

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. LALANNE

**De l'emploi de la Géométrie pour résoudre certaines questions
de moyennes et de probabilités**

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 5 (1879), p. 107-130.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__107_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

De l'emploi de la Géométrie pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilités ;

PAR M. L. LALANNE,

Inspecteur général des Ponts et Chaussées.

1. *Dans le nombre infini de triangles possibles dont les côtés ne sont assujettis qu'à la condition d'être compris entre deux limites connues a et b , quelles sont les valeurs moyennes des trois côtés, rangés préalablement par ordre de grandeur ?*

Telle est la question à laquelle on est conduit lorsque l'on cherche si quelque loi a présidé à la distribution des agglomérations de population de même ordre à la surface d'un territoire; car, si par exemple il existait une tendance de nature à placer ces agglomérations à des distances égales les unes des autres, malgré les inégalités très-apparentes qui existent entre quelques-unes de ces distances, les moyennes des plus petits, des moyens et des plus grands côtés des triangles formés en joignant deux à deux les centres de population, de manière à couvrir le territoire d'un réseau de mailles triangulaires, différeraient assurément d'une manière notable des moyennes calculées dans l'hypothèse où tous les triangles auraient été également possibles.

2. Cette question, qui présente ainsi un double intérêt, au point de vue qu'Ampère appelait *toporistique*, comme au point de vue purement mathématique, ne laisse pas d'être assez délicate à traiter par l'Analyse. Mais de simples considérations de Géométrie et de Statique élémentaire permettent de la résoudre, sans autre difficulté que celle qui résulte de la construction d'un solide polyédrique dont toutes les faces sont

rigoureusement déterminées en situation, et par conséquent en grandeur vraie, dans l'espace, et du calcul des coordonnées du centre de gravité de ce solide.

Supposons que les trois côtés variables de chacun des triangles en nombre infini que l'on peut construire soient représentés par les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un même point de l'espace, l'axe des z étant vertical; supposons, de plus, que ces côtés, compris entre les limites a et b , soient rangés par ordre de grandeurs croissantes. On ne tardera pas à reconnaître que la portion de l'espace dont tous les points auront des coordonnées satisfaisant à la condition d'être les trois côtés d'un des triangles possibles sera soit un tétraèdre, soit un polyèdre à cinq faces, qui est la différence entre deux pyramides triangulaires:

En effet, le plus petit côté x devant être tout au moins égal à a et le plus grand z tout au plus égal à b , on a d'abord

$$(1) \text{ et } (1 \text{ bis}) \quad x \geq a, \quad z \leq b.$$

Ensuite, les coordonnées étant rangées par ordre de grandeur, on a

$$(2) \text{ et } (2 \text{ bis}) \quad x \leq y, \quad y \leq z.$$

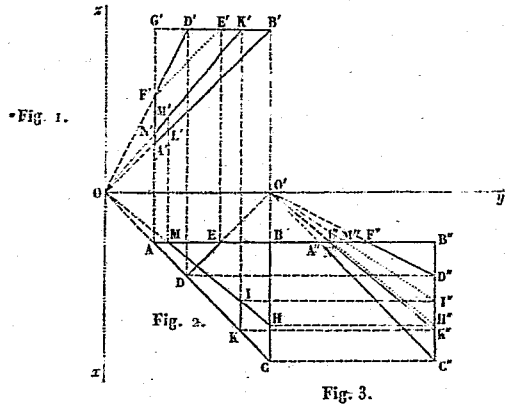
Enfin, pour que le triangle soit possible, le plus grand côté doit être plus petit que la somme des deux autres, d'où

$$(3) \quad z \leq x + y.$$

Dans chacune de ces cinq relations, il ne faut retenir que le signe d'égalité, qui exprime le terme extrême, pour déterminer la région limitée de l'espace dans l'intérieur de laquelle les coordonnées de tous les points satisfont à ces mêmes conditions considérées avec le double signe. La première (1) représente un plan vertical parallèle aux xy , à la distance a . La seconde (1 bis) détermine un plan horizontal à la distance b des xy . La troisième (2) donne un plan vertical passant par l'axe des z et divisant en deux parties égales l'angle des xy . La quatrième (2 bis) fournit un plan passant par l'axe des x et divisant en deux parties égales l'angle des yz . Enfin, à la cinquième (3) correspond un plan passant par l'origine, dont la trace sur le plan des xy

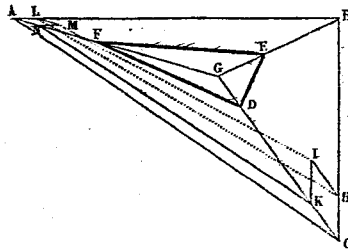
partage en deux l'angle des $-x + y$ et dont l'inclinaison sur le plan horizontal a $\sqrt{2}$ pour tangente trigonométrique.

Le pentaèdre déterminé par ces cinq plans est représenté sur les *fig. 1, 2 et 3*, dans lesquelles $O'B = a$, et $O'C = O'B' = BB'' = b$, par les projections orthogonales des six sommets et des neuf arêtes sur les



trois plans des coordonnées, le plan vertical des yz étant rabattu (*fig. 1*) sur le plan horizontal des xy , autour et au-dessus de l'axe des y , pris comme charnière, et le plan vertical des xz étant rabattu pareillement (*fig. 3*) sur ce même plan horizontal, vers la droite, mais en prenant pour charnière la ligne $O'C$ parallèle à l'axe des x et à une distance $OO' = b$ de cet axe.

Fig. 4.



La *fig. 4* est une perspective de ce solide, l'œil étant placé dans le dièdre des $(z + x)$, $(z - y)$ à une certaine hauteur au-dessus du

plan horizontal. Cette perspective met en évidence les six sommets A, B, C, D, E, F, ainsi que les deux tétraèdres GABC, GDEF, dont le pentaèdre est la différence.

3. L'étude simultanée des quatre figures conduit facilement à la détermination des dimensions métriques de toutes les faces de ces solides et des coordonnées de leurs sommets.

Pour faciliter cette étude, nous avons donné aux trois projections les mêmes lettres qu'aux points correspondants de la perspective de la *fig. 4*, en supprimant même les accents dans la *fig. 2*. On remarquera seulement que les points F et G de la perspective, qui se projettent en F' et en G' sur la *fig. 1*, en F'' et en G'' sur la *fig. 3*, se projettent en A sur la *fig. 2*.

Il suffira maintenant d'énoncer les résultats qui ressortent de l'examen comparatif des quatre figures.

La face verticale d'arrière, correspondant à $x = a$, est un trapèze ABEF (*fig. 4*) dont le sommet inférieur A est à la distance $+a$ de chacun des trois axes. L'arête AF est verticale, l'arête EB horizontale; toutes deux sont égales à a et leurs directions sont rectangulaires entre elles. L'arête AB, inclinée à 45 degrés sur chacune des deux premières, est égale à $(b - a)\sqrt{2}$, et l'arête EF, parallèle à la précédente, est égale à $(b - 2a)\sqrt{2}$. La face horizontale supérieure, correspondant à $z = b$, se trouve à la distance b du plan des $x\gamma$; les angles EBC, CDE sont droits; EB est égal à $b - a$, CD à $\frac{1}{2}b\sqrt{2}$, BE à a , et DE à $(\frac{1}{2}b - a)\sqrt{2}$.

La face latérale d'avant AFDC, déterminée par $x = \gamma$, est un quadrilatère dont les côtés $CD = \frac{1}{2}b\sqrt{2}$ et $AF = a$ sont rectangulaires entre eux. Le plus grand côté AC est égal à $(b - a)\sqrt{3}$. On a déjà la valeur des deux autres.

La face postérieure ABC, déterminée par $\gamma = z$, est un triangle rectangle en B et dans lequel la hauteur AB est à la base $BC = b - a$ dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1.

Enfin, le triangle supérieur et de gauche EFD est rectangle en D; le côté DE est égal à $(\frac{1}{2}b - a)\sqrt{2}$, l'hypoténuse est $(b - 2a)\sqrt{2}$, comme on l'a déjà dit, et l'autre côté de l'angle droit $\frac{1}{2}(b - 2a)\sqrt{6}$.

Les faces sont donc rigoureusement définies de grandeur comme de

position. Les valeurs des coordonnées des six sommets et du sommet commun aux deux tétraèdres dont il est la différence sont consignées dans le petit Tableau suivant :

Désignation des sommets.	Valeurs des coordonnées.		
	x.	y.	z.
A.....	a	a	a
B.....	a	b	b
C.....	b	b	b
D.....	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}b$	b
E.....	a	b - a	b
F.....	a	a	2a
G.....	a	a	b

D'un autre côté, il est manifeste que les deux pyramides triangulaires dont la différence constitue le pentaèdre ont, l'une pour base ABC (*fig. 2*) et pour hauteur $A'G' = b - a$ (*fig. 1*), l'autre, pour base ADE (*fig. 2*) et pour hauteur $F'G' = b - 2a$ (*fig. 1*). Le volume de la première est $\frac{1}{6}(b - a)^3$; le volume de la seconde est $\frac{1}{12}(b - 2a)^3$. La différence ou le volume de la région de l'espace dont tous les points satisfont exclusivement à la condition voulue est

$$\frac{1}{12} [2(b - a)^3 - (b - 2a)^3].$$

4. Les coordonnées du centre de gravité du pentaèdre se déduiront donc par de simples compositions de moments des coordonnées des centres de gravité et des volumes des deux pyramides dont ce pentaèdre est la différence.

Or on sait que, dans le tétraèdre, les coordonnées du centre de gravité sont le quart de la somme des coordonnées correspondantes des quatre sommets.

Pour la grande pyramide, dont les sommets sont A, B, C et G, on a donc

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{4}(3a + b), \\ Y &= \frac{1}{4}(a + b), \\ Z &= \frac{1}{4}(a + 3b), \end{aligned}$$

et pour la petite, dont les sommets sont D, E, F et G', on a

$$\begin{aligned} X' &= \frac{1}{4}(3a + \frac{1}{2}b), \\ Y' &= \frac{1}{4}(a + \frac{3}{2}b), \\ Z' &= \frac{1}{2}(3b + 2a). \end{aligned}$$

En prenant la différence des moments successivement par rapport à chacun des plans coordonnés, on trouve d'abord

$$(A) \quad \begin{cases} x = \frac{\frac{1}{2}(3a+b)(b-a)^3 - \frac{1}{16}(6a+b)(b-2a)^3}{[(b-a)^3 - \frac{1}{2}(b-2a)^3]}, \\ y = \frac{\frac{1}{2}(a+b)(b-a)^3 - \frac{1}{8}(2a+3b)(b-2a)^3}{[(b-a)^3 - \frac{1}{2}(b-2a)^3]}, \\ z = \frac{\frac{1}{2}(a+3b)(b-a)^3 - \frac{1}{8}(2a+3b)(b-2a)^3}{[(b-a)^3 - \frac{1}{2}(b-2a)^3]}. \end{cases}$$

Telles sont les valeurs moyennes du plus petit, du moyen et du plus grand côté des triangles en nombre infini que l'on peut supposer formés sans autre condition que d'être compris entre deux limites données a et b , ces côtés ayant été rangés par ordre de grandeur croissante et a étant plus petit que la moitié de b ; car cette dernière hypothèse est implicitement admise dans la construction des *fig.* 1 à 4.

Si, au lieu de considérer les valeurs moyennes absolues des côtés, on cherche seulement les rapports de ces moyennes à la limite b , et que l'on pose

$$\alpha = 1 - \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \beta = 1 - \frac{2a}{b},$$

les rapports cherchés prennent la forme très-simple

$$\begin{aligned} \frac{x}{b} &= \frac{(\alpha^3 - \frac{1}{4}\beta^3) - \frac{3}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{4}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3}, \\ \frac{y}{b} &= \frac{(\alpha^3 - \frac{1}{4}\beta^3) - \frac{3}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{4}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3}, \\ \frac{z}{b} &= \frac{(\alpha^3 - \frac{1}{4}\beta^3) - \frac{1}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{4}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3}. \end{aligned}$$

6. Le cas où l'on a $a > \frac{1}{2}b$ est beaucoup plus simple. Le solide qui

comprend la région de l'espace dont tous les points ont des coordonnées égales aux trois côtés d'un des triangles possibles se réduit alors à un tétraèdre ABCG (fig. 4) dont trois faces sont rectangles, et qui est représenté, tant en projections qu'en perspective, dans les quatre figures du cas précédent, dans lesquelles on ferait abstraction de la section EFD. Les coordonnées des quatre sommets sont données dans le tableau suivant :

Sommets du tétraèdre.	Coordonnées des sommets		
	$x.$	$y.$	$z.$
A	a	a	a
B	a	b	b
C	b	b	b
G	a	a	b

Il résulte de là que les coordonnées du centre de gravité de ce solide ont pour expressions

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(3a + b), \\ y &= \frac{1}{2}(a + b), \\ z &= \frac{1}{4}(a + 3b), \end{aligned} \right\} \text{et, pour } a = \frac{1}{2}b \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{5}{8}b, \\ y &= \frac{3}{4}b, \\ z &= \frac{7}{8}b. \end{aligned} \right.$$

Ce sont précisément les mêmes valeurs que l'on obtient lorsque dans les formules (A) on fait $b = 2a$; nouvel exemple de l'existence de deux fonctions différentes pour exprimer une même loi mathématique, suivant le sens du signe d'inégalité qui lie l'une à l'autre deux données de la question, la loi de continuité se manifestant néanmoins par l'identité des résultats auxquels conduisent ces deux fonctions lorsque le signe d'égalité vient à établir le passage avant le renversement du signe d'inégalité.

7. Cette méthode purement géométrique pour la détermination des moyennes valeurs de trois éléments variables paraît susceptible d'autres applications. M. l'ingénieur Chemin [*] m'en a signalé une qui rend

[*] M. Chemin a pareillement exprimé l'idée que l'emploi des coordonnées polyé-

pour ainsi dire de pure intuition la solution du problème suivant, posé et résolu analytiquement par M. E. Lemoine dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. I, p. 39) :

Une tige (d'une longueur l) se brise en trois morceaux : quelle est la probabilité pour que, avec ces trois morceaux, on puisse former un triangle ?

Considérons les trois fragments comme les coordonnées d'un même point de l'espace. Le lieu des points qui satisfont à la relation fondamentale

$$(1) \quad x + y + z = l$$

est un triangle dont les sommets sont situés à la distance l de l'origine sur les trois axes des coordonnées.

Mais, pour que le triangle soit possible, il faut que l'on ait simultanément

$$(2) \quad \begin{cases} x \leq y + z, \\ y \leq z + x, \\ z \leq x + y. \end{cases}$$

Les trois plans déterminés par les équations de ce groupe, en ayant égard à l'équation (1), sont respectivement perpendiculaires à chacun des trois axes des coordonnées, à une distance de l'origine égale à $\frac{1}{2}l$. Leurs intersections avec le triangle déterminé par l'équation (1) déterminent un nouveau triangle qui joint deux à deux les milieux des côtés du premier et qui, par conséquent, n'a que le quart de sa superficie. Or, c'est seulement à l'intérieur de ce triangle central que se trouvent les points dont les coordonnées satisfont à l'ensemble des relations (1) et (2); la probabilité cherchée est donc $\frac{1}{4}$.

8. Au surplus, il existe une solution analytique non-seulement pour le problème énoncé au début de cet article, mais encore pour la question bien autrement compliquée de la valeur moyenne d'une fonction d'un

driques permettrait d'étendre l'usage de notre méthode géométrique à un nombre quelconque de variables.

nombre quelconque de variables. Cette solution, due à feu Philbert [*], va être exposée ici par la reproduction textuelle d'une note manuscrite rédigée, à ma prière, dans les premiers jours du mois d'avril 1871.

Note sur la détermination analytique de la valeur moyenne d'une fonction de plusieurs variables.

« Soit U une fonction quelconque de n quantités, u_1, u_2, \dots, u_n qui varient, savoir :

u_1 , de p_1 à q_1 ,	ces limites étant des nombres,		
u_2 , de p_2 à q_2 ,	»	fonctions de u_1 ,	
u_3 , de p_3 à q_3 ,	»	»	u_1, u_2 ,
.....
u_n , de p_n à q_n ,	»	»	u_1, u_2, \dots, u_{n-1} .

» Si l'on imagine qu'une seule des quantités u varie entre ses limites p et q par intervalles constants égaux à du , la somme des valeurs que prendra ainsi la fonction U , et que nous représenterons par $\sum_p^q U$, sera égale à

$$\frac{\sum_p^q U du}{du}.$$

» Or, pour chaque système de valeurs particulières attribuées à u_1, u_2, \dots, u_{n-1} , u_n varie de p_n à q_n .

[*] Henri Philbert, ingénieur des Ponts et Chaussées, né à Bar-sur-Aube le 19 avril 1826, décédé à Vitry-le-François le 2 décembre 1876, était doué pour les Mathématiques d'une remarquable aptitude dont une modestie et une réserve excessives l'ont empêché de tirer, au profit de la Science, ce qu'on pouvait attendre de lui. Bon constructeur, versé dans la connaissance du droit administratif, esprit philosophique, caractère élevé et bienveillant, Philbert a été suivi dans la tombe par les regrets de tous ceux qui l'ont connu. Il a succombé à une maladie d'épuisement contractée à la suite des fatigues et des privations du siège de Paris. Je conserve précieusement le manuscrit qu'il m'avait remis le 5 avril 1871 et la correspondance échangée avec lui à ce sujet dès 1865.

» U acquerra donc aussi une somme de valeurs égale à

$$\frac{\sum_{p_n}^{q_n} U du_n}{du_n}$$

» Si dans ce système on conserve u_1, u_2, \dots, u_{n-2} constants, et que l'on fasse varier u_{n-1} entre ses limites, U acquerra une somme de valeurs égale à

$$\frac{\sum_{p_{n-1}}^{q_{n-1}} \left(\frac{\sum_{p_n}^{q_n} U du_n}{du_n} \right) du_{n-1}}{du_{n-1}}$$

ou à

$$\frac{\sum_{p_{n-1}}^{q_{n-1}} du_{n-1} \sum_{p_n}^{q_n} U du_n}{du_{n-1} du_n},$$

etc....

» En continuant ainsi, on voit que la somme des valeurs qu'acquerra U, lorsque chaque quantité a varié entre ses limites p et q par intervalles constants égaux à du , sera

$$\frac{\sum_{p_1}^{q_1} du_1 \sum_{p_2}^{q_2} du_2 \dots \sum_{p_n}^{q_n} U du_n}{du_1 du_2 \dots du_n}$$

» Le nombre des valeurs données à U s'obtiendra en faisant dans cette expression $U = 1$. Il sera, par conséquent,

$$\frac{\sum_{p_1}^{q_1} du_1 \sum_{p_2}^{q_2} du_2 \dots \sum_{p_n}^{q_n} du_n}{du_1 du_2 \dots du_n}$$

» La moyenne des valeurs de U sera donc

$$\frac{\sum_{p_1}^{q_1} du_1 \sum_{p_2}^{q_2} du_2 \dots \sum_{p_n}^{q_n} U du_n}{\sum_{p_1}^{q_1} du_1 \sum_{p_2}^{q_2} du_2 \dots \sum_{p_n}^{q_n} du_n}$$

et, lorsque les du deviendront infiniment petits, tendra vers l'expression

$$\frac{\int_{p_1}^{q_1} du_1 \int_{p_2}^{q_2} du_2 \dots \int_{p_n}^{q_n} U du_n}{\int_{p_1}^{q_1} du_1 \int_{p_2}^{q_2} du_2 \dots \int_{p_n}^{q_n} du_n},$$

qu'on appelle *valeur moyenne de la fonction U*.

Si les variables sont simplement assujetties à ne devenir ni inférieures à un nombre donné ni supérieures à un autre nombre donné, on aura, en prenant ce dernier nombre pour unité, en appelant a le premier nombre et en supposant les variables rangées par ordre de grandeur croissante,

$$p_1 = a, \quad p_2 = u_1, \quad p_3 = u_2, \quad \dots, \quad p_n = u_{n-1},$$

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_3 = 1, \quad \dots, \quad q_n = 1.$$

» Si, alors, on pose

$$u_n = 1 - v_n,$$

$$u_{n-1} = 1 - v_{n-1},$$

.....

$$u_1 = 1 - v_1,$$

la première intégrale deviendra, en désignant par V la fonction U transformée et en posant $1 - a = \alpha$,

$$\int_0^\alpha dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \dots \int_0^{v_{n-1}} V dv_n.$$

» En faisant $V = 1$, on obtient pour valeur du dénominateur de l'expression considérée ci-dessus

$$\left(\int_0^\alpha\right)^n d\alpha^n \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha^n}{1.2\dots n}.$$

» Lorsque U sera fonction seulement de u_1, u_2, \dots, u_k (k étant $< n$), V sera fonction seulement de v_1, v_2, \dots, v_k , et la première intégrale

pourra s'écrire

$$\begin{aligned} & \int_0^a dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \dots \int_0^{v_{k-1}} V dv_k \int_0^{v_k} dv_{k+1} \dots \int_0^{v_{n-1}} dv_n \\ &= \int_0^a dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \dots \int_0^{v_{n-1}} V dv_k \left(\int_0^{v_k} \right)^{n-k} dv_k \\ &= \frac{1}{1.2 \dots (n-k)} \int_0^a dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \dots \int_0^{v_{k-1}} V v_k^{n-k} dv_k. \end{aligned}$$

» La valeur moyenne de U sera donc

$$\frac{\frac{1}{1.2 \dots (n-k)} \int_0^a dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \dots \int_0^{v_{k-1}} V v_k^{n-k} dv_k}{\left(\frac{a^n}{1.2 \dots n} \right)}$$

» Faisons $U = u_k$, d'où $V = 1 - v_k$. Le numérateur devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1.2 \dots (n-k)} \left(\int_0^a \right)^k (\alpha^{n-k} - \alpha^{n+1-k}) d\alpha^k \\ &= \frac{\alpha^n}{1.2 \dots n} \frac{\alpha^{n+1}}{1.2 \dots (n-k)(n+2-k) \dots (n+1)} \\ &= \frac{\alpha^n}{1.2 \dots n} \left(1 - \frac{n+1-k}{n+1} \alpha \right). \end{aligned}$$

» La valeur moyenne de u_k est donc

$$1 - \frac{n+1-k}{n+1} \alpha.$$

» Aucune des variables n'étant, par hypothèse, inférieure à α , la somme des $n-1$ premières ne peut jamais être inférieure à $(n-1)\alpha$. Donc, si $\alpha > \frac{1}{n-1}$, la somme des $n-1$ premières variables ne sera jamais inférieure à l'unité, et, par conséquent, la plus grande variable u_n , variant comme ci-dessus de u_{n-1} à 1, ne se trouvera jamais dépasser la somme de toutes les autres.

» Mais, lorsque $\alpha < \frac{1}{n-1}$, la somme $u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ pourra, pour certaines valeurs des variables, être inférieure à l'unité, et u_n variant

de u_{n-1} à 1 acquerra certaines valeurs supérieures à $u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$. Si l'on veut assujettir u_n à ne jamais dépasser cette somme, on devra adopter pour limite supérieure de u_n l'unité ou $u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$, suivant que l'unité sera inférieure ou supérieure à la somme $u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$, et modifier en conséquence les formules précédentes.

» Pour établir les nouvelles formules, nous nous donnerons la condition plus générale $u_{m+1} < u_1 + u_2 + \dots + u_m$, m étant un nombre quelconque $< n$. Supposons, par suite, $a < \frac{1}{m+1}$; nous aurons à faire varier u_{m+1} de u_m à 1 ou à $S_m = u_1 + u_2 + \dots + u_m$, suivant que l'unité sera $\leq S_m$.

» La somme des valeurs de U sera représentée par

$$\frac{1}{du_{m+1} du_{m+2} \dots du_n} \left(\sum' \int_{u_m}^1 + \sum'' \int_{u_m}^{S_m} \right) du_{m+1} \int_{u_{m+1}}^1 du_{m+2} \dots \int_{u_{n-1}}^1 U dt_n,$$

Σ' désignant la sommation relative à tous les systèmes pour lesquels $1 < S_m$ et Σ'' la sommation relative à tous les systèmes pour lesquels $S_m < 1$.

» Or l'expression symbolique entre parenthèses peut s'écrire

$$\sum' \int_{u_m}^1 + \sum'' \left(\int_{u_m}^1 - \int_{S_m}^1 \right) = \sum \int_{u_m}^1 - \sum'' \int_{S_m}^1,$$

en désignant par Σ la sommation relative à tous les systèmes possibles, sommation qui a été effectuée dans le problème précédent.

» Il reste donc à effectuer la sommation Σ'' (laquelle, considérée isolément, correspondrait à la recherche de la valeur moyenne de U pour le cas où, aucune des variables ne pouvant être inférieure à a ni supérieure à 1, on assujettirait en outre celle de rang $m+1$ à ne pas être inférieure à la somme des m premières). A cet effet, nous transformerons d'abord l'intégrale placée sous le signe Σ'' en posant, comme dans le problème précédent,

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - v_n, \\ u_{n-1} &= 1 - v_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ u_{m+1} &= 1 - v_{m+1}. \end{aligned}$$

ou, en désignant par ρ le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ et par P_m le nombre de permutations de m lettres,

$$(u_k) = 1 - \frac{n+1-k}{n+1} \alpha \frac{1 - \frac{\rho^{n+1}}{P_m}}{1 - \frac{\rho^n}{P_m}}$$

» Mais, si $k \leq m$, u_k ou V se trouve à la fois fonction de $v_{k-1}, v_{k-2}, \dots, v_2$ et v_1 , et la formule se complique notablement.

» Faisons d'abord $k = 1$, d'où $V = u_1 = \frac{1-v_1}{m}$.

L'intégrale

$$\int_0^\beta dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \dots \int_0^{v_{n-1}} V dv_n$$

prend la valeur

$$\frac{1}{m} \left(\frac{\beta^n}{P_n} - \frac{\beta^{n+1}}{P_{n-1}(n+1)} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{\beta^n}{P_n} - \frac{n}{n+1} \frac{\beta^{n+1}}{P_n} \right)$$

» Il vient donc

$$(u_1) = \frac{\left(\frac{\alpha^n}{P_n} - \frac{n}{n+1} \frac{\alpha^{n+1}}{P_n} \right) - \frac{1}{P_m} \frac{1}{m} \left(\frac{\beta^n}{P_n} - \frac{n}{n+1} \frac{\beta^{n+1}}{P_n} \right)}{\frac{\alpha^n}{P_n} - \frac{1}{P_m} \frac{\beta^n}{P_n}}$$

ou

$$(u_1) = \frac{\left(\alpha^n - \frac{1}{m} \frac{\beta^n}{P_m} \right) - \frac{n}{n+1} \left(\alpha^{n+1} - \frac{1}{m} \frac{\beta^{n+1}}{P_m} \right)}{\alpha^n - \frac{\beta^n}{P_m}}$$

» On déduit de là facilement la valeur moyenne de u_2 , et, en général, on déduira de la valeur moyenne de u_{k-1} celle de u_k (k étant $\leq m$), car on a en général

$$(m - k + 1) (u_k - u_{k-1}) = v_{k-1} - v_k,$$

d'où

$$u_k = u_{k-1} + \frac{v_{k-1} - v_k}{m - k + 1}$$

» Or, posons

$$H_k = \int_0^\beta dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \dots \int_0^{v_{n-1}} u_k \alpha v_n.$$

» En substituant pour u_k l'expression ci-dessus, il viendra

$$\begin{aligned} H_k &= H_{k-1} + \frac{1}{m-k+1} \left(\frac{n-k+2}{P_{n+1}} \beta^{n+1} - \frac{n-k+1}{P_{n+1}} \beta^{n+1} \right) \\ &= H_{k-1} + \frac{1}{m-k+1} \frac{\beta^{n+1}}{P_{n+1}}. \end{aligned}$$

» La valeur moyenne de u_k sera donc

$$(u_k) = \frac{\frac{\alpha_n}{P^n} \left(1 - \frac{n+1-k}{n+1} \alpha \right) - \frac{1}{P_m} \left(H_{k-1} + \frac{1}{m-k+1} \frac{\beta^{n+1}}{P_{n+1}} \right)}{\frac{1}{P_n} \left(\alpha^n - \frac{\beta^n}{P_m} \right)}$$

» Mais on a

$$(u_{k-1}) = \frac{\frac{\alpha_n}{P^n} \left(1 - \frac{n+2-k}{n+1} \alpha \right) - \frac{1}{P_m} H_{k-1}}{\frac{1}{P_n} \left(\alpha^n - \frac{\beta^n}{P_m} \right)},$$

d'où

$$(u_k) - (u_{k-1}) = \frac{\frac{1}{P_n} \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{P_{n+1}} \frac{1}{m-k+1} \frac{\beta^{n+1}}{P_m}}{\frac{1}{P_n} \left(\alpha^n - \frac{\beta^n}{P_m} \right)},$$

ou

$$(u_k) = (u_{k-1}) + \frac{1}{n+1} \frac{\alpha^{n+1} - \frac{1}{m+1-k} \frac{\beta^{n+1}}{P_m}}{\alpha^n - \frac{\beta^n}{P_m}},$$

d'où l'on déduit la formule générale

$$(u_k) = \frac{\left(\alpha^n - \frac{1}{m} \frac{\beta^n}{P_m} \right) - \frac{1}{n+1} \left[(n-k+1) \alpha^{n+1} - \left(\frac{n}{m} - \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{m-i} \right) \frac{\beta^{n+1}}{P_m} \right]}{\alpha^n - \frac{\beta^n}{P_m}}.$$

» Pour en revenir au problème proposé, il faut faire $m = n - 1$ et

l'on obtient ainsi pour $k = n$ la formule

$$(u_n) = \frac{\left(\alpha^n - \frac{\beta^n}{P_{n-1}}\right) - \frac{1}{n+1} \left(\alpha^{n+1} - \frac{\beta^{n+1}}{n+1}\right)}{\alpha^n - \frac{\beta^n}{P_{n-1}}}$$

et, pour $k < n$, la formule

$$(u_k) = \frac{\left(\alpha^n - \frac{1}{n-1} \frac{\beta^n}{P_{n-1}}\right) - \frac{n-k+1}{n+1} \left(\alpha^{n+1} - \frac{\frac{n}{n-1} \frac{1}{n-2} \frac{1}{n-3} \dots \frac{1}{n-k} \beta^{n+1}}{n-k+1} \frac{\beta^{n+1}}{P_{n-1}}\right)}{\alpha^n - \frac{\beta^n}{P_{n-1}}}$$

» Appliquons ces formules au cas de $n = 3$. On aura, en supposant

$$\alpha \leq \frac{1}{2},$$

$$u_1 = \frac{(\alpha^3 - \frac{1}{4}\beta^3) - \frac{3}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{4}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3},$$

$$u_2 = \frac{(\alpha^3 - \frac{1}{4}\beta^3) - \frac{2}{4}(\alpha^4 - \frac{1}{8}\beta^4)}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3}$$

et

$$u_3 = 1 - \frac{1}{4} \frac{\alpha^4 - \frac{1}{2}\beta^4}{\alpha^3 - \frac{1}{2}\beta^3},$$

formules dans lesquelles $\alpha = 1 - a$, $\beta = 1 - 2a$.

9. Telle est l'application, au cas particulier que nous avons traité géométriquement, de cette belle et délicate analyse de Philbert. Ces trois valeurs de u_1 , u_2 et u_3 sont précisément les mêmes que nous avons trouvées par des déductions purement géométriques pour $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ et $\frac{z}{c}$.

10. L'application des formules à des exemples et la comparaison des nombres qu'on en tire avec les résultats constatés présentent assez d'intérêt pour qu'on en fasse mention ici. Les trois réseaux successifs, à mailles décroissantes, dont on peut recouvrir le territoire français en joignant deux à deux les préfectures, les sous-préfectures et les chefs-lieux de canton étant tracés, et les termes extrêmes pour chacun de ces trois réseaux étant

$$a = \begin{pmatrix} 17,300, \\ 7,570, \\ 1,700, \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 155,700, \\ 129,700, \\ 29,600, \end{pmatrix}$$

l'application des formules (A) (p. 112) et la comparaison des valeurs moyennes que devraient avoir les côtés dans ces trois triangulations successives, d'après ces formules, avec les valeurs effectivement déduites de mesurages directs, donnent les résultats suivants :

		Valeurs	
		calculées.	mesurées.
		km	km
Réseau préfectoral.	x.....	61,703	65,138
	y.....	98,242	91,987
	z.....	118,922	105,723
Réseau sous-préfectoral.	x.....	49,494	32,216
	y.....	81,355	44,959
	z.....	97,846	53,245
Réseau cantonal.	x.....	11,290	11,000
	y.....	18,565	14,885
	z.....	22,325	17,675

La tendance effective à l'équilatérie ressort bien de l'inspection seule de ce Tableau, puisque nous voyons, dans les valeurs moyennes mesurées des côtés des triangles d'un même réseau, des écarts beaucoup moindres que dans les valeurs calculées dans l'hypothèse où toutes les longueurs de ces côtés auraient été également possibles entre les limites extrêmes particulières à chaque réseau.

11. Mais la Géométrie fournit encore le moyen de mettre cette tendance en lumière par un procédé différent.

On peut convenir, en effet, de considérer comme *à peu près équilatéraux* les triangles dans lesquels le plus petit côté ne diffère du moyen et le plus grand du moyen que dans un rapport qui atteint au plus $\frac{m-n}{m}$, de chercher quelle serait la proportion relative dans le nombre total des triangles possibles si la possibilité était la même pour tous, et enfin de comparer la proportion calculée dans cette hypothèse avec la proportion fournie par l'observation.

Or, la région de l'espace dont tous les points ont pour coordonnées les côtés de triangles à peu près équilatéraux est déterminée, en vertu des considérations et de la définition précédentes :

- 1° Par les quatre relations (1), (1 bis), (2) et (2 bis) données plus haut ;
 2° Par les relations nouvelles

$$(4) \quad \gamma \leq \frac{m}{m-n} x,$$

$$(5) \quad z \leq \frac{m}{m-n} \gamma.$$

En ne conservant que le signe d'égalité, les six équations donnent autant de plans qui délimitent la région de l'espace dont il s'agit et sont les faces d'un hexaèdre, lequel est une pyramide quadrangulaire tronquée par un plan perpendiculaire à la base. Cette base et la section de troncature sont des trapèzes ; toutes les autres faces sont des quadrilatères dans chacun desquels deux côtés sont perpendiculaires entre eux.

Les fig. 1, 2 et 3 (p. 109) représentent les projections de cette pyramide tronquée suivant les contours apparents ACHM, A'B'K'N', A''C''I''M''. Les trapèzes de la base et de la troncature sont CHIK (fig. 2) et A'I'M'N' (fig. 1) en grandeur naturelle.

Ce même hexaèdre tronqué AIMN, CHIK se voit en perspective sur la fig. 4.

On trouve facilement les valeurs des dimensions nécessaires à la mesure des deux pyramides dont l'hexaèdre est la différence.

Ainsi, d'abord, pour la première on a

$$CH = \frac{n}{m} b, \quad IK = \frac{(m-n)n}{m^2} b, \quad K'B' = CH.$$

Ce qui donne pour l'aire du trapèze CHIK

$$\frac{1}{2} \frac{(2m-n)n^2}{m^2} b^2,$$

et pour le volume

$$\frac{1}{6} \frac{(2m-n)n^2}{m^2} b^3.$$

Pour la seconde, on a

$$A'N' = \frac{n}{m-n} a, \quad M'I' = \frac{mn}{(m-n)^2} a, \quad AM = A'N'.$$

L'aire du trapèze $A'I'M'N'$ sera donc

$$\frac{1}{2} \frac{(2m-n)n}{(m-n)^2} a^2,$$

et le volume de la pyramide

$$\frac{1}{6} \frac{(2m-n)n^2}{(m-n)^2} a^3.$$

La différence des deux volumes a pour expression

$$\frac{1}{6} n^2 (2m-n) \left[\frac{b^2}{m^2} - \frac{a^2}{(m-n)^2} \right].$$

Le rapport de ce volume, proportionnel au nombre des triangles à peu près équilatéraux, au volume du pentaèdre qui comprend le nombre total des cas possibles, est

$$k = \frac{n^2 (2m-n) [(m-n)^2 b^2 - m^2 a^2]}{m^2 (m-n)^2 [(b-a)^2 - 4(\frac{1}{2}b-a)^2]}.$$

Telle serait la fraction vers laquelle convergerait le rapport du nombre des triangles à peu près équilatéraux au nombre total des triangles, si tous ces triangles étaient également possibles, s'il n'y avait aucune tendance à l'équilatérie, toujours dans l'hypothèse de $a < \frac{1}{2}b$.

12. Or, si l'on en vient aux résultats de l'expérience, on trouve que le nombre des triangles à peu près équilatéraux est beaucoup plus considérable que ne le comporte l'hypothèse d'égalité possible.

En effet, supposons $\frac{n}{m} = 20$, et considérons successivement, dans les trois réseaux que nous avons déjà examinés, d'abord les plus petites et les plus grandes distances, c'est-à-dire les valeurs de a et de b , ensuite les nombres effectifs de triangles dans lesquels le plus petit côté ne diffère pas du moyen, ni le moyen du plus grand de plus de 20

pour 100. Les résultats auxquels on parvient sont consignés dans le Tableau suivant :

INDICATION des réseaux.	VALEURS EXTRÊMES de		RAPPORT $\frac{b}{a}$ (approx.).	NOMBRE total des triangles relevés T.	NOMBRE des triangles à peu près équilaté- raux t .	RAPPORT	
	a.	b.				observé	calculé
						$\frac{t}{T}$.	k.
Préfectoral.....	km 17,300	km 155,700	9	166	42	0,2530	0,1537
Sous-préfectoral...	7,570	129,700	17	721	180	0,2499	0,1468
Cantonal.....	1,700	29,600	17	816	224	0,2745	0,1468

La tendance à l'équilatérie se manifeste donc par ce fait que la proportion des triangles à peu près équilatéraux, dans chacun des trois réseaux, excède considérablement celle qui se produirait si tous les triangles étaient également possibles. L'excès est de 64 pour 100 dans le réseau préfectoral; de 70 pour 100 dans le réseau sous-préfectoral, de 87 pour 100 dans le réseau cantonal.

13. On trouve encore dans la Géométrie un auxiliaire utile pour résoudre d'une manière presque intuitive un genre de questions dont la solution analytique ne se présenterait peut-être pas avec le même degré de simplicité. Nous avons donné des exemples de ce genre (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 28 juin 1876), lorsque nous avons déterminé les probabilités respectives que les équations

$$z^2 + pz + q = 0,$$

$$z^3 + pz + q = 0$$

aient toutes leurs racines réelles, p et q étant compris entre des limites déterminées, et toutes les valeurs de ces coefficients étant considérées comme également possibles entre ces limites $\pm P, \pm Q$.

Il s'agit de comparer, dans le rectangle dont les sommets ont pour coordonnées $\pm P, \pm Q$, à la superficie $4PQ$ de ce rectangle, une aire

bornée, dans le cas du deuxième degré, par la parabole ordinaire

$$y = \frac{1}{4} x^2,$$

et, dans le cas du troisième degré, par la parabole semi-cubique

$$4x^3 + 27y^2 = 0.$$

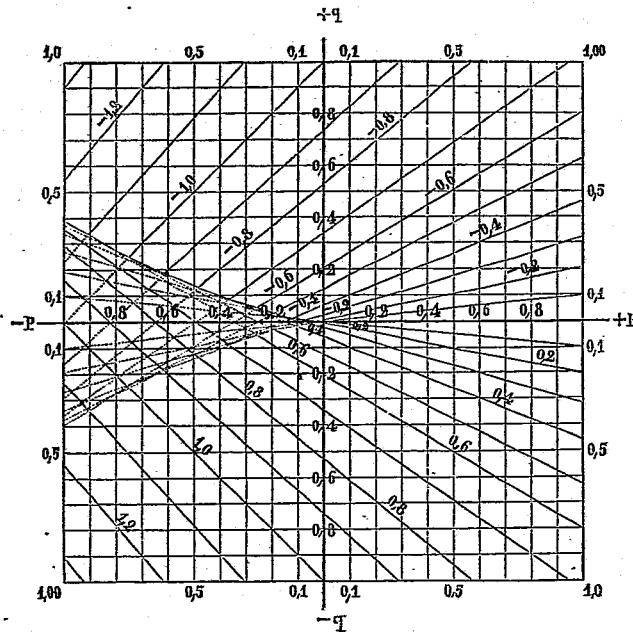
La probabilité que les racines sont réelles, dans le deuxième degré, a pour expression

$$\frac{P^2 + 12Q}{24Q},$$

et, dans le troisième degré,

$$\frac{2}{45} \frac{\sqrt{3} P^{\frac{3}{2}}}{Q}.$$

Fig. 5.



Si l'on fait $P = Q = 1$, il y aura, dans l'équation du deuxième degré

13 à parier contre 11 que les deux racines sont réelles, et, dans l'équation du troisième degré, environ 923 à parier contre 77 qu'il n'y aura qu'une seule racine réelle, la probabilité de tomber sur le cas irréductible ayant pour expression $\frac{2\sqrt{3}}{45} = 0,07698$.

La fig. 5 met en évidence le résultat relatif à l'équation du troisième degré suivie de son second terme. Car, si l'on considère comme variables, dans cette équation, les coefficients p et q , et que l'on construise la série des droites représentées par $q = -zp - z^3$, lorsque l'on y fait varier z de dixième en dixième d'unité entre +1 et -1, on obtient précisément cette figure, et c'est l'aire de la parabole semi-cubique enveloppe de toutes ces droites qui, rapportée au rectangle 4PQ, fournit l'expression de la probabilité cherchée.

Ce mode d'évaluation est applicable à une équation d'un degré quelconque dans laquelle il y a deux coefficients variables, et le diagramme (fig. 6) donne, non pas la construction exacte, mais la configuration générale de la courbe enveloppe de toutes les droites comprises dans l'équation

$$y = zx + 0,15z^2 - 0,95z^3 + z^5.$$

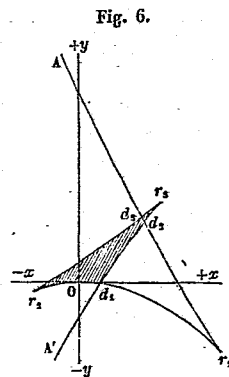
Dans la partie centrale teinte $d_1 d_2 d_3 r_2$ il n'y a pas moins de cinq cours de droites qui s'entre-croisent; il y en a trois dans la partie du plan à gauche du contour $A r_1 d_1 A'$ et dans l'espace $d_2 d_3 r_3$; il n'y en a plus qu'un à droite du même contour. La probabilité d'avoir cinq, trois ou une seule racine réelle lorsque les coefficients x et y varient entre des limites connues, dans l'équation du cinquième degré

$$z^5 - 0,95z^3 + 0,15z^2 + xz - y = 0,$$

est donc déterminée par la comparaison d'aires planes dont les contours peuvent être construits et les superficies évaluées avec autant d'approximation qu'on le veut.

14. On a vu, dans ce qui précède, un lieu géométrique qui est un solide servir, par la détermination de son centre de gravité, à l'évaluation des moyennes valeurs des variables comprises entre deux limites

données et qui entrent dans la composition d'une fonction. Des considérations analogues ont fourni la valeur d'une probabilité cherchée, dans divers cas, par la comparaison de superficies planes. Or la détermination des centres de gravité, comme celle des aires, comporte implicitement, au moins, des calculs d'intégrales définies. D'un autre



côté, les volumes et les superficies que l'on a rencontrés, dans cette étude, sont circonscrits par des surfaces ou par des lignes dont les équations peuvent être considérées comme les limites d'inégalités dont l'origine se trouve dans l'essence même des questions posées. Cette liaison entre le *calcul des conditions d'inégalité*, le *Calcul des probabilités* et le *Calcul intégral* a été signalée par l'illustre Fourier, en 1823, dans un Mémoire lu à l'Académie des Sciences dans les séances du 10 et du 17 novembre 1823, et dont il a donné le résumé dans la Partie mathématique de l'*Analyse des travaux de l'Académie* pendant la même année. Ce résumé inspire le vif regret qu'un Mémoire d'une aussi grande importance et d'un tel auteur n'ait pas été publié.

Il fut rendu compte des Communications de Fourier dans le *Bulletin des séances de la Société Philomathique* (mai et juin 1825) et dans la Partie Mathématique du *Bulletin Férussac* (juillet 1826).

Mais, dès la fin de 1811, M. Gergonne, dans le t. II des *Annales de Mathématiques*, avait signalé l'existence de cette nouvelle branche d'analyse, et il est revenu à plusieurs reprises sur le même objet (t. XIV et XVII du même recueil), pour lequel il paraît avoir le droit de revendiquer la priorité.

Les nouvelles applications que l'on vient d'indiquer semblent de nature à prouver que la matière signalée par Gergonne et mise en œuvre par un maître tel que Fourier est assez riche pour qu'on ne puisse pas la regarder comme épuisée.