^n \varphi_n(x)$$

sera convergente tant que $t\varphi(x)$ aura un module plus petit que l'unité.

Si cette condition est réalisée dans toute l'étendue de la ligne d'intégration, on pourra multiplier par $f(x)\,dx$ et intégrer; la série (29) sera convergente. Il suffit donc, pour que la convergence de cette série soit assurée, que t soit inférieur à l'inverse du module maximum de $\varphi(x)$ sur la ligne d'intégration.

Imaginons maintenant que l'on considère toutes les lignes d'intégration pour lesquelles l'intégrale conserve la même valeur. Il est clair que la ligne la plus avantageuse sera celle pour laquelle le module maximum sera le plus petit, car cette ligne donnera la plus grande valeur de t pour laquelle on sera assuré que la série demeure convergente. Ainsi il faut chercher, parmi toutes les lignes possibles d'intégration, celle pour laquelle le module maximum sera le plus petit, c'est-à-dire celle pour laquelle le module sera un minimum maximorum.

L'étude des modules jouissant de propriétés analogues a été faite à propos de la série de Lagrange, et l'on sait que, s'il en existe, les valeurs de x qui les donnent satisfont à l'équation

$$\varphi'(x) = 0.$$

Supposons donc, en nous plaçant dans cette hypothèse, que la ligne d'intégration passe par le point α, pour lequel on a

$$\varphi'(\alpha) = 0, \quad \text{mod. } \varphi(\alpha) \text{ minimum maximorum.}$$

Alors les raisonnements faits dans le cas des variables réelles subsistent entièrement. Si l'on suit une ligne d'intégration passant par le point α, l'intégrale demeure finie tant que le module de t est inférieur à $\frac{1}{\varphi(\alpha)}$, et elle ne devient infinie que si l'on a $t = \frac{1}{\varphi(\alpha)}$; alors elle devient infinie comme l'intégrale plus simple

$$\int \frac{f(\alpha)\,dx}{\sqrt{1 - t\varphi(\alpha) - \frac{\varphi''(\alpha)}{2\varphi(\alpha)}(x-\alpha)^2}}.$$

On est donc conduit à la même règle que dans le cas des variables réelles. La formule (27) s'applique encore aux intégrales imaginaires ainsi considérées, pourvu que les conditions supposées sur la ligne d'intégration puissent être remplies.

Appliquons ces considérations générales à l'étude de l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)\frac{x^n(1-x)^n}{(x-y)^n}\,dx,$$

où y et $f(x)$ peuvent être imaginaires. On a ici

$$\varphi(x)=\frac{x(1-x)}{x-y}.$$

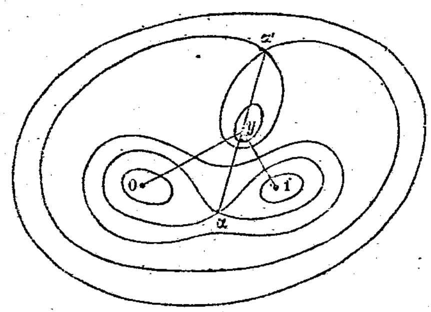
L'équation qui donne α est la suivante :

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha-y}$$

et l'on en déduit

$$\alpha=y\pm\sqrt{y^2-y}.$$

Construisons les points correspondants aux deux racines de cette équation.



Si nous représentons sur le plan les points 0, 1, y qui correspondent aux valeurs 0, 1, y de la variable complexe, on prendra sur la bissectrice de l'angle $0y1$ deux longueurs égales $y\alpha$, $y\alpha'$, moyennes proportionnelles entre les deux rayons $0y$, $y1$. Les points α, α' ainsi obtenus représentent les deux racines de l'équation qui détermine α. Représentons, pour plus de netteté, les courbes d'égal module de la fonction

$$\frac{x(1-x)}{x-y}.$$

Ces courbes, pour de très-petites valeurs du module, sont de petits ovales décrits autour des points o, 1. Ces ovales grandissent avec le module et viennent se réunir au point α pour y former une courbe à point double; puis cette courbe continue à grandir jusqu'à ce qu'elle ait un point double en α', et ensuite elle se réduit à un ovale enveloppant le point y, entouré lui-même d'un autre ovale grandissant indéfiniment à mesure que la première se rapproche du point y. La figure montre que le module minimum maximorum, pour toutes les lignes d'intégration allant du point o au point 1, correspond au point α. Nous pouvons maintenant appliquer la formule (27).

On verra sans peine que, si l'on pose

$$\xi = 1 - 2y + \sqrt{4y^2 - 4y},$$

le signe du radical étant pris de telle manière que le module soit plus grand que 1, on a

$$\alpha = \frac{1 - \xi^{-1}}{2}, \quad \alpha - y = \frac{\xi}{4}(1 - \xi^{-2}), \quad \varphi(\alpha) = \frac{1}{\xi}, \quad \varphi''(\alpha) = -\frac{8}{\xi(1 - \xi^{-2})}.$$

On aura donc pour n très-grand

$$\int_0^1 f(x)\frac{x^n(1-x)^n dx}{(x-y)^n} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\, f\left(\frac{1-\xi^{-1}}{2}\right)\xi^{-n}(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons, par exemple,

$$f(x) = \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}}{x-y},$$

et nous trouverons

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{x^{n+\gamma-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\,dx}{(x-y)^{n+1}} \\ &\qquad = 2^{2-\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,(1-\xi^{-1})^{\gamma-\frac{3}{2}}(1+\xi^{-1})^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}\xi^{-n-1}(1+\varepsilon).\end{aligned}\right.$$

Nous aurons à faire usage de cette formule.

V

Jusqu'ici nous n'avons recherché que les premiers termes des expressions approchées. Nous allons maintenant appliquer le théorème donné à la fin de l'article I$^{\text{er}}$, pour obtenir différentes formules d'approximation indéfinie. Rappelons en quelques mots l'énoncé de ce théorème. Si une fonction $f(z)$ est développable en une série

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots,$$

convergente dans l'intérieur d'un cercle de rayon R et que la série cesse d'être convergente, parce que la fonction présente sur le cercle limite une ou plusieurs discontinuités, telle que pour l'une quelconque d'entre elles, ayant lieu au point α, on ait

$$f(z) = (z-\alpha)^k \varphi(z) + \psi(z),$$

φ et ψ étant des fonctions développables suivant les puissances de $z-\alpha$, on aura l'expression approchée de ses coefficients en substituant à la fonction $f(z)$ la somme

$$\Sigma(z-\alpha)^k \left[\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(z-\alpha) + \ldots + \varphi_p(\alpha)\frac{(z-\alpha)^p}{1.2\ldots p}\right],$$

étendue à tous les points de discontinuité, en développant chacun des termes de cette somme suivant les puissances de z et rangeant par ordre de grandeur tous les coefficients ainsi obtenus. L'ordre de l'erreur commise sera toujours celui du premier terme qu'on aurait à écrire si l'on voulait obtenir une approximation plus grande.

Appliquons d'abord ce théorème aux polynômes de Legendre, et pour cela considérons leur fonction génératrice

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.$$

Supposons d'abord x réel et posons $x = \cos\varphi$. Sur le cercle de convergence la fonction deviendra infinie de l'ordre $\frac{1}{2}$ pour

$$t = e^{i\varphi} \quad \text{et} \quad t = e^{-i\varphi}.$$

Nous aurons ici

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = (t-e^{i\varphi})^{-\frac{1}{2}}(t-e^{-i\varphi})^{-\frac{1}{2}}.$$

En appliquant la proposition générale que nous venons de rappeler, substituons à la fonction les deux groupes de termes

$$\begin{aligned}\frac{(t-e^{i\varphi})^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2i\sin\varphi}}\Bigg[1 &- \frac{1}{2}\left(\frac{t-e^{i\varphi}}{2i\sin\varphi}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{t-e^{i\varphi}}{2i\sin\varphi}\right)^2 + \dots \\ &+ (-1)^p\frac{1.3.5\dots 2p-1}{2.4\dots 2p}\left(\frac{t-e^{i\varphi}}{2i\sin\varphi}\right)^p\Bigg] \\ &+ \left(\frac{t-e^{-i\varphi}}{-2i\sin\varphi}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{t-e^{-i\varphi}}{2i\sin\varphi}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{t-e^{-i\varphi}}{2i\sin\varphi}\right)^2+\dots\right],\end{aligned}$$

imaginaires conjugués et correspondant aux deux infinis, si nous effectuons ensuite par la formule du binôme le développement de chacun des termes de la somme précédente, nous aurons

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} X_n &= \frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n}\frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} \\ &\times\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}\right]-\frac{1}{2}\frac{1}{2n-1}\frac{\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi+\frac{\pi}{4}\right]}{2\sin\varphi}\right. \\ &\qquad\left. +\frac{1.3}{2.4}\frac{1.3}{(2n-3)(2n-5)}\frac{\cos\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\varphi+\frac{3\pi}{4}\right]}{(2\sin\varphi)^2}\dots\right\}.\end{aligned}\right.$$

La loi est évidente. L'erreur commise est toujours de l'ordre du premier terme négligé. Ainsi, si l'on prend les p premiers termes, l'erreur sera de l'ordre de $\frac{1}{n^p\sqrt{n}}$.

Si x n'est pas compris entre -1 et $+1$ ou s'il est imaginaire, la fonction génératrice n'aura, comme nous l'avons vu, qu'une seule discontinuité sur le cercle de convergence et l'on trouvera de même

$$\begin{aligned}X_n = \frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^{-2}}}\Bigg[\xi^n &- \frac{1}{2}\frac{1}{2n-1}\frac{\xi^{n-2}}{1-\xi^{-2}} \\ &+ \frac{1.3}{2.4}\frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)}\frac{\xi^{n-4}}{(1-\xi^{-2})^2}+\dots\Bigg],\end{aligned}$$

ξ ayant la signification déjà indiquée à l'article II.

Appliquons la même méthode à la dérivée déjà considérée

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{-\alpha},$$

qui est le coefficient multiplié par $\Gamma(n+1)$ de t^n dans le développement de

$$[1-(x+t)^2]^{-\alpha},$$

suivant les puissances de α. Si les modules de $1-x$, $1+x$ ne sont pas égaux et que celui de $1-x$ soit le plus petit, nous avons vu que la fonction précédente n'a qu'un point de discontinuité sur le cercle de convergenc eet, en appliquant le théorème général, on trouvera sans peine

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{-\alpha} = 2^{-\alpha}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(1-x)^{n+\alpha}}\left[1+\frac{\alpha}{1}\frac{\alpha-1}{\alpha+n-1}\frac{1-x}{2} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2+\ldots\right].$$

Si les modules de $1-x$, $1+x$ étaient égaux, il faudrait réunir aux termes précédents ceux qui en proviennent, en y changeant x en $-x$.

VI.

Proposons-nous de même de rechercher une formule d'approximation indéfinie des polynômes de la série hypergéométrique. Comme nous l'avons déjà dit, on peut en donner l'expression remarquable

$$X_n = F(\alpha+n, -n, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}x^{n+1-\gamma}(1-x)^{n+\gamma-\alpha},$$

analogue à celle que l'on doit à Olinde Rodrigues pour les polynômes de Legendre et qui conduit aux mêmes conséquences.

Si l'on considère l'équation du second degré

$$(31) \qquad y = x + ty(1-y),$$

la formule de Lagrange nous donnera, comme on sait,

$$f(y)\frac{dy}{dx} = f(x) + \ldots + \Sigma \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n}{dx^n} f(x) x^n (1-x)^n,$$

et, si l'on prend

$$f(x) = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha},$$

on aura

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\frac{dy}{dx} = \Sigma \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n}{dx^n} x^{n+1-\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma},$$

ou

$$(32) \qquad y^{1-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha}\frac{dy}{dx} = \Sigma \frac{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} t^n X_n.$$

En remplaçant, dans le premier membre, y, $\frac{dy}{dx}$ par leurs valeurs, on aura la fonction génératrice considérée à l'article II, où nous avons donné le principal terme de la formule approchée de X_n.

Supposons que la variable x ne soit pas réelle et comprise entre zéro et 1, alors nous avons vu que, si l'on pose

$$\xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x},$$

le signe du radical étant pris de manière que le module de ξ soit plus grand que 1, la série (32) est convergente tant que t est inférieur à $\frac{1}{\xi}$, et, sur le cercle de convergence, le premier membre de cette équation admet une seule discontinuité et devient infini pour $t = \frac{1}{\xi}$. C'est, du reste, ce que l'on peut aussi conclure de la discussion de l'équation (31) du second degré qui donne y.

D'après cela, pour obtenir une approximation indéfinie des coefficients de la série (32) et par suite des polynômes X_n, la méthode générale nous indique qu'il faudra développer la fonction

$$y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x},$$

suivant les puissances de $t - \frac{1}{\xi}$, ou, ce qui est la même chose, de

$1 - \xi t$ en une série qui sera de la forme

$$\frac{A_0}{\sqrt{1-\xi t}} + A_1 + A_2\sqrt{1-\xi t} + A_3(1-\xi t) + \ldots,$$

et garder seulement les termes irrationnels; car les autres ne donnent pas de coefficient pour t^n, n étant suffisamment grand, et d'ailleurs leur ensemble constituera l'analogue de la fonction que nous avons appelée $\psi(z)$ dans le théorème général.

Tout se réduit donc à développer $y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x}$ suivant les puissances de $\xi t - 1$. En gardant les p premiers termes irrationnels de ce développement et en les substituant à la fonction qu'on développe, on aura les p premiers termes de l'expression approchée des coefficients de la série (32).

Posons

$$\xi t - 1 = u^2,$$

et introduisons u à la place de t dans l'équation qui définit y. Elle prendra la forme remarquable

$$y - x' = u\sqrt{y(1-y)}, \tag{33}$$

où l'on a posé

$$x' = \frac{1-\xi}{2},$$

et qui se prête encore à l'application de la formule de Lagrange. Si, de l'équation (33), on tire $\frac{\partial y}{\partial x'}$, y étant considéré comme fonction de x' et de u, on établira facilement l'identité

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\xi}{2u}\frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}\frac{\partial y}{\partial x'}, \tag{34}$$

et le premier membre de la formule (32) prendra la formule

$$\frac{\xi}{2u}y^{\gamma-\frac{3}{2}}(1-y)^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}\frac{\partial y}{\partial x'}.$$

On voit que, y étant considéré comme défini par l'équation (33), on peut, en mettant à part $\frac{\xi}{2u}$, développer l'expression précédente suivant la formule de Lagrange, et l'on obtient ainsi

$$\begin{aligned}&\frac{\xi}{2u}y^{\gamma-\frac{3}{2}}(1-y)^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}\frac{\partial y}{\partial x'}\\&=\frac{\xi}{2u}\sum_{p=0}\frac{u^p}{1.2\ldots p}\frac{d^p}{dx'^p}x'^{\frac{p}{2}+\gamma-\frac{3}{2}}(1-x')^{\frac{p}{2}+\alpha-\gamma-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

ou, en remplaçant x' par sa valeur $x'=\frac{1-\xi}{2}$,

$$(35)\quad\left\{\begin{aligned}&y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x}\\&=2^{1-\alpha}(-1)^{\gamma-1}\xi\sum_{p=0}\frac{(1-\xi t)^{\frac{p-1}{2}}}{\Gamma(p+1)}\frac{d^p}{d\xi^p}(\xi-1)^{\frac{p}{2}+\gamma-\frac{3}{2}}(\xi+1)^{\frac{p}{2}+\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\right.$$

En égalant les coefficients de t^n dans ce développement et dans la formule (32), nous aurons le résultat cherché. On trouve ainsi, en remplaçant x par sa valeur en fonction de ξ,

$$x=-\frac{(1-\xi)^2}{4},$$

et p par $2k$,

$$(36)\quad\left\{\begin{aligned}&X_n\frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n}(\xi-1)^{2\gamma-2}(\xi+1)^{2\alpha-2\gamma}\xi^{-n-\alpha}\\&=\sum_{k=0}\frac{(1-2k)(3-2k)\ldots(2n-1-2k)}{\Gamma(2k+1)2.4\ldots2n}\frac{d^{2k}}{d\xi^{2k}}(\xi-1)^{k+\gamma-\frac{3}{2}}(\xi+1)^{k+\alpha-\gamma-\frac{1}{2}},\end{aligned}\right.$$

formule qui réalise l'approximation que nous avons en vue. En écrivant d'abord les premiers termes, elle prend la forme

$$\begin{aligned}&X_n\frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+\frac{1}{2})}(1-\xi^{-1})^{2\gamma-2}(1+\xi^{-1})^{2\alpha-2\gamma}\xi^{-n+\alpha-2}\\&=(\xi-1)^{\gamma-\frac{3}{2}}(\xi+1)^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2(2n-1)}\frac{d^2}{d\xi^2}(\xi-1)^{\gamma-\frac{1}{2}}(\xi+1)^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}}\\&\qquad+\frac{1}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\frac{d^4}{d\xi^4}(\xi-1)^{\gamma+\frac{1}{2}}(\xi+1)^{\alpha-\gamma+\frac{3}{2}}-\ldots,\end{aligned}$$

dont la loi est évidente.

On pourrait développer plus complétement cette formule en remplaçant les dérivées qui y sont indiquées par leurs expressions, qu'il est facile d'obtenir. Nous nous contenterons de donner les deux premiers termes de la formule. On a ainsi

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\gamma)}\xi^n(1-\xi^{-1})^{\gamma-\frac{1}{2}}(1+\xi^{-1})^{\frac{1}{2}+\alpha-\gamma}X_n \\ &\quad = 1-\frac{(2\gamma-1)(2\alpha-2\gamma+1)}{4(2n-1)}-\frac{1+\xi^{-1}}{1-\xi^{-1}}\frac{(2\gamma-1)(2\gamma-3)}{8(2n-1)} \\ &\qquad -\frac{(2\alpha-2\gamma+1)(2\alpha-2\gamma-1)}{8(2n-1)}\frac{1-\xi^{-1}}{1+\xi^{-1}}+\ldots, \end{aligned}\right.$$

les termes négligés étant de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que x n'est pas réel et compris entre zéro et 1; mais nous pouvons passer des résultats obtenus à ceux qui se rapportent à ce dernier cas. Alors la fonction

$$y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x}$$

aura deux infinis sur le cercle de convergence correspondant aux valeurs

$$t=\xi,\quad t=\xi^{-1},$$

et il faudra réunir les termes relatifs à ces deux infinis. Si l'on pose

$$(38)\qquad x=\sin^2\varphi,$$

on trouve

$$\xi=e^{-2i\varphi},\quad \xi^{-1}=e^{2i\varphi}.$$

Réunir les termes correspondant aux deux valeurs de t, ξ, ξ^{-1}, ce sera donc prendre le double de la partie réelle dans les formules (36) et (37). On trouve ainsi

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\frac{1}{2})X_n}{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)}\sin\varphi^{\gamma-\frac{1}{2}}\cos\varphi^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}} \\ &\quad =\left[1-\frac{(2\gamma-1)(2\alpha-2\gamma+1)}{4(2n-1)}\right]\cos\left[(2n+\alpha)\varphi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right] \\ &\qquad -\sin\left[(2n+\alpha)\varphi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right] \\ &\qquad \times\left[\frac{(2\gamma-1)(2\gamma-3)}{8(2n-1)}\cot\varphi-\frac{(2\alpha-2\gamma+1)(2\alpha-2\gamma-1)}{8(2n-1)}\operatorname{tang}\varphi\right] \end{aligned}\right.$$

pour l'approximation du second ordre de X_n, formule qui est bien d'accord, d'une part, avec la première approximation, d'autre part, avec le résultat obtenu à l'article précédent pour les polynômes de Legendre.

Il est aisé de reconnaître que la même méthode sera applicable toutes les fois que l'on recherchera une formule d'approximation indéfinie pour les coefficients de la série de Lagrange. Reprenons l'équation

$$y = x + t\varphi(y), \tag{40}$$

qui donne

$$F(y) = \sum \frac{t^n}{1.2\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} F'(y)\varphi^n(y), \tag{41}$$

et supposons, comme nous l'avons déjà fait (art. III), que la convergence cesse, parce que, sur le cercle limite, la racine y qu'on développe devient double. En appelant alors β sa valeur, on a

$$\beta = x + h\,\varphi(\beta), \quad 1 = h\,\varphi'(\beta),$$

h désignant la valeur de t pour laquelle y devient racine double et égale à β. La méthode générale que nous avons suivie nous prescrit alors de développer la fonction $F(y)$ suivant les puissances de $t - h$ ou de $1 - t\,\varphi'(\beta)$ et de garder les seuls termes irrationnels. En développant ces termes irrationnels, on aura les différents termes de la formule d'approximation indéfinie des coefficients de la série (41). Or l'équation (40) peut s'écrire

$$y - \beta = \sqrt{1 - t\,\varphi'(\beta)}\,\varpi(y), \tag{42}$$

en posant

$$\varpi^2(y) = \frac{\varphi(y)(y-\beta)^2}{\varphi(y) - \varphi(\beta) - (y-\beta)\varphi'(\beta)},$$

et il est facile de voir que $\varpi(y)$ est une fonction demeurant finie pour $y = \beta$. Si, dans la formule (42), on pose

$$1 - t\,\varphi'(\beta) = u^2,$$

elle devient

$$y - \beta = u\varpi(y),$$

et, sous cette forme, on pourra appliquer la série de Lagrange à développer $F(y)$ suivant les puissances de u. On aura

$$F(y) = F(\beta) + \quad + \sum \frac{[1 - t\varphi'(\beta)]^{\frac{n}{2}}}{1.2\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \varpi^n(y) F(y),$$

les dérivées $\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \varpi^n(y) F(y)$ étant prises pour $y = \beta$.

VII.

Les résultats relatifs à l'approximation indéfinie des polynômes X_n sont si essentiels dans notre analyse que nous croyons utile de les établir par une autre méthode, qui nous fera connaître du reste une propriété importante de l'erreur commise quand on remplace ces polynômes par leurs expressions approchées. Cette méthode a été déjà employée par M. Bonnet pour les polynômes de Legendre (voir *Journal de M. Liouville*, 1re série, t. XVII, p. 265).

Rappelons d'abord quelques propriétés de ces polynômes. Ils satisfont à l'équation différentielle

$$(43) \quad x(1-x)\frac{d^2 X_n}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + 1)x]\frac{dX_n}{dx} + n(\alpha + n)X_n = 0.$$

On a aussi

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_m X_n \, dx = 0$$

et

$$(44) \quad J_n = \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_n^2 \, dx = \frac{\Gamma(n+1)}{2n+\alpha} \frac{\Gamma^2(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma+n)}.$$

Cette dernière propriété est fort importante. Si nous remplaçons les Γ par leurs expressions approchées, on trouve, pour n très-grand,

$$(45) \quad J_n = \Gamma^2(\gamma)\, n^{1-2\gamma}$$

On a aussi

$$\frac{J_n}{J_{n-1}} = \frac{n(2n+\alpha-2)(\alpha+n-\gamma)}{(2n+\alpha)(\alpha+n-1)(\gamma+n-1)}. \tag{46}$$

Cette expression de J_n conduit à une conséquence importante. Elle ne permet pas de fixer pour chaque valeur de x l'ordre de X_n, mais elle donne l'ordre de l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x)\,X_n dx,$$

où a et b sont compris entre zéro et 1, et où $\varphi(x)$ est une fonction quelconque que, pour plus de netteté, nous supposerons toujours finie. Comparons, en effet, cette intégrale à la suivante :

$$\int_a^b X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx,$$

qui est une fraction de J_n, θJ_n. Divisons l'intervalle (a, b) en deux séries d'intervalles, séparés ou juxtaposés, les uns pour lesquels X_n sera inférieur à $Hn^{\frac{1}{2}-\gamma}$, H désignant un nombre positif quelconque, les autres pour lesquels X_n est supérieur en valeur absolue à $Hn^{\frac{1}{2}-\gamma}$. On aura, pour l'intégrale prise dans les premiers intervalles,

$$\int \varphi(x)\,X_n dx < Hn^{\frac{1}{2}-\gamma}\int \pm\,\varphi(x)\,dx < A\,n^{\frac{1}{2}-\gamma}H,$$

le signe $\pm$ étant pris de telle manière que l'élément de l'intégrale soit toujours positif et A désignant une limite supérieure, nécessairement finie, de cette intégrale.

Comparons maintenant l'intégrale $\int \varphi(x)\,X_n dx$, prise dans les intervalles où X_n est plus grand que $Hn^{\frac{1}{2}-\gamma}$, à la suivante :

$$\int X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx = \theta_1 J_n,$$

prise dans les mêmes intervalles. On aura, d'après un théorème connu, une limite supérieure de la valeur de

$$\frac{\int \varphi(x)\,X_n dx}{\int X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx};$$

en prenant le rapport des éléments correspondants des deux intégrales pour une valeur x' de x, comprise dans les limites de l'intégration, on aura donc

$$\frac{\int \varphi(x) X_n \, dx}{\theta_1 J_n} < \frac{\varphi(x') X'_n}{X'^2_n x'^{\gamma-1} (1-x')^{\alpha-\gamma}} < \frac{\varphi(x')}{X'_n x'^{\gamma-1} (1-x')^{\alpha-\gamma}},$$

et, comme X'_n est plus grand que $Hn^{\frac{1}{2}-\gamma}$ dans tout l'intervalle de l'intégration, on aura, en remplaçant X'_n par sa limite inférieure,

$$\int \varphi(x) X_n dx < \theta_1 J_n \frac{\varphi(x')}{x'^{\gamma-1} (1-x')^{\alpha-\gamma}} \frac{n^{\gamma-\frac{1}{2}}}{H}.$$

Si l'on remplace J_n par son expression approchée, on a

$$\int \varphi(x) X_n dx < \frac{B}{H} n^{\frac{1}{2}-\gamma},$$

B étant un nombre fini. En réunissant les résultats relatifs aux deux sens d'intervalles, on a, en valeur absolue,

$$\int_a^b \varphi(x) X_n dx < \left(AH + \frac{B}{H}\right) n^{\frac{1}{2}-\gamma}, \tag{47}$$

A et B étant des nombres finis et H quelconque. Cette formule montre que l'intégrale est *au plus* de l'ordre de $n^{\frac{1}{2}-\gamma}$. Ainsi, sans que l'on connaisse l'ordre de X_n, le résultat relatif à J_n permet de fixer une limite supérieure de l'ordre de toutes les intégrales où X_n entre en facteur, prises entre deux limites fixes, comprises entre zéro et 1. C'est un résultat intéressant, dont nous allons faire usage.

Remplaçons, dans l'équation différentielle à laquelle satisfait X_n, x par $\sin^2\varphi$. Cette équation deviendra

$$\frac{d^2 X_n}{d\varphi^2} + \frac{dX_n}{d\varphi}[(2\gamma-1)\cot\varphi - (2\alpha+1)\operatorname{tang}\varphi] + 4n(\alpha+n) X_n = 0. \tag{48}$$

Pour faire disparaître le second terme, effectuons la substitution

$$X_n = u \sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma} \cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}}, \tag{49}$$

nous aurons

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\left[(2n+\alpha)^2 - \frac{(1-2\gamma)(3-2\gamma)}{4\sin^2\varphi} - \frac{(\gamma-\alpha)^2-\frac{1}{4}}{\cos^2\varphi}\right] = 0.$$

Si nous posons

$$\lambda = \frac{(1-2\gamma)(3-2\gamma)}{4\sin^2\varphi} + \frac{(\gamma-\alpha)^2-\frac{1}{4}}{\cos^2\varphi},$$

l'équation prendra la forme

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u(2n+\alpha)^2 = \lambda u.$$

Considérons λu *comme une fonction connue de* φ, et proposons-nous d'intégrer cette équation. L'équation sans second membre aurait pour intégrale

$$u = \mathrm{A}\cos[(2n+\alpha)\varphi + h],$$

A et h étant des constantes. En appliquant la méthode de Cauchy, nous aurons pour l'intégrale de l'équation avec second membre

$$(50)\qquad u = \mathrm{A}\cos[(2n+\alpha)\varphi+h] + \frac{1}{2n+\alpha}\int_p^{\varphi} u'\lambda'\sin[(2n+\alpha)(\varphi-\varphi')]\,d\varphi',$$

$u'\lambda'$ désignant ce que deviennent u et λ par le changement de φ en φ', et p étant quelconque. Tant que φ n'approche pas des valeurs zéro, $\frac{\pi}{2}$, λ' demeure fini, et le terme complémentaire, qui est de la forme (47), est au plus de l'ordre de $\frac{n^{\frac{1}{2}-\gamma}}{2n+\alpha}$ ou $n^{-\frac{1}{2}-\gamma}$. On a donc

$$(51)\qquad u = \mathrm{A}\cos[(2n+\alpha)\varphi + h] + p_1 n^{-\frac{1}{2}-\gamma},$$

p_1 demeurant toujours au-dessous d'une certaine limite, tant que φ ne s'approche ni de zéro ni de $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire tant que x est compris entre ε et $1-\varepsilon'$, ε, ε' étant positifs et fixes quand n croît, mais d'ailleurs aussi petits qu'on le veut.

Quant aux constantes A et h, il est inutile de les chercher par cette méthode. Nos premiers résultats nous les ont fait connaître. En effet, deux expressions

$$A \cos[(2n+\alpha)\varphi + h], \quad A' \cos[(2n+\alpha)\varphi + h']$$

ne peuvent représenter la même fonction avec la même approximation pour une infinité de valeurs de φ que si A, A', h, h' sont respectivement égales ou du moins différentes de quantités de l'ordre de celles qu'on néglige. Ce que le résultat actuel ajoute d'essentiel porte sur la limite de l'erreur commise. Nous voyons maintenant que l'on a

$$\begin{aligned} X_n = {} & \frac{\Gamma(\gamma)\, n^{\frac{1}{2}-\gamma}}{\sqrt{\pi}} \sin\varphi^{\frac{1}{2}-\gamma} \cos\varphi^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} \\ & \times \cos\left[(2n+\alpha)\varphi - \frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right] + \frac{p}{n^{\frac{1}{2}+\gamma}}, \end{aligned}$$

où p est un nombre qui demeure au-dessous d'un nombre fixe, même quand x varie, pourvu qu'il reste compris entre ε et $1-\varepsilon'$, ε' étant fixes. Auparavant, nous savions seulement que ce nombre p demeure fini quand, x restant fixe, n croît indéfiniment, ce qui n'est pas équivalent au résultat actuellement établi.

Ainsi ces expressions approchées des polynômes X_n n'ont pas lieu dans le voisinage des valeurs 0, 1 de la variable x, et il est d'ailleurs facile de se rendre compte de ce résultat pour les fonctions de Legendre. Ces fonctions pour $x=1$ sont toujours égales à l'unité; or leur expression approchée, si elle était exacte pour $x=1$, les rendrait plus petites que toute quantité donnée, pour n croissant indéfiniment.

Si, dans l'intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx,$$

on remplace X_n par son expression approchée, elle devient

$$\frac{2\Gamma'(\gamma)}{\pi} n^{1-2\gamma} \int u^2 d\varphi = \frac{2\Gamma^2(\gamma)}{\pi} n^{1-2\gamma}\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon' + \frac{p}{n}\right),$$

ε' étant de la forme $a\varepsilon$, où a est fini.

On a donc

$$\left(\int_0^\varepsilon + \int_{1-\varepsilon}^1\right) X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx = J_n\left(a\varepsilon + \frac{p}{n}\right),$$

où a et p sont des quantités finies, d'où il suit que le rapport de chacune de ces intégrales

$$\int_0^\varepsilon \int_{1-\varepsilon}^1$$

à J_n pourra être rendu aussi petit qu'on le voudra dès que ε sera pris suffisamment petit et n suffisamment grand. Nous aurons à faire usage de ce résultat, qui supplée à l'expression approchée qu'on ne peut obtenir des polynômes X_n dans le voisinage des valeurs

$$x = 0, \quad x = 1.$$

Nous indiquerons maintenant comment on peut déterminer la forme de la deuxième approximation des polynômes X_n en partant de l'équation différentielle.

De la formule (51) on déduit, en y remplaçant φ par φ',

$$u' = A\cos[(2n+\alpha)\varphi' + h] + \frac{p'}{n^{\frac{1}{2}+\gamma}},$$

p' étant toujours fini, quel que soit n, tant que φ' n'approche pas de zéro ou de $\frac{\pi}{2}$. Substituons cette valeur dans l'intégrale de la formule (50), nous aurons

$$\begin{aligned} u = {} & A\cos[(2n+\alpha)\varphi + h] \\ & + \frac{A}{(2n+\alpha)}\int_k^{\varphi'} \lambda' \cos[(2n+\alpha)\varphi' + h]\sin[(2n+\alpha)(\varphi - \varphi')]d\varphi' \\ & - \int_k^{\varphi'} \frac{\lambda' p' \sin(2n+\alpha)(\varphi-\varphi')d\varphi'}{(2n+\alpha)n^{\frac{1}{2}+\gamma}}, \end{aligned}$$

p' étant toujours fini; la seconde intégrale est de la forme $\frac{p_1}{n^{\frac{3}{2}+\gamma}}$ où p_1 est, comme p', une quantité finie.

Quant à la première intégrale, on peut l'écrire

$$\frac{A}{2(2n+\alpha)}\int_k^\varphi\left\{\lambda'\sin[(2n+\alpha)\varphi+h]+\lambda'\sin[(2n+\alpha)(\varphi-2\varphi')+h]\right\}d\varphi',$$

ou

$$\frac{A\sin[(2n+\alpha)\varphi+h]}{2(2n+\alpha)}\int_k^\varphi\lambda'd\varphi'+\frac{A}{2(2n+\alpha)}\int_k^\varphi\lambda'\sin[(2n+\alpha)(\varphi-2\varphi')+h]d\varphi'.$$

Une simple intégration par parties portant sur le sinus montre que la seconde intégrale est de l'ordre de $\frac{A}{n^2}$ ou, comme A est de l'ordre de $n^{\frac{1}{2}-\gamma}$, de celui de $n^{-\frac{3}{2}-\gamma}$. Cette seconde intégrale peut donc être réunie au terme déjà trouvé du même ordre $\frac{p_1}{n^{\frac{3}{2}+\gamma}}$. On a d'ailleurs

$$\int_k^\varphi\lambda'd\varphi'=\frac{(2\gamma-2\alpha-1)(2\gamma-2\alpha+1)}{4}(\tang\varphi-\tang k)$$
$$+\frac{(1-2\gamma)(3-2\gamma)}{4}(\cot k-\cot\varphi).$$

Les termes en tang k cot$k$ peuvent être négligés; on les ferait disparaître en modifiant convenablement la valeur de h, et l'on a pour u la formule définitive

$$(52)\quad\left\{\begin{aligned}u={}&A\cos[(2n+\alpha)\varphi+h]+\frac{A}{8(2n+\alpha)}\sin[(2n+\alpha)\varphi+h]\\&\times[(2\gamma-2\alpha-1)(2\gamma-2\alpha+1)\tang\varphi\\&-(1-2\gamma)(3-2\gamma)\cot\varphi]+\frac{p_1n^{\frac{1}{2}-\gamma}}{n^2},\end{aligned}\right.$$

dont la forme est bien semblable à celle de la formule (39); p_1 sera, comme p, une quantité assujettie à demeurer au-dessous d'une limite fixe tant que x demeurera comprise entre ε et $1-\varepsilon'$, et cela quel que soit n.

En résumé, les termes de la première approximation sont de l'ordre de $\sqrt{J_n}$; ceux qui s'ajoutent dans la seconde approximation sont de l'ordre de $\frac{\sqrt{J_n}}{n}$; enfin l'erreur commise est de l'ordre $\frac{p_1\sqrt{J_n}}{n^2}$, p_1 étant fini tant que x n'approche ni de zéro ni de 1, quel que soit n.

Cette fonction inconnue p_1 de x et de n a encore une autre propriété : sa dérivée par rapport à x ou à φ est de la forme nq, q restant finie dans les mêmes conditions que p. Pour établir ce résultat, il suffit de se rappeler que, la dérivée de X_n étant une série hypergéométrique, on peut obtenir directement son expression approchée. Ainsi nous aurons deux formules d'approximation pour cette dérivée :

1° Celle qu'on obtiendrait en différentiant l'équation (52) ou (39) et qui contiendra la dérivée p'_1 de p_1 ;

2° Celle qu'on établirait directement par l'application des formules précédentes à cette dérivée.

La comparaison de ces expressions différentes nous donne le résultat cherché relatif à l'ordre de la dérivée p'_1, et nous montre qu'elle est de la forme nq, q étant au-dessous d'une certaine limite tant que x ne s'approche ni de zéro ni de 1. Je ne développe pas ce calcul, dont un peu d'attention fait reconnaître le résultat.

On pourrait, du reste, obtenir ces propriétés de l'erreur commise quand on substitue aux polynômes leurs expressions approchées en employant la méthode même qui nous a servi à obtenir ces expressions. Pour cela, nous allons reprendre l'étude du cas général et donner une limite de l'erreur commise quand on substitue aux fonctions considérées leurs expressions approchées.

Nous avons vu que, si une fonction $f(z)$ devient discontinue sur le cercle de convergence, dont nous désignerons encore le rayon par R, de telle manière que, pour le point α de discontinuité, on ait

$$f(z) = (z-\alpha)^k \varphi(z) + \psi(z), \tag{53}$$

φ et ψ étant des fonctions développables suivant les puissances entières de $z-\alpha$, il faut, pour obtenir les expressions approchées des coefficients de la série que développe $f(z)$, substituer à la fonction $f(z)$ l'expression

$$\left\{\begin{aligned} U_p = {} & \varphi(\alpha)(z-\alpha)^k + \varphi'(\alpha)(z-\alpha)^{k+1} + \ldots \\ & + \frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{1.2\ldots p-1}(z-\alpha)^{k+p-1}, \end{aligned}\right. \tag{54}$$

que l'on développe suivant les puissances de z.

Si donc on pose

$$f(z) = \Sigma a_n z^n,$$
$$U_p = \Sigma \alpha_n z^n,$$

et que l'on désigne par $\varpi(z)$ la fonction

$$(55) \qquad \varpi(z) = f(z) - U_p = \Sigma \varepsilon_n z^n,$$

on aura

$$(56) \qquad a_n = \alpha_n + \varepsilon_n;$$

α_n sera l'expression approchée de a_n, ε_n l'erreur commise quand on substitue à a_n son expression approchée.

La fonction $\varpi(z)$, d'après son mode de formation, ne deviendra pas infinie pour $z = \alpha$, et il en sera de même de sa dérivée $e^{\text{ième}}$ si e désigne le plus grand nombre entier contenu dans $p + k$. Différentions e fois l'équation (55), nous aurons

$$\frac{d^e \varpi(z)}{dz^e} = \Sigma n(n-1)\ldots(n-e+1)\varepsilon_n z^{n-e},$$

et, la fonction du premier membre ne devenant pas infinie sur le cercle de convergence, la série qui la développe demeurera convergente sur ce cercle. Si nous multiplions les deux membres par z^{e-n} et que nous intégrions le long du contour formé par le cercle de convergence, nous aurons

$$2\pi n(n-1)\ldots(n-e+1)\varepsilon_n = \int z^{e-n}\frac{d^e \varpi(z)}{dz^e}\,dz.$$

Si dans cette formule on remplace z par $Re^{\omega i}$, elle devient

$$(57) \qquad 2\pi n(n-1)\ldots(n-e+1)\varepsilon_n = R^{e-n+1}\int_0^{2\pi} e^{(e-n)\omega i}\frac{d^e \varpi(z)}{dz^e}\, ie^{\omega i}\,d\omega$$

et n'est pas autre chose que celle par laquelle on détermine les coefficients des séries trigonométriques.

La dérivée $\frac{d^e \varpi(z)}{dz^e}$ ne devient pas infinie sur le cercle de convergence. Désignons par μ' le module maximum sur le cercle de cette dérivée.

Il est clair que, si la fonction $f(z)$, qui peut contenir dans son expression des paramètres variables autres que z, et les coefficients $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, ..., $\varphi^{p-1}(\alpha)$ demeurent finis sur le cercle de convergence quand ces paramètres varient, on pourra trouver une limite supérieure μ de μ' correspondant à toutes les valeurs de ces paramètres.

D'après cela, si nous remplaçons dans l'intégrale du second membre de l'équation (7) $\frac{d^e \varpi(z)}{dz^e}$ par μ et $e^{(e-n)\omega i} i e^{\omega i}$ par 1, nous aurons une limite supérieure du module de cette intégrale qui sera

$$2\pi R^{e-n+1} \mu.$$

L'intégrale aura donc pour valeur

$$2\pi \mu \theta R^{e-n+1},$$

θ étant une quantité *réelle* ou *imaginaire*, dont le module sera inférieur à l'unité. La formule (57) deviendra donc

$$R^n \varepsilon_n = R^n(a_n - \alpha_n) = \frac{\theta R^{e+1} \mu}{n(n-1)\ldots(n-e+1)},$$

ou, plus simplement,

$$(58) \qquad R^n (a_n - \alpha_n) = \frac{a\mu}{n^e},$$

a étant une quantité finie quand n augmente.

La limite précédente est loin d'être assez précise; mais, par un artifice particulier, on peut en déduire une évaluation plus exacte de l'erreur commise. Supposons, en effet, qu'on change p en $p+2$, ce qui revient à ajouter deux termes à U_p,

$$\frac{\varphi^p(\alpha)(z-\alpha)^{p+k}}{12\ldots p} + \frac{\varphi^{p+1}(\alpha)(z-\alpha)^{p+k+1}}{12\ldots p+1},$$

et deux termes α'_n, α''_n à α_n qui proviendront du développement suivant les puissances de z de la somme précédente. Nous connaissons les ordres de α'_n, α''_n, et nous savons, en mettant ces ordres en évidence, que l'on a

$$\alpha'_n R^n = \frac{k}{n^{p+k+1}}, \quad \alpha''_n R^n = \frac{h'}{n^{p+k+2}}.$$

La formule (58) deviendra alors

$$R^n(a_n - \alpha_n - \alpha'_n - \alpha''_n) = \frac{a\mu}{n^{e+2}},$$

ce qu'on peut écrire

$$(59)\qquad (a_n - \alpha_n)R^n = \frac{h}{n^{p+k+1}} + \frac{h_1}{n^{p+k+2}} + \frac{a\mu}{n^{e+2}}.$$

Or, $e+2$ étant supérieur à $p+k+1$, le terme principal de cette formule sera le premier, car on peut l'écrire

$$(a_n - \alpha_n)R^n = \frac{1}{n^{p+k+1}}\left(h + \frac{h_1}{n} + \frac{a\mu}{n^{e+1-p-k}}\right).$$

L'erreur est donc sensiblement égale au premier terme négligé.

S'il y avait plusieurs discontinuités sur le cercle de convergence, on répéterait pour leur ensemble le raisonnement que nous venons de faire pour l'une d'elles, et l'on obtiendrait un résultat tout semblable.

Dans l'exemple que nous avons traité des polynômes de la série hypergéométrique, la fonction $\varpi(z)$ et sa dérivée d'ordre e peuvent être ramenées à des expressions composées de radicaux et ne contenant en dénominateur que $\sin\varphi$, $\cos\varphi$. Donc, tant que x ne s'approche ni de zéro ni de 1, ces dénominateurs demeurent finis, et il en est d'ailleurs de même des coefficients de la formule d'approximation. La formule (59) nous montre donc que l'erreur commise lorsqu'on prend les k premiers termes de l'expression approchée est de la forme même à laquelle nous avons été conduits par l'équation différentielle, tant que x ne s'approche ni de zéro ni de l'unité.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.