JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DÉSIRÉ ANDRÉ

Sur le développement des fonctions de M. Weierstrass suivant les puissances croissantes de la variable

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 31-46.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__31_0>

Sur le développement des fonctions de M. Weierstrass suivant les puissances croissantes de la variable;

Par M. Désiré ANDRÉ.

INTRODUCTION.

1. Les quatre fonctions dues à M. Weierstrass, et représentées d'ordinaire par les notations $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$, $\mathrm{Al}_3(x)$, sont, comme on le sait, développables en séries suivant les puissances croissantes de la variable x. Dans ces développements, les puissances successives de x sont multipliées respectivement par des polynômes entiers en k^2. L'étude des coefficients de ces polynômes fait l'objet du présent Mémoire.

2. Nous montrons d'abord que si, dans les polynômes en k^2 que présente un même développement, nous prenons tous les coefficients d'une même puissance de k^2, nous trouvons les termes d'une série récurrente proprement dite.

Nous donnons ensuite, pour chacune des fonctions considérées, une première équation génératrice de cette série récurrente et une première forme du terme général de cette série.

Enfin nous réduisons cette équation et cette forme à une équation et à une forme incomparablement plus simples.

3. Les résultats que nous obtenons ainsi étaient, ce nous semble, inconnus avant nous. Nous les avons donnés, pour la première fois, dans une Note que notre illustre maître, M. Hermite, a bien voulu présenter à l'Académie des Sciences [*]. La méthode qui nous y conduit nous paraît à la fois simple et rapide : elle s'appuie sur quelques propriétés des séries récurrentes, sur les équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions de M. Weierstrass, sur les relations qui existent entre ces fonctions et les fonctions elliptiques; enfin sur la forme des coefficients des fonctions elliptiques trouvée antérieurement par nous [**].

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES COEFFICIENTS.

§ I. — *Notations.*

4. Des quatre fonctions de M. Weierstrass, la seule fonction $\mathrm{Al}_1(x)$ est impaire; les trois autres sont paires [***]. Nous pouvons donc poser

$$\begin{aligned}
\mathrm{Al}\,(x) &= P_0 - P_1\frac{x^2}{2!} + P_2\frac{x^4}{4!} - P_3\frac{x^6}{6!} + \cdots,\\
\mathrm{Al}_1(x) &= Q_0\frac{x}{1} - Q_1\frac{x^3}{3!} + Q_2\frac{x^5}{5!} - Q_3\frac{x^7}{7!} + \cdots,\\
\mathrm{Al}_2(x) &= R_0 - R_1\frac{x^2}{2!} + R_2\frac{x^4}{4!} - R_3\frac{x^6}{6!} + \cdots,\\
\mathrm{Al}_3(x) &= S_0 - S_1\frac{x^2}{2!} + S_2\frac{x^4}{4!} - S_3\frac{x^6}{6!} + \cdots,
\end{aligned}$$

sachant d'ailleurs que les quatre constantes P_0, Q_0, R_0, S_0 sont égales chacune à l'unité.

5. Pour les constantes P_n, Q_n, R_n, S_n, ce sont des polynômes en-

---

[*] Dans la séance du 10 décembre 1877.

[**] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* séance du 10 juillet 1876. — *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* année 1877, p. 265.

[***] BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques,* p. 466.

tiers en k^2, et nous posons

$$\begin{aligned}
P_n &= p_{n,0} + p_{n,1}k^2 + p_{n,2}k^4 + p_{n,3}k^6 + \ldots,\\
Q_n &= q_{n,0} + q_{n,1}k^2 + q_{n,2}k^4 + q_{n,3}k^6 + \ldots,\\
R_n &= r_{n,0} + r_{n,1}k^2 + r_{n,2}k^4 + r_{n,3}k^6 + \ldots,\\
S_n &= s_{n,0}k^{2n} + s_{n,1}k^{2n-2} + s_{n,2}k^{2n-4} + s_{n,3}k^{2n-6} + \ldots.
\end{aligned}$$

6. Notre objet, c'est l'étude des coefficients

$$p_{n,t},\quad q_{n,t},\quad r_{n,t},\quad s_{n,t},$$

regardés comme des fonctions de n, l'indice t étant supposé constant.

