JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HALPHEN

Sur certaines propriétés métriques relatives aux polygones de Poncelet

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 285-292.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__285_0>

Sur certaines propriétés métriques relatives aux polygones de Poncelet;

PAR M. HALPHEN.

1. Le Mémoire de M. Weill, publié récemment dans le présent journal (t. IV, p. 265), contient plusieurs théorèmes nouveaux au sujet des polygones inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre cercle. Parmi ces théorèmes, on remarque principalement le suivant, que l'auteur appelle fondamental (p. 268):

1° *Si une ligne polygonale est inscrite dans un cercle et circonscrite à un autre cercle, le centre des moyennes distances de m points de contact consécutifs de cette ligne avec le second cercle a pour lieu un cercle.*

2° *Si la ligne polygonale se ferme de manière à former un polygone, le centre des moyennes distances des points de contact des côtés de ce polygone avec le second cercle reste fixe pendant le déplacement du polygone.*

Je me propose de montrer comment cette proposition et d'autres semblables peuvent être déduites aisément de la théorie générale des fonctions doublement périodiques.

2. PROPOSITION I. — *Soit* $F(z)$ *une fonction doublement périodique à deux infinis* α, α'; *soit* $a = \alpha - \alpha'$ *la différence de ces infinis. La somme*

$$\varphi(z) = F(z) + F(z+a) + F(z+2a) + \ldots + F[z+(m-1)a]$$

n'a que deux infinis, qui sont α *et* $\alpha' - (m-1)a$.

En effet, cette somme ne peut devenir infinie qu'avec un de ses éléments, c'est-à-dire si l'on a l'une des deux égalités suivantes :

$$z + ka = \alpha, \quad z + k'a = \alpha'.$$

Mais, d'après la valeur de a, on a simultanément

$$z + ka = \alpha, \quad z + (k-1)a = \alpha'.$$

Donc, chaque fois qu'un terme de $\varphi(z)$ devient infini, un de ses contigus le devient en même temps. D'ailleurs, les résidus de $F(z)$ relatifs aux infinis α, α' sont, comme on sait, égaux et de signes opposés. On en conclut que, deux termes contigus devenant infinis en même temps, leur somme reste finie. Donc $\varphi(z)$ ne devient infini qu'avec les termes extrêmes, lesquels n'ont chacun qu'un seul contigu, ce qui démontre la proposition.

Corollaire. — *Si le produit ma est la somme de multiples des deux périodes, $\varphi(z)$ est une constante.* En effet, les deux termes extrêmes peuvent alors être envisagés comme contigus, et $\varphi(z)$ ne devient jamais infinie. Ce corollaire peut être généralisé comme il suit :

Proposition II. — *Soient α, α' les infinis, ω, ω' les périodes de $F(z)$. Soient aussi m, n, p, p' des entiers tels qu'on ait*

$$\frac{\alpha - \alpha'}{n} = \frac{p\omega + p'\omega'}{m} = a;$$

la somme précédemment désignée par $\varphi(z)$ est indépendante de z.

Car on a en même temps

$$z + ka = \alpha, \quad z + (k-n)a = \alpha',$$

et, en outre, les termes extrêmes étant contigus, les termes de la somme forment un cycle fermé.

5. Proposition III. — *Soient α l'un des infinis et β l'un des zéros de la fonction $F(z)$ dont les périodes sont ω, ω'. Si l'on a*

$$\frac{\beta - \alpha}{n} = \frac{p\omega + p'\omega'}{m} = a,$$

le produit $\psi(z) = F(z)F(z+a)F(z+2a)\ldots F[z+(m-1)a]$ est indépendant de z.

En effet, on a simultanément

$$z + ka = \alpha, \quad z + (k + n)a = \beta$$

et aussi

$$z + k'a = \alpha', \quad z + (k' - n)a = \alpha + \alpha' - \beta.$$

Puisque α, α' sont les deux infinis de $F(z)$ et β un de ses zéros, $(\alpha + \alpha' - \beta)$ est l'autre zéro. Donc, dans $\psi(z)$, deux facteurs distants de n rangs deviennent simultanément, l'un nul, l'autre infini, et le produit reste fini.

D'ailleurs, les m facteurs forment un cycle fermé. Donc $\psi(z)$ reste toujours finie; donc cette fonction est constante.

4. Les propositions précédentes peuvent fournir des propriétés des polygones de Poncelet, puisqu'on sait, depuis Jacobi, que ces polygones constituent une représentation de la multiplication de l'argument dans les fonctions doublement périodiques à deux infinis. Voici comment, en quelques mots, le principe de cette représentation peut être exposé.

Soit $F(z)$ une fonction doublement périodique à deux infinis. Prenons une constante a, et considérons les deux quantités x, x_1 :

$$(1) \qquad x = F(z), \quad x_1 = F(z + a).$$

Les éléments de la théorie des fonctions doublement périodiques nous enseignent que les variables x, x_1 sont liées par une relation algébrique, qui est symétrique et, en outre, du second degré par rapport à chacune de ces variables. Réciproquement, étant donnée une telle relation, on peut toujours choisir a et $F(z)$ de manière que la relation proposée résulte des équations (1).

Soient maintenant deux coniques A, B et P, P_1 les points de rencontre de A avec une tangente de B. A un point P correspondent deux points P_1, et réciproquement. Si l'on détermine chaque point P de A par les valeurs d'un paramètre x qui corresponde uniformément au point P, ce qui est possible, alors les paramètres x, x_1 des points P, P_1 sont liés par une relation algébrique du second degré en x et x_1 et symétrique. Donc ces paramètres sont liés par des relations telles que (1). En conséquence, si l'on construit une ligne polygonale inscrite dans A et circonscrite à B, les paramètres des sommets successifs $P, P_1, \ldots, P_{m-1}, \ldots$ seront $F(z)$, $F(z+a), \ldots, F[z+(m-1)a]$.

Pour que la ligne polygonale se ferme et forme un polygone de m sommets, il faut et il suffit qu'on ait

$$(2) \qquad F(z+ma) = F(z).$$

Cette égalité a lieu pour $2z+ma=\alpha+\alpha'$ si α, α' sont les infinis de $F(z)$. Cette équation détermine quatre points particuliers P. Si l'on prend l'un d'eux pour le premier sommet de la ligne polygonale, cette ligne se replie sur elle-même et se ferme sans constituer un polygone véritable. On voit aisément quels sont ces points P. Si m est un nombre pair, P est le sommet de rang $\frac{m}{2}+1$ d'une ligne polygonale dont le premier sommet est l'un des quatre points communs à A et B. Si, au contraire, m est un nombre impair, P est le sommet de rang $\frac{m+1}{2}$ d'une ligne polygonale dont l'extrémité est le point de contact de A avec une des tangentes communes.

Soient ω, ω' les périodes de $F(z)$. Si l'on a $ma=p\omega+p'\omega'$, alors l'équation (2) a lieu quel que soit z. D'où le théorème de Poncelet : *S'il existe un véritable polygone fermé, inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique, il existe une infinité d'autres polygones jouissant des mêmes propriétés relativement à ces deux mêmes coniques.*

Ce qui vient d'être dit pour les sommets P de la ligne polygonale s'applique exactement aussi aux points Q où les côtés de cette ligne touchent la conique B.

5. Soient u, v, w les coordonnées homogènes d'un point par rapport à un triangle de référence ayant deux sommets $u=w=0$ et $v=w=0$ en deux points communs à A, B. A un point Q de B correspond uniformément le paramètre $x=\frac{u}{w}$. Soient $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ les points de contact successifs de B avec une ligne polygonale inscrite dans A. Le paramètre $\frac{u_k}{w_k}$ du point Q_k sera de la forme $F(z+ka)$. Considérons la somme

$$(3) \qquad mX = \frac{u}{w}+\frac{u_1}{w_1}+\frac{u_2}{w_2}+\ldots+\frac{u_{m-1}}{w_{m-1}},$$

et observons que $\frac{u}{w}$ ne devient infini qu'au point $v=w=0$. Ce point, commun à A, B, est la réunion de deux points de contact successifs. Il existe donc une valeur de z qui rend simultanément infinis $F(z)$ et $F(z+a)$. Donc a est la différence des infinis de $F(z)$. Donc la somme (3) est analogue à celle qui fait l'objet de la proposition I. Donc X ne devient infini que pour $z=\alpha$ et $z=\alpha'-(m-1)a$. Les deux lignes polygonales correspondantes n'en forment qu'une Ω, mais décrite dans deux sens différents. C'est celle dont le premier sommet est au point $v=w=0$. Considérons en même temps la somme

$$mY = \frac{v}{w} + \frac{v_1}{w_1} + \ldots + \frac{v_{m-1}}{w_{m-1}},$$

et soit η la valeur de Y correspondant à la ligne polygonale Ω.

Par les mêmes raisonnements, on voit que Y ne devient infini que lorsque la ligne polygonale a pour extrémité le point $v=w=0$. Soit ξ la valeur de X qui répond à cette ligne polygonale. Considérons maintenant l'expression $(X-\xi)(Y-\eta)$. Il est manifeste que cette fonction de z ne devient jamais infinie. C'est donc une simple constante h. Remplaçons X, Y par les rapports des coordonnées U, V d'un point à la coordonnée W. Ce point a donc pour lieu la conique dont l'équation est

$$(U-\xi W)(V-\eta W) = hW^2.$$

D'où cette proposition :

Si dans une conique A *on inscrit une ligne polygonale quelconque qui soit en même temps circonscrite à une autre conique* B, *le centre des moyennes harmoniques de m points de contact successifs de cette ligne avec* B, *par rapport à une corde commune aux deux coniques, a pour lieu une troisième conique fixe qui a aussi avec* A, B *cette même corde commune.*

Si maintenant on a $ma = p\omega + p'\omega'$, alors, suivant le corollaire de la proposition I, X et Y sont eux-mêmes constants. Donc :

Si la ligne polygonale se ferme et constitue un polygone de m côtés, le même centre des moyennes harmoniques reste fixe quand le polygone varie.

Si la corde commune envisagée s'éloigne indéfiniment, ces propositions se changent en les théorèmes de M. Weill ci-dessus rappelés.

6. La double proposition qui vient d'être démontrée provient de ce fait que a est la différence des infinis de la fonction doublement périodique à envisager. La même circonstance a lieu si l'on considère les sommets de la ligne polygonale sur A et que les rencontres de A avec la droite $w=0$ soient les points de contact de deux tangentes communes à A et à B. On est ainsi conduit à une proposition concernant le centre des moyennes harmoniques des sommets de la ligne polygonale; ce n'est, au reste, qu'une conséquence de la proposition précédente. Mais, au moyen de la proposition II, on obtient un théorème plus général, comme je vais l'indiquer.

7. Désignons maintenant par u, v, w les coordonnées d'un point de A, le triangle de référence ayant deux sommets $u=w=0$ et $v=w=0$ sur A; envisageons une ligne polygonale de sommets P, $P_1, \ldots, P_{m-1}$, et considérons encore la somme (3); supposons que le polygone soit fermé et qu'ainsi $ma = p\omega + p'\omega'$; comment choisir le triangle de référence pour que l'on ait aussi $\alpha - \alpha' = na$ et qu'on puisse ainsi appliquer la proposition II? D'après le n° 4, il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que le point $v=w=0$ soit un sommet d'une ligne polygonale ayant pour extrémité un point commun aux deux coniques ou bien le point de contact d'une tangente commune. Cela étant, X reste constant quand z varie. On a donc le théorème suivant :

Soient inscrits dans une conique A *des polygones* Ω *circonscrits à une autre conique* B. *Considérons des lignes polygonales particulières, inscrites à* A *et circonscrites à* B, *savoir :* 1° *celle dont le premier sommet* P *est un quelconque des points communs à* A *et* B, *et désignons par* P_1, P_2, ... *ses divers sommets ;* 2° *celle dont le premier sommet* M *est le point de contact d'une tangente commune à* A *et* B, *et désignons par* M_1, M_2, ... *ses divers sommets. Prenons pour axe des moyennes harmoniques une droite quelconque passant par l'un des points* P_1, P_2, ... *ou* M, M_1, M_2, ..., *et soit* G *le point où cet axe rencontre de nouveau la conique* A : *le centre des moyennes harmoniques des sommets du polygone* Ω *a pour lieu une ligne droite passant par le point* G.

Si le point G *coïncide avec un autre des points* P_1, P_2, ... *ou* M, M_1, M_2, ..., *ce même centre des moyennes harmoniques reste fixe quand le polygone* Ω *varie.*

On peut ajouter encore, soit en répétant un raisonnement tout pareil, soit en le déduisant de l'énoncé précédent :

Soient P, Q_1, Q_2, ... *les points de contact de* B *avec la ligne polygonale* P, P_1, ..., *et* N, N_1, N_2, ... *avec la ligne polygonale* M, M_1, M_2, ... *Prenons pour axe des moyennes harmoniques une droite passant par l'un des points* P, Q_1, Q_2, ... *ou* N_1, N_2, ..., *et soit* H *le point où cet axe rencontre de nouveau la conique* B. *Le centre des moyennes harmoniques des points de contact du polygone* Ω *avec* B *a pour lieu une ligne droite passant par le point* H.

Si le point H *est lui-même l'un des points* P, Q_1, Q_2, ... *ou* N_1, N_2, ..., *ce même centre des moyennes harmoniques reste fixe quand le polygone* Ω *varie.*

Il faut observer que ces divers points P, P_1, ... sont en nombre limité, comme il résulte de l'hypothèse qu'il existe des polygones Ω. On peut facilement trouver le nombre de ces points, et je me contente d'énoncer ce résultat :

Si m *est le nombre des côtés des polygones* Ω, *les points* P_1, P_2, ..., M, M_1, M_2, ... *sont, en totalité, au nombre de* $2(m-1)$. *Il en est de même des points* P, Q_1, Q_2, ..., N_1, N_2, ... *Il existe donc* $(m-1)(2m-3)$ *axes par rapport à chacun desquels le centre des moyennes harmoniques des sommets du polygone* Ω *est fixe, et tout autant d'axes par rapport à chacun desquels la même circonstance a lieu pour le centre des moyennes harmoniques des points de contact de ce polygone avec* B.

8. En appliquant la proposition III, on obtient un théorème d'un genre différent. Soit $f(z)$ la fonction doublement périodique qui figure les différents sommets d'un polygone Ω. Si l'on fait

$$F(z) = \frac{f(z)-f(Z)}{f(z)-f(Z+na)},$$

Z étant une constante arbitraire et n un nombre entier, on obtient, dans le cas où les polygones Ω sont fermés, une fonction F(z) qui satisfait aux conditions de l'énoncé de la proposition III. Pour donner au résultat obtenu de la sorte une forme géométrique, il suffit de considérer $f(z)$ comme le rapport anharmonique formé sur la conique A par le point P et trois points fixes. Si l'on suppose que deux des points fixes soient à l'infini sur un cercle, la forme de l'énoncé devient plus simple, et la voici :

Soient Ω, Ω' deux polygones, le premier variable, le second fixe, inscrits dans un cercle et circonscrits à une conique : le produit des distances d'un sommet fixe de Ω' à tous les sommets de Ω est au produit des distances d'un autre sommet fixe de Ω' à tous les sommets de Ω dans un rapport constant.

9. Au lieu de fixer chaque point de la conique A par les valeurs d'un paramètre dans la définition duquel figure seulement la conique A elle-même, on peut employer des paramètres qui soient définis par la figure composée des deux coniques. Par exemple, ainsi que l'a fait M. Mention [*], on peut fixer la position du point P par la cotangente du demi-angle que font entre elles les tangentes menées de P à B, les coniques A et B étant toutes deux censées des cercles. On trouve aisément alors que ce nouveau paramètre, pour les côtés successifs d'une ligne polygonale inscrite à A et circonscrite à B, est figuré par les valeurs successives de $F(z+na)$, $F(z)$ étant toujours une fonction elliptique. Voici, par exemple, un des résultats qu'on peut immédiatement déduire de la proposition II, en se plaçant à ce nouveau point de vue :

Soient des polygones Ω inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre cercle. Désignons par P, P_1, P_2, ... les sommets d'un de ces polygones, et par Q, Q_1, ... les points de contact du second cercle respectivement avec les côtés PP_1, P_1P_2, ... Soit, en outre, l la longueur d'une tangente commune aux deux cercles.

Quel que soit le polygone Ω, la quantité suivante est constante, savoir :

$$\frac{1}{PQ-l}+\frac{1}{P_1Q_1-l}+\frac{1}{P_2Q_2-l}+\ldots=\text{const.}$$

[*] *Mélanges mathématiques et astronomiques*, t. III. Saint-Pétersbourg, mai 1859.