JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES DOSTOR

Propriétés générales des polyèdres réguliers étoilés

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 209-226.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__209_0>

Propriétés générales des polyèdres réguliers étoilés;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

---

1. Nous nous proposons de donner les formules *générales* qui lient entre eux les divers éléments d'un polyèdre régulier, que ce corps soit convexe ou *étoilé*. Dans la recherche de ces formules, nous ferons intervenir un nouvel élément, qui n'a pas encore été considéré jusqu'ici : *le rayon de la sphère tangente aux arêtes du polyèdre régulier*. L'emploi de ce rayon nous permet d'établir nos formules d'une manière fort simple, presque élémentaire, et nous conduit à des résultats assez remarquables pour mériter d'être signalés.

2. On sait que, indépendamment des cinq polyèdres réguliers convexes, il existe encore quatre polyèdres réguliers étoilés. Les deux premiers paraissent appartenir à Kepler, qui, dans son *Harmonique du Monde* [*], fournit un double dessin de chacun de ces corps constellés : les deux polyèdres réguliers étoilés y sont représentés de face et de côté, par rapport à l'un des pentagones réguliers étoilés qui les terminent.

Les deux polyèdres réguliers étoilés de Kepler sont des dodécaèdres; dans l'un et l'autre les faces sont des pentagones réguliers de seconde espèce; mais dans le premier (*fig.* 1) les *douze* angles solides sont pen-

[*] *Harmonices mundi libri V*, p. 54. Lincii Austriæ, 1619; in-fol.

taèdres et convexes; et dans le second (*fig.* 2) les *vingt* angles solides

Fig. 1.

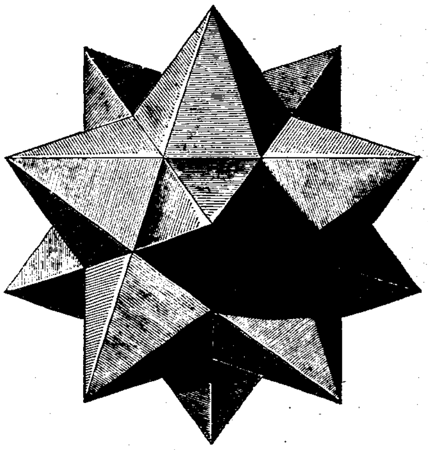
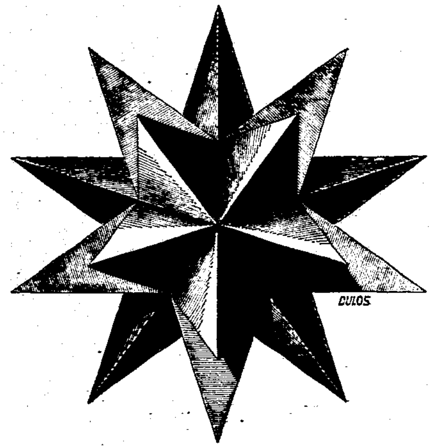


Fig. 2.



sont des trièdres. Ces deux dodécaèdres sont l'un de *troisième* espèce à faces étoilées, et l'autre de *septième* espèce à faces étoilées.

3. Les deux autres polyèdres réguliers étoilés n'ont été trouvés qu'en 1809 par l'illustre Poinsot, qui a établi, d'une manière générale, la théorie des polygones et polyèdres réguliers étoilés [*].

Le premier des polyèdres réguliers étoilés de Poinsot (*fig.* 3) est terminé par *douze* faces pentagonales convexes, sur lesquelles s'élèvent *douze* angles pentaèdres étoilés; le second (*fig.* 4) est formé par *vingt* faces triangulaires, qui comprennent entre elles *douze* angles pentaèdres étoilés. L'un de ces polyèdres est le dodécaèdre régulier étoilé de *troisième* espèce à faces convexes; l'autre est l'icocaèdre régulier étoilé de *septième* espèce à faces convexes.

Les deux polyèdres réguliers étoilés de Poinsot sont respectivement *conjugués* aux deux polyèdres réguliers étoilés de Kepler; car les faces du premier dodécaèdre de Kepler ont autant de côtés et sont de même espèce que les sommets du dodécaèdre de Poinsot, et les sommets du

[*] *Journal de l'École Polytechnique,* 1810, t. V, X[e] Cahier; p. 16 à 48.

dodécaèdre de Kepler ont autant d'arêtes et sont de même espèce que

Fig. 3.

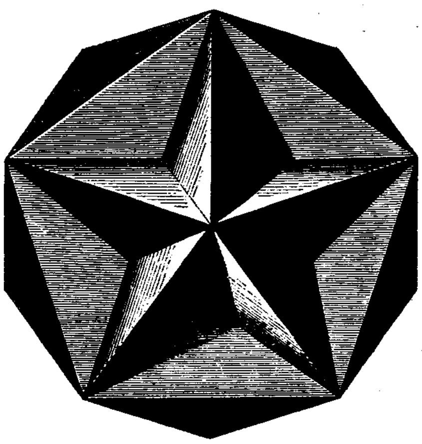
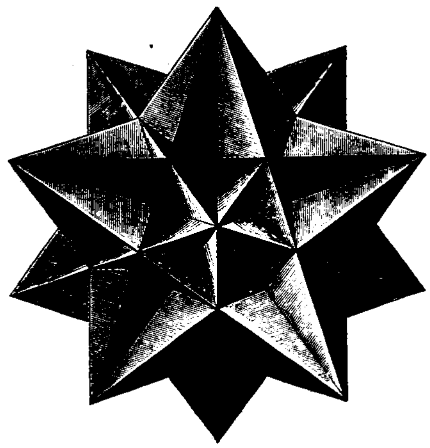


Fig. 4 [*].



les faces du dodécaèdre de Poinsot. Il en est de même du dodécaèdre de Kepler, à sommets trièdres, et de l'icosaèdre de Poinsot.

§ I. — Relations générales entre les rayons des trois sphères, l'une inscrite a un polyèdre régulier quelconque, l'autre tangente aux arêtes et la troisième circonscrite au polyèdre régulier.

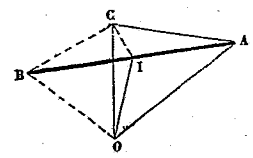
4. *Relation entre le rayon de la sphère inscrite au polyèdre et le rayon de la sphère tangente aux arêtes.* — Soient O le centre d'un polyèdre régulier (*fig* 5), AB l'une de ses arêtes et C le centre de l'une des deux faces régulières, auxquelles appartient cette arête AB. La droite OC sera perpendiculaire sur le plan ABC.

[*] Ces quatre figures, d'une exécution parfaite, sont empruntées au *Traité de Géométrie élémentaire* de MM. Rouché et de Comberousse, lequel forme l'Ouvrage le plus savant, le plus complet et peut-être le mieux rédigé qui ait été fait sur les éléments de la Géométrie. Le lecteur pourra consulter avec fruit la partie de la Géométrie de l'espace, p. 246 à 257, 4e édit., qui traite spécialement des polygones et polyèdres réguliers d'espèce supérieure.

Abaissons CI perpendiculairement sur l'arête AB; puis tirons les droites OI et OA. Le point I est nécessairement le milieu de l'arête AB et la ligne OI est perpendiculaire à cette arête.

Cela fait, il est évident que la droite OC est le rayon r de la sphère inscrite dans le polyèdre régulier; que la droite OA est le rayon R de

Fig. 5.



la sphère circonscrite à ce polyèdre et que OI est le rayon de la sphère tangente aux arêtes du même polyèdre. Nous représenterons ce dernier rayon par ρ.

Tirons les droites OB, CA et CB.

Supposons que chaque angle solide du polyèdre ait m faces et soit de l'espèce p; que chaque face du polyèdre soit un polygone de n côtés et de l'espèce q.

Par le rayon OA de la sphère circonscrite et par chacune des m arêtes, telles que AB, qui aboutissent au sommet A, menons un plan. Chacun des m plans ainsi conduits formera avec le suivant un angle dièdre, et les m angles dièdres ainsi obtenus comprendront p fois l'espace rempli par les quatre dièdres droits, que l'on peut former autour du rayon OA, espace angulaire, qui est mesuré par 2π. Il s'ensuit que chacun de nos m dièdres sera la $m^{\text{ième}}$ partie de p fois 2π, ou sera égal à $\frac{2p\pi}{m}$. Or le dièdre COAI, compris entre les deux plans OAC et OAI, est la moitié de l'un de ces dièdres; donc on a l'angle dièdre

$$\text{(1)} \qquad \text{COAI} = \frac{p\pi}{m}.$$

Puisque chaque face de notre polyèdre régulier est un polygone régulier de n côtés et de l'espèce q, l'angle au centre ACB de l'une de ces faces sera égal à la $n^{\text{ième}}$ partie de q fois quatre angles droits, ou égal à $\frac{2q\pi}{n}$; par suite, on a l'angle plan

$$(2) \qquad \text{ACI} = \frac{q\pi}{n}.$$

Cela posé, dans le tétraèdre IACO, dont nous prenons le point I pour sommet et par suite la face ACO pour base, projetons, sur le plan de la base, les trois faces latérales ICO, IAO et IAC; nous obtenons l'égalité

$$(3) \qquad \text{ACO} = \text{ICO} \cos \text{ACI} + \text{IAO} \cos \text{COAI} + \text{IAC} \cos \text{IACO}.$$

Mais, en vertu de (2) et (1), nous avons

$$\cos \text{ACI} = \cos \frac{q\pi}{n}, \quad \cos \text{COAI} = \cos \frac{p\pi}{m};$$

d'ailleurs, l'angle dièdre IACO étant droit, il vient

$$\cos \text{IACO} = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Par conséquent, l'égalité (3) se réduit à

$$(4) \qquad \text{ACO} = \text{ICO} \cos \frac{q\pi}{n} + \text{IAO} \cos \frac{p\pi}{m}.$$

Or il est évident que

$$\begin{aligned} \text{le triangle ACO} &= \tfrac{1}{2}\,\text{OC.AC} = \tfrac{1}{2}\, r.\text{AC}, \\ \text{le triangle ICO} &= \frac{1}{2}\,\text{OC.CI} = \frac{1}{2}\, r.\text{AC} \cos \frac{q\pi}{n}, \\ \text{et le triangle IAO} &= \frac{1}{2}\,\text{OI.AI} = \frac{1}{2}\, \rho.\text{AC} \sin \frac{q\pi}{n}. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc, en substituant dans (4) et en divisant le résultat par $\frac{1}{2}$ AC,

$$r = r \cos^2 \frac{q\pi}{n} + \rho \sin \frac{q\pi}{n} \cos \frac{p\pi}{m},$$

ou

$$r\left(1 - \cos^2 \frac{q\pi}{n}\right) = \rho \sin \frac{q\pi}{n} \cos \frac{p\pi}{m}.$$

Remplaçant $1 - \cos^2 \frac{q\pi}{n}$ par $\sin^2 \frac{q\pi}{n}$, puis divisant par $\sin \frac{q\pi}{n}$, nous obtenons enfin la *relation*

$$r \sin \frac{q\pi}{n} = \rho \cos \frac{p\pi}{m}, \tag{I}$$

qui existe entre le rayon r de la sphère inscrite dans le polyèdre régulier et le rayon ρ de la sphère tangente aux arêtes du polyèdre.

5. Théorème I. — *Lorsque deux polyèdres réguliers conjugués sont circonscrits à une même sphère, les rayons des deux sphères tangentes aux arêtes sont entre eux dans le même rapport que les sinus des angles au centre, dans les faces des deux polyèdres réguliers.*

L'égalité (I) nous donne

$$\rho = r \frac{\sin \frac{q\pi}{n}}{\cos \frac{p\pi}{m}}.$$

Soit ρ' le rayon de la sphère, qui, dans le conjugué du polyèdre régulier précédent, touche les arêtes. Si ce polyèdre conjugué est aussi circonscrit à la sphère de rayon r, nous aurons

$$\rho' = r \frac{\sin \frac{p\pi}{m}}{\cos \frac{q\pi}{n}}.$$

Il vient donc, en divisant,

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sin \frac{q\pi}{n} \cos \frac{q\pi}{n}}{\sin \frac{p\pi}{m} \cos \frac{p\pi}{m}},$$

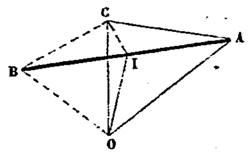
ou

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sin \frac{2q\pi}{n}}{\sin \frac{2p\pi}{m}}. \tag{II}$$

6. *Relation entre le rayon* R *de la sphère circonscrite et celui* ρ *de* *la sphère tangente aux arêtes.* — Le triangle AIO (*fig.* 6) nous donne

$$\overline{OA}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{AI}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{AC}^2 \sin^2 ACI = \overline{OI}^2 + \left(\overline{AO}^2 - \overline{CO}^2\right) \sin^2 ACI.$$

Fig. 6.



Remplaçant les quantités par leurs notations, nous obtenons

$$R^2 = \rho^2 + (R^2 - r^2) \sin^2 \frac{q\pi}{n},$$

d'où nous déduisons

$$R^2 \left(1 - \sin^2 \frac{q\pi}{n}\right) = \rho^2 - r^2 \sin^2 \frac{q\pi}{n},$$

ou

$$R^2 \cos^2 \frac{q\pi}{n} = \rho^2 - r^2 \sin^2 \frac{q\pi}{n}.$$

Si, dans cette égalité, nous mettons, à la place de $r \sin \frac{q\pi}{n}$, sa valeur $\rho \cos \frac{p\pi}{m}$, tirée de (I), nous aurons la relation demandée

$$R^2 \cos^2 \frac{q\pi}{n} = \rho^2 - \rho^2 \cos^2 \frac{p\pi}{m} = \rho^2 \sin^2 \frac{p\pi}{m},$$

ou

(III) $$R \cos \frac{q\pi}{n} = \rho \sin \frac{p\pi}{m}.$$

7. *Relation entre le rayon r de la sphère inscrite et celui* R *de la sphère circonscrite.* — Si nous divisons, membre à membre, les deux équations (III) et (I), nous aurons la relation

$$\frac{R \cos \frac{q\pi}{n}}{r \sin \frac{q\pi}{n}} = \frac{\sin \frac{p\pi}{m}}{\cos \frac{p\pi}{m}},$$

qui se réduit à

$$\text{(IV)} \qquad \frac{R}{r} = \operatorname{tang}\frac{p\pi}{m}\operatorname{tang}\frac{q\pi}{n}.$$

Cette relation était connue pour les polyèdres réguliers convexes, c'est-à-dire pour les cas où $p = q = 1$.

8. Théorème II. — *Lorsque deux polyèdres réguliers conjugués sont inscrits dans une même sphère, les deux polyèdres sont aussi circonscrits à une même sphère;* et réciproquement.

Car, pour passer d'un polyèdre à son conjugué, il suffit d'échanger entre eux, dans (IV), d'abord les nombres n et m, puis les nombres q et p, ce qui n'altère pas le produit

$$\operatorname{tang}\frac{p\pi}{m}\operatorname{tang}\frac{q\pi}{n};$$

donc le rapport $\frac{R}{r}$ reste le même.

9. Corollaire. — *Lorsque deux polyèdres réguliers conjugués sont inscrits dans la même sphère, les faces de ces deux polyèdres se trouvent inscrites dans des petits cercles de même rayon.*

Car le rayon du cercle circonscrit à l'une des faces du premier polyèdre est le côté CA du triangle rectangle ACO (*fig.* 6); qui donne

$$\overline{CA}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OC}^2 = R^2 - r^2;$$

par suite, le rayon du cercle circonscrit à l'une des faces du polyèdre régulier conjugué a aussi pour valeur $\sqrt{R^2 - r^2}$.

10. Théorème III. — *Lorsque deux polyèdres réguliers conjugués sont inscrits ou circonscrits à la même sphère, le produit des rayons des deux sphères tangentes aux arêtes de ces polyèdres est égal au produit des rayons des deux sphères, l'une inscrite et l'autre circonscrite à nos deux polyèdres conjugués.*

Car on a, pour le premier polyèdre, en vertu de (III),

$$\mathrm{R}\cos\frac{q\pi}{n} = \rho\sin\frac{p\pi}{m};$$

et, si ρ' est le rayon de la sphère tangente aux arêtes du second polyèdre, on aura, en vertu de (I),

$$r\sin\frac{p\pi}{m} = \rho'\cos\frac{q\pi}{n}.$$

On en tire, en multipliant,

$$\mathrm{R}r = \rho\rho'. \tag{V}$$

11. *Relation entre les rayons* R, r *et* ρ *des trois sphères.* — Faisons le produit des deux égalités (III) et (I); nous obtenons la relation

$$\mathrm{R}r\sin\frac{q\pi}{n}\cos\frac{q\pi}{n} = \rho^2\sin\frac{p\pi}{m}\cos\frac{p\pi}{m},$$

qui prend la forme remarquable

$$\mathrm{R}r\sin\frac{2q\pi}{n} = \rho^2\sin\frac{2p\pi}{m}. \tag{VI}$$

§ II. — Inclinaison mutuelle des faces adjacentes dans les polyèdres réguliers.

12. *Formule générale.* — Nous désignons par 2 I l'angle plan, qui mesure l'inclinaison de deux faces adjacentes dans le polyèdre régulier, dont les faces sont de n côtés et de l'espèce q, pendant que les angles solides sont de m faces et de l'espèce p.

L'angle 2 I est évidemment double de l'angle plan OIC (*fig.* 7).

Pour trouver la valeur de l'angle I, nous ferons remarquer que le triangle rectangle OCI nous donne de suite

$$\mathrm{OC} = \mathrm{OI}\sin\mathrm{OIC},$$

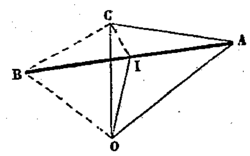
ou

$$r = \rho\sin\mathrm{I},$$

d'où nous tirons

$$\sin I = \frac{r}{\rho}.$$

Fig. 7.



Mais, par la relation (I) du n° **4**, nous avons

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}};$$

donc il nous vient

$$\text{(I)} \qquad \sin I = \frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}}.$$

Cette expression était connue pour les polyèdres réguliers convexes.

13. Théorème I. — *Lorsque deux polyèdres réguliers sont conjugués, les sinus des demi-inclinaisons des faces adjacentes sont* inversement *proportionnels aux sinus des angles au centre de ces faces.*

Soient I et I′ les demi-inclinaisons des faces adjacentes dans deux polyèdres réguliers conjugués, qui sont terminés, le premier par des polygones de n côtés et de l'espèce q; le second par des polygones de m côtés et de l'espèce p.

Les angles solides du premier polyèdre sont de m faces et de l'espèce p, pendant que ceux du second sont de n faces et de l'espèce q.

Nous avons, par conséquent (n° **12**),

$$\text{(1)} \qquad \sin I = \frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}}, \quad \sin I' = \frac{\cos\frac{q\pi}{n}}{\sin\frac{p\pi}{m}}.$$

Divisant membre à membre, on obtient l'égalité

$$\frac{\sin I}{\sin I'} = \frac{\cos\frac{p\pi}{m}\,\sin\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}\,\cos\frac{q\pi}{n}},$$

qui revient à

$$\text{(II)}\qquad \frac{\sin I}{\sin I'} = \frac{\sin\frac{2p\pi}{m}}{\sin\frac{2q\pi}{n}}.$$

14. Corollaire. — Si nous rapprochons cette égalité de la relation (V) du n° **11**, nous en déduirons

$$\text{(III)}\qquad \rho^2 \sin I = R r \sin I'.$$

15. Théorème II. — *Lorsque deux polyèdres réguliers sont conjugués, les cosinus des demi-inclinaisons des faces adjacentes sont* inversement *proportionnels aux sinus des demi-angles au centre de ces faces.*

Les deux égalités (1) nous donnent

$$\cos^2 I = 1 - \frac{\cos^2\frac{p\pi}{m}}{\sin^2\frac{q\pi}{n}},\qquad \cos^2 I' = 1 - \frac{\cos^2\frac{q\pi}{n}}{\sin^2\frac{p\pi}{m}},$$

et, par suite,

$$\cos^2 I \sin^2\frac{q\pi}{n} = \sin^2\frac{q\pi}{n} - \cos^2\frac{p\pi}{m} = \sin^2\frac{q\pi}{n} + \sin^2\frac{p\pi}{m} - 1,$$

$$\cos^2 I' \sin^2\frac{p\pi}{m} = \sin^2\frac{p\pi}{m} - \cos^2\frac{q\pi}{n} = \sin^2\frac{p\pi}{m} + \sin^2\frac{q\pi}{n} - 1.$$

Les seconds membres étant égaux, on a

$$\cos^2 I \sin^2\frac{q\pi}{n} = \cos^2 I' \sin^2\frac{p\pi}{m},$$

d'où l'on tire la proportion

$$\text{(IV)}\qquad \frac{\cos I}{\cos I'} = \frac{\sin\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}},$$

qu'il fallait établir.

16. Théorème III. — *Lorsque deux polyèdres réguliers sont conjugués, les cotangentes des demi-inclinaisons des faces sont* directement *proportionnelles aux cosinus des demi-angles au centre de ces faces.*

Divisons, membre à membre, l'égalité (IV) par (II); nous obtenons la relation

$$\frac{\cos \mathrm{I} : \sin \mathrm{I}}{\cos \mathrm{I}' : \sin \mathrm{I}'} = \frac{\sin \frac{p\pi}{m} \sin \frac{2q\pi}{n}}{\sin \frac{q\pi}{n} \sin \frac{2p\pi}{m}}.$$

La première fraction est égale à $\frac{\cot \mathrm{I}}{\cot \mathrm{I}'}$; la seconde fraction, après suppression du facteur $2 \sin \frac{p\pi}{m} \sin \frac{q\pi}{n}$ commun à ses deux termes, se réduit à $\frac{\cos \frac{q\pi}{n}}{\cos \frac{p\pi}{m}}$. Nous avons donc

$$\text{(V)} \qquad \frac{\cot \mathrm{I}}{\cot \mathrm{I}'} = \frac{\cos \frac{q\pi}{n}}{\cos \frac{p\pi}{m}}.$$

Cette formule trouvera son application plus loin, au n° **26**.

17. *Remarque.* — Faisons le produit des inverses des valeurs (1); nous aurons

$$\frac{1}{\sin \mathrm{I} \sin \mathrm{I}'} = \frac{\sin \frac{q\pi}{n} \sin \frac{p\pi}{m}}{\cos \frac{q\pi}{n} \cos \frac{p\pi}{m}} = \operatorname{tang} \frac{p\pi}{m} \operatorname{tang} \frac{q\pi}{n}.$$

Si nous mettons cette valeur dans la formule (IV) du n° **7**, celle-ci devient

$$\text{(VI)} \qquad r = \mathrm{R} \sin \mathrm{I} \sin \mathrm{I}'.$$

18. *Inclinaisons mutuelles des faces adjacentes dans les divers polyèdres réguliers.* — Appliquons la formule (I) au calcul de l'inclinaison des faces adjacentes dans les neuf polyèdres réguliers; nous obtiendrons des valeurs que nous réunissons dans le tableau suivant :

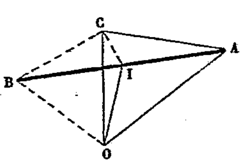
POLYÈDRES RÉGULIERS.	$n.$	$q.$	$m.$	$p.$	$\sin I.$	$\operatorname{tang} I.$	$\operatorname{tang} 2I.$	$2I.$
Tétraèdre............	3	1	3	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}.$	$\sin\frac{\pi}{4}.$	$2\sqrt{2}.$	$70^\circ.31'.43'',6$
Hexaèdre.............	4	1	3	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\sin\frac{\pi}{2}.$	∞	90.00.00,0
Octaèdre.............	3	1	4	1	$\frac{1}{3}\sqrt{6}$	$2\sin\frac{\pi}{4}.$	$-2\sqrt{2}.$	109.28.16,4
Dodécaèdre convexe....	5	1	3	1	$\frac{1}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}.$	$2\sin\frac{3\pi}{10}.$	$-2.$	116.35.54,2
Icosaèdre convexe......	3	1	5	1	$\frac{1}{6}(\sqrt{15}+\sqrt{3}).$	$4\sin^2\frac{3\pi}{10}.$	$-\frac{2}{5}\sqrt{5}.$	138.11.22,75
Dodécaèdre de Kepler à sommets pentaèdres..	5	2	5	1	$\frac{1}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}.$	$2\sin\frac{3\pi}{10}.$	$-2.$	116.35.54,2
Dodécaèdre de Poinsot.	5	1	5	2	$\frac{1}{10}\sqrt{50-10\sqrt{5}}.$	$2\sin\frac{\pi}{10}.$	2	63.24. 5,8
Dodécaèdre de Kepler à sommets trièdres....	5	2	3	1	$\frac{1}{10}\sqrt{50-10\sqrt{5}}.$	$2\sin\frac{\pi}{10}.$	2	63.24. 5.8
Icosaèdre de Poinsot...	3	1	5	2	$\frac{1}{6}(\sqrt{15}+\sqrt{3}).$	$4\sin^2\frac{\pi}{10}.$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}.$	41.38.37,25

Nous laissons au lecteur le soin de déduire de la comparaison de ces valeurs les conséquences, qui en découlent naturellement, et de déterminer lui-même la raison de ces conséquences.

§ III. — Expressions générales des rayons des trois sphères, en valeur de l'arête des polyèdres réguliers.

19. *Rayon de la sphère inscrite dans un polyèdre régulier, en valeur*

Fig. 8.



de l'arête a de ce polyèdre. Le triangle rectangle OCI (*fig.* 8) nous fournit la valeur

$$r = \mathrm{OC} = \mathrm{CI}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{O\dot{I}C} = \mathrm{CI}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I};$$

mais nous avons, par le triangle rectangle ACI,

$$\mathrm{CI} = \mathrm{AI}\cot \mathrm{ACI} = \frac{a}{2}\cot\frac{q\pi}{n}.$$

Il nous viendra donc, en substituant,

$$(\mathrm{I}) \qquad 2r = a\cot\frac{q\pi}{n}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I}.$$

20. *Rayon de la sphère circonscrite à un polyèdre régulier, en valeur de l'arête a de ce polyèdre.* — Multiplions l'égalité précédente (I) par la formule (IV) du n° **7**; nous aurons de suite

$$2\mathrm{R} = a\,\mathrm{tang}\frac{p\pi}{m}\,\mathrm{tang}\frac{q\pi}{n}\cot\frac{q\pi}{n}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I};$$

mais on sait que

$$\mathrm{tang}\frac{q\pi}{n}\cot\frac{q\pi}{n} = 1;$$

donc il nous vient

$$(\mathrm{II}) \qquad 2\mathrm{R} = a\,\mathrm{tang}\frac{p\pi}{m}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I}.$$

21. *Rayon de la sphère tangente aux arêtes d'un polyèdre régulier, en valeur de l'une a de ces arêtes.* — Dans la formule (I), remplaçons r par sa valeur $\rho\dfrac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}}$, fournie par l'égalité (I) du n° **4**; elle devient

$$2\rho\frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}} = a\cot\frac{q\pi}{n}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I}.$$

Si nous multiplions les deux membres par $\sin\frac{q\pi}{n}$ et que nous divisions les produits par $\cos\frac{p\pi}{m}$, nous obtenons l'expression

$$(\text{III}) \qquad 2\rho = a\frac{\cos\frac{q\pi}{n}}{\cos\frac{p\pi}{m}}\operatorname{tang}\mathrm{I}.$$

22. *Autre expression de ce rayon.* — Multiplions cette égalité, membre à membre, par la relation

$$\sin\mathrm{I} = \frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}}$$

du n° **12**; elle devient

$$2\rho\sin\mathrm{I} = a\frac{\cos\frac{q\pi}{n}}{\cos\frac{p\pi}{m}}\operatorname{tang}\mathrm{I}\frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}},$$

d'où nous tirons

$$2\rho = a\frac{\cot\frac{q\pi}{n}}{\cos\mathrm{I}}$$

ou

$$(\text{IV}) \qquad 2\rho = a\cot\frac{q\pi}{n}\,\mathrm{séc}\,\mathrm{I}.$$

23. *Expressions trigonométriques des rayons r,* R *et ρ des trois sphères, en valeur de l'arête a des divers polyèdres réguliers.* — Dans les formules (I), (II) et (III), remplaçons n et q, m et p par les nombres entiers, qui conviennent à la suite des neuf polyèdres réguliers; puis mettons de même, à la place de tang I, ses équivalents trigonométriques, qui sont consignés au tableau du n° **18**. Nous obtiendrons des résultats, que nous pouvons réunir dans un même tableau, au moyen duquel il sera aisé de calculer les expressions numériques des trois rayons r, R et ρ en fonction de l'arête a.

POLYÈDRES RÉGULIERS.	VALEUR, EN FONCTION DE L'ARÊTE a, DE		
	$2r$.	$2R$.	2ρ.
Tétraèdre...........	$a\cot\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$.	$a\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$.	$a\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{4}:\cos\frac{\pi}{3}$.
Hexaèdre...........	$a\cot\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}$.	$a\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}$.	$a\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}:\cos\frac{\pi}{3}$.
Octaèdre...........	$2a\cot\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$.	$2a\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}$.	$2a\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}:\cos\frac{\pi}{4}$.
Dodécaèdre convexe..	$2a\cot\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}$.	$2a\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{10}$.	$2a\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}:\cos\frac{\pi}{3}$.
Icosaèdre convexe....	$4a\cot\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{3\pi}{10}$.	$4a\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{3\pi}{10}$.	$4a\cos\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{3\pi}{10}:\cos\frac{\pi}{5}$.
Dodécaèdre de Kepler à sommets pentaèdres...........	$2a\cot\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}$.	$2a\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}$.	$2a\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}:\cos\frac{\pi}{5}$.
Dodécaèdre de Poinsot..............	$2a\cot\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}$.	$5a\,\mathrm{tang}\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}$.	$2a\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}:\cos\frac{2\pi}{5}$.
Dodécaèdre de Kepler à sommets trièdres.	$2a\cot\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}$.	$2a\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{10}$.	$2a\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}:\cos\frac{\pi}{3}$.
Icosaèdre de Poinsot.	$4a\cot\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{10}$.	$4a\,\mathrm{tang}\frac{2\pi}{5}\sin^2\frac{\pi}{10}$.	$4a\cos\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{10}:\cos\frac{2\pi}{5}$.

§ IV. — Volume des polyèdres réguliers convexes.

24. *Formule générale.* — Soient F le nombre des faces d'un polyèdre régulier convexe, et n le nombre des côtés de chaque face. Chacune des F faces est la base d'une pyramide régulière, ayant son sommet au centre O du polyèdre.

Le triangle ABC (*fig.* 8) est l'un des n triangles dont se compose la face, qui a son centre en C. La surface de cette face sera, par suite,

$$n.\,\mathrm{ABC} = n.\tfrac{1}{2}\mathrm{AB}.\mathrm{CI} = \tfrac{1}{2}na.\mathrm{CI};$$

mais le triangle ACI donne

$$\mathrm{CI} = \mathrm{AI}\cot\mathrm{ACI} = \frac{1}{2}a\cot\frac{\pi}{n};$$

il vient donc

$$n.\,\mathrm{ABC} = \frac{1}{4} na^2 \cot\frac{\pi}{n}.$$

Puisque la hauteur OC de la pyramide régulière, qui a pour base $n.\,\mathrm{ABC}$ et pour sommet le centre O, est égale au rayon r de la sphère inscrite, le volume de cette pyramide sera

$$v = \frac{1}{12} na^2 r \cot\frac{\pi}{n}.$$

Le volume de notre polyèdre régulier est donc

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{V} = \frac{1}{12} n\mathrm{F}a^2 r \cot\frac{\pi}{n}.$$

25. *Expressions diverses du volume d'un polyèdre regulier convexe.* — En faisant dans cette formule les substitutions convenables, on verra qu'on a aussi

$$\text{(II)} \qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{V} &= \frac{1}{24} n\mathrm{F}a^3 \cot^2\frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \mathrm{I},\\
\mathrm{V} &= \frac{1}{3} n\mathrm{F}r^3 \operatorname{tang}\frac{\pi}{n} \cot^2 \mathrm{I},\\
\mathrm{V} &= \frac{1}{3} n\mathrm{F}\mathrm{R}^3 \cot^3\frac{\pi}{m} \cot^2\frac{\pi}{n} \cot^2 \mathrm{I},\\
\mathrm{V} &= \frac{1}{6} n\mathrm{F}\rho^3 \operatorname{tang}\frac{\pi}{n} \sin 2\mathrm{I} \cos \mathrm{I},\\
\mathrm{V} &= \frac{1}{3} n\mathrm{F}\mathrm{R}r\rho \frac{\cos^2\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{\pi}{n}} \cot^2 \mathrm{I}.
\end{aligned}\right.$$

26. *Rapport des volumes de deux polyèdres réguliers convexes, qui sont conjugués et inscrits dans la même sphère.* — La dernière des formules (II), qu'il serait facile d'établir directement, nous permet de démontrer un théorème curieux, dans lequel intervient le rayon de la sphère tangente aux arêtes.

Lorsque deux polyèdres réguliers conjugués sont inscrits dans la même sphère, nous savons (n° **8**) qu'ils sont aussi circonscrits à une même sphère.

D'ailleurs le produit nF a aussi même valeur pour les deux polyèdres conjugués, s'ils sont convexes ; car, si ce produit est $4.6 = 24$ pour l'hexaèdre, il sera $3.8 = 24$ pour l'octaèdre; de même, s'il est $5.12 = 60$ pour le dodécaèdre, il sera $3.20 = 60$ pour l'icosaèdre.

Cela posé, soient V et V′ les volumes des deux polyèdres réguliers convexes et conjugués, qui sont inscrits dans la même sphère de rayon R ; r le rayon de la sphère inscrite, qui est commune ; ρ et ρ' les rayons des deux sphères tangentes aux arêtes ; I et I′ les demi-inclinaisons des faces adjacentes ; n et m les nombres de côtés de leurs faces ; F et F′ les nombres de ces faces.

En vertu de la dernière des formules (II), nous avons

$$V = \frac{1}{3} n \mathrm{FR} r\rho \frac{\cos^2\frac{\pi}{m}\cot^2 \mathrm{I}}{\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{\pi}{n}},$$

$$V' = \frac{1}{3} m \mathrm{FR} r\rho' \frac{\cos^2\frac{\pi}{n}\cot^2 \mathrm{I}'}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{m}};$$

divisant membre à membre et observant que $n\mathrm{F} = m\mathrm{F}'$, il vient

$$\frac{V}{V'} = \frac{\rho}{\rho'} \frac{\cos^2\frac{\pi}{m}\cot^2 \mathrm{I}}{\cos^2\frac{\pi}{n}\cot^2 \mathrm{I}'}.$$

Mais l'égalité (V) du nº **16** nous donne, en y faisant $p = 1, q = 1$,

$$\cos\frac{\pi}{m}\cot \mathrm{I} = \cos\frac{\pi}{n}\cot \mathrm{I}';$$

donc il reste

$$\frac{V}{V'} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

On en conclut la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Lorsque deux polyèdres réguliers, convexes et conjugués, sont inscrits dans la même sphère, leurs volumes sont entre eux comme les rayons des sphères tangentes aux arêtes des deux polyèdres.*