Puisqu'on a, d'après une relation connue [*], et quel que soit t,

$$s_{n,t} = r_{n,t},$$

on voit que cette étude se réduit à celle des trois premiers, et que nous n'avons à nous occuper que des trois fonctions

$$\mathrm{Al}(x),\quad \mathrm{Al}_1(x),\quad \mathrm{Al}_2(x).$$

§ II. — *Formules relatives aux coefficients.*

7. Les trois fonctions considérées $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$, regardées comme dépendant chacune de la variable x et de l'indéterminée k, satisfont respectivement, on le sait [**], aux trois équations différentielles

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\mathrm{Al}}{dx^2} + 2k^2x\frac{d\mathrm{Al}}{dx} + 2kk'^2\frac{d\mathrm{Al}}{dk} + k^2x^2\,\mathrm{Al} = 0,\\
&\frac{d^2\mathrm{Al}_1}{dx^2} + 2k^2x\frac{d\mathrm{Al}_1}{dx} + 2kk'^2\frac{d\mathrm{Al}_1}{dk} + (k'^2 + k^2x^2)\,\mathrm{Al}_1 = 0,\\
&\frac{d^2\mathrm{Al}_2}{dx^2} + 2k^2x\frac{d\mathrm{Al}_2}{dx} + 2kk'^2\frac{d\mathrm{Al}_2}{dk} + (1 + k^2x^2)\,\mathrm{Al}_2 = 0,
\end{aligned}$$

dans lesquelles k'^2 n'est autre chose que la différence $1 - k^2$.

---

[*] BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 468.

[**] *Ibid.*, p. 471. Ces équations sont dues à M. Weierstrass (*Journal de Crelle*, 1856).

Ce sont ces trois équations différentielles qui serviront de premier fondement à nos recherches.

8. Pour en tirer des formules relatives aux quantités P_n, Q_n, R_n, supposons que les fonctions $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$ y soient respectivement remplacées par les développements que nous avons écrits en commençant (4); puis égalons à zéro le facteur qui, au résultat obtenu, multiplie $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ dans la seconde équation, et $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ dans les deux autres. Nous trouvons

$$P_{n+1} - 4nk^2 P_n - 2kk'^2 \frac{dP_n}{dk} + 2n(2n-1)k^2 P_{n-1} = 0,$$

$$Q_{n+1} - [1 + (4n+1)k^2]Q_n - 2kk'^2 \frac{dQ_n}{dk} + 2n(2n+1)k^2 Q_{n-1} = 0,$$

$$R_{n+1} - (1 + 4nk^2)R_n - 2kk'^2 \frac{dR_n}{dk} + 2n(2n-1)k^2 R_{n-1} = 0.$$

9. Des égalités que nous venons d'écrire (8), nous pouvons tirer maintenant des formules relatives aux coefficients $p_{n,t}$, $q_{n,t}$, $r_{n,t}$. Pour y parvenir, remplaçons d'abord, dans ces égalités, k'^2 par $1 - k^2$; ensuite les quantités P_n, Q_n, R_n par leurs expressions (5) en fonction de k; enfin égalons à zéro les coefficients respectifs de k^{2t} dans les trois résultats. Nous trouvons ainsi les trois formules

$$\begin{aligned}
&p_{n+1,t} - 4tp_{n,t} - 4(n-t+1)p_{n,t-1} + 2n(2n-1)p_{n-1,t-1} = 0,\\
&q_{n+1,t} - (4t+1)q_{n,t} - (4n-4t+5)q_{n,t-1} + 2n(2n+1)q_{n-1,t-1} = 0,\\
&r_{n+1,t} - (4t+1)r_{n,t} - 4(n-t+1)q_{n,t-1} + 2n(2n-1)r_{n-1,t-1} = 0,
\end{aligned}$$

qui sont beaucoup plus faciles à manier que les précédentes (8), puisqu'elles ne contiennent aucune dérivée.

§ III. — *Propriété fondamentale des coefficients.*

10. Considérons, d'une part, la suite formée par les coefficients

$$\ldots,\ p_{n-2,t},\ p_{n-1,t},\ p_{n,t},\ p_{n+1,t},\ p_{n+2,t},\ \ldots,$$

de l'autre celle que forment les coefficients

$$\ldots, p_{n-2,t-1}, p_{n-1,t-1}, p_{n,t-1}, p_{n+1,t-1}, p_{n+2,t-1}, \ldots.$$

Les termes de la première sont liés aux termes de la seconde par la formule

$$p_{n+1,t} - 4tp_{n,t} - 4(n-t+1)p_{n,t-1} + 2n(2n-1)p_{n-1,t-1} = 0,$$

que nous venons d'établir (9).

Cette formule nous montre nettement que, si la seconde suite est une série récurrente proprement dite, la première en est également une, c'est-à-dire que, les coefficients $p_{n,t-1}$ et $p_{n,t}$ étant regardés comme des fonctions de n seulement, si le premier est le terme général d'une série récurrente proprement dite, il en est de même du second.

Or on sait que $p_{n,0}$ est nul, quel que soit n. Donc $p_{n,1}$, d'après la formule, est le terme général d'une série récurrente proprement dite. Donc, d'après ce qu'on vient de dire, il en est encore de même pour $p_{n,t}$.

On verrait, par des considérations analogues, ou plutôt identiques, que $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$, regardés comme des fonctions du seul indice n, jouissent de la même propriété.

11. Ainsi les *coefficients* $p_{n,t}$, $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$, qui font l'objet de notre étude et que nous regardons comme des fonctions de n seulement, l'indice t étant supposé constant, *constituent chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite.* C'est là, à nos yeux, leur *propriété fondamentale.* Cette propriété rapproche les fonctions de M. Weierstrass, non-seulement des fonctions elliptiques, mais encore des fonctions plus générales que nous avons précédemment étudiées [*].

12. Dès qu'on connaît une équation génératrice d'une série récurrente, que cette équation, d'ailleurs, puisse être résolue ou soit impossible à résoudre, on sait une forme du terme général de cette série. Pour arriver aux formes des coefficients que nous étudions, il nous suffira

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 29 octobre 1877.

donc de déterminer des équations génératrices des séries récurrentes dont ils constituent les termes généraux. La méthode que nous devons suivre nous est ainsi naturellement indiquée.

CHAPITRE II.

PREMIÈRE FORME DES COEFFICIENTS.

§ I. — *Remarque sur un problème important.*

13. Comme nous l'avons fait observer déjà (**10**), les formules (9) relatives aux coefficients établissent chacune une relation entre les termes, caractérisés par l'indice $t-1$, d'une première série récurrente, et les termes, caractérisés par l'indice t, d'une série récurrente nouvelle.

Si cette relation nous permettait de déduire une équation génératrice de la seconde série d'une équation génératrice de la première, elle nous fournirait le moyen d'arriver de proche en proche à des équations génératrices des séries récurrentes dont $p_{n,t}$, $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$ constituent respectivement les termes généraux; elle nous fournirait, par conséquent, la solution du problème qui nous occupe.

14. Nous sommes donc conduits à nous poser ce problème général :

Étant donnée une relation, linéaire et homogène, entre certains termes

$$\ldots,\ G_{n-2},\ G_{n-1},\ G_n,\ G_{n+1},\ G_{n+2},\ \ldots,$$
$$\ldots,\ H_{n-2},\ H_{n-1},\ H_n,\ H_{n+1},\ H_{n+2},\ \ldots$$

de deux séries récurrentes proprement dites, relation dans laquelle les termes G *ont pour coefficients des constantes et les termes* H *des polynômes entiers en n, déduire d'une équation génératrice de la série* H *une équation génératrice de la série* G.

15. Ce problème général est, on le voit, fort important. Peut-être avons-nous été le premier à le poser et à le résoudre. Quoi qu'il en soit, il a fait de notre part l'objet d'un travail spécial [*], et voici la solution fort simple que nous en avons donnée :

Pour obtenir les racines d'une équation génératrice de la série G, *il suffit de prendre :*

1° *Les racines d'une équation génératrice de la série récurrente définie par l'égalité qui aurait pour second membre zéro et pour premier l'ensemble des termes en* G *de la relation considérée, en conservant à chacune de ces racines son degré de multiplicité;*

2° *Les racines d'une équation génératrice de la série* H, *en augmentant le degré de multiplicité de chacune d'elles de l'exposant de la plus haute puissance de n figurant dans la relation considérée.*

16. Nous allons appliquer ce résultat aux trois formules (9) successivement, afin de déduire de la première la forme de $p_{n,t}$, de la deuxième celle de $q_{n,t}$, de la troisième celles de $r_{n,t}$ et de $s_{n,t}$.

§ II. — *Première forme du coefficient* $p_{n,t}$.

17. Reprenons la formule

$$p_{n+1,t} - 4\,tp_{n,t} - 4(n-t+1)\,p_{n,t-1} + 2n(2n-1)\,p_{n-1,t-1} = 0,$$

qui est la première des formules (9).

En y égalant à zéro l'ensemble des termes G, on obtient l'égalité

$$p_{n+1,t} - 4\,tp_{n,t} = 0,$$

qui définit une série récurrente admettant évidemment l'équation génératrice

$$z - 4t = 0.$$

Le plus haut exposant de n s'y trouve égal à 2.

Donc, pour passer d'une équation génératrice correspondant à $p_{n,t-1}$

[*] *Bulletin de la Société mathématique de France*, année 1878.

à une équation génératrice correspondant à $p_{n,t}$, il suffit de prendre la première de ces équations génératrices, d'y augmenter de deux unités le degré de multiplicité de chaque racine, et d'y introduire une racine nouvelle, égale à $4t$.

18. Puisque $p_{n,0}$ est nul quel que soit n, la série récurrente dont le terme général est $p_{n,1}$ admet l'équation génératrice

$$z - 4.1 = 0.$$

Il s'ensuit, si l'on tient compte du paragraphe précédent (**17**), que la série dont le terme général est $p_{n,2}$ admet l'équation génératrice

$$(z - 4.1)^3 (z - 4.2)^1 = 0;$$

que celle dont le terme général est $p_{n,3}$ admet l'équation génératrice

$$(z - 4.1)^5 (z - 4.2)^3 (z - 4.3)^1 = 0;$$

et ainsi de suite.

En définitive donc, la série récurrente dont le terme général est le coefficient $p_{n,t}$ admet l'équation génératrice

$$\prod_{\theta\,1}^{t} (z - 4\theta)^{2t-2\theta+1} = 0.$$

19. Cette équation génératrice obtenue, la forme générale du coefficient $p_{n,t}$ s'écrit immédiatement. On a, conformément aux règles de Lagrange,

$$p_{n,t} = \sum_{\theta\,1}^{t} \xi_\theta(n)(4\theta)^n,$$

l'expression $\xi_\theta(n)$ désignant un polynôme entier en n du degré $2t - 2\theta$.

§ III. — *Première forme du coefficient $q_{n,t}$.*

20. La seconde des formules (9) est celle-ci

$$q_{n+1,t} - (4t+1)\,q_{n,t} - (4n - 4t + 5)\,q_{n,t-1} + 2n(2n+1)\,q_{n-1,t-1} = 0.$$

Si l'on y égale à zéro l'ensemble (15) des termes en G, on obtient l'égalité

$$q_{n+1,t}-(4t+1)q_{n,t}=0,$$

qui définit une série récurrente admettant évidemment l'équation génératrice

$$z-(4t+1)=0.$$

Le plus haut exposant de n y est encore égal à 2.

Donc, pour passer d'une équation génératrice correspondant à $q_{n,t-1}$ à une équation génératrice correspondant à $q_{n,t}$, il suffit de prendre la première de ces équations génératrices, d'y augmenter de deux unités le degré de multiplicité de toutes les racines, et d'y introduire une racine nouvelle, égale à $4t+1$.

21. Or on sait que $q_{n,0}$ est, quel que soit n, égal à l'unité; en d'autres termes, qu'il est le terme général d'une série récurrente admettant l'équation génératrice

$$z-(4.0+1)=0.$$

Donc les séries récurrentes dont les termes généraux sont respectivement $q_{n,1}$, $q_{n,2}$ admettent les équations génératrices respectives

$$[z-(4.0+1)]^3[z-(4.1+1)]^1=0,$$
$$[z-(4.0+1)]^5[z-(4.1+1)]^3[z-(4.2+1)]^1=0;$$

et ainsi de suite.

Donc la série récurrente dont le terme général est $q_{n,t}$ admet l'équation génératrice

$$\prod_0^t{}_\theta [z-(4\theta+1)]^{2t-2\theta+1}=0.$$

22. Il s'ensuit immédiatement que la forme générale de $q_{n,t}$ est donnée par la formule

$$q_{n,t}=\sum_0^t{}_\theta \xi_\theta(n)(4\theta+1)^n,$$

dans laquelle $\xi_\theta(n)$ représente un polynôme entier en n, du degré $2t-2\theta$.

§ IV. — *Première forme des coefficients* $r_{n,t}$, $s_{n,t}$.

23. La troisième des formules (9) est celle-ci :

$$r_{n+1,t}-(4t+1)r_{n,t}-4(n-t+1)r_{n,t-1}+2n(2n-1)r_{n-1,t-1}=0.$$

Elle nous montre qu'une équation génératrice relative au coefficient $r_{n,t}$ se déduit d'une équation relative au coefficient $r_{n,t-1}$, comme une équation de $q_{n,t}$ se déduit (20) d'une équation de $q_{n,t-1}$.

On a, d'ailleurs, pour $r_{n,0}$, comme on l'avait pour $q_{n,0}$, l'équation génératrice

$$z-(4.0+1)=0.$$

Donc le coefficient $r_{n,t}$, ainsi que le coefficient $s_{n,t}$ qui lui est égal, est le terme général d'une série récurrente admettant l'équation génératrice donnée déjà (21) pour la série correspondant à $q_{n,t}$.

Donc le coefficient $r_{n,t}$, ainsi que son égal $s_{n,t}$, a la forme donnée déjà (22) pour le coefficient $q_{n,t}$.

CHAPITRE III.

FORME SIMPLIFIÉE DES COEFFICIENTS.

§ I. — *Simplification d'une équation génératrice.*

24. Soit E_n le terme général d'une série récurrente proprement dite. Soit

$$E_n+\alpha E_{n-1}+\beta E_{n-2}+\gamma E_{n-3}=0$$

la relation qui définit cette série et de laquelle on tire immédiatement l'équation génératrice

$$z^3+\alpha z^2+\beta z+\gamma=0.$$

Les termes de cette série satisfont évidemment aux deux équations

$$E_n + \alpha E_{n-1} + \beta E_{n-2} + \gamma E_{n-3} = 0,$$
$$E_{n-1} + \alpha E_{n-2} + \beta E_{n-3} + \gamma E_{n-4} = 0;$$

par suite, à une combinaison quelconque de ces deux équations, et, en particulier, à l'équation

$$E_n + (\alpha - \zeta) E_{n-1} + (\beta - \alpha\zeta) E_{n-2} + (\gamma - \beta\zeta) E_{n-3} - \gamma\zeta E_{n-4} = 0,$$

qu'on obtient en retranchant, de la première d'entre elles, la seconde multipliée par ζ.

Cette nouvelle équation pourra être regardée comme une nouvelle définition de la série, et, à cette nouvelle définition, correspondra la nouvelle équation génératrice

$$z^4 + (\alpha - \zeta) z^3 + (\beta - \alpha\zeta) z^2 + (\gamma - \beta\zeta) z - \gamma\zeta = 0,$$

qui n'est autre que la première équation génératrice multipliée par le binôme $z - \zeta$.

25. Il ressort de cet exemple qu'une série récurrente quelconque admet une infinité d'équations génératrices. On verrait d'ailleurs facilement que chacune de ces équations peut être remplacée par une équation plus compliquée, et que, une seule exceptée, chacune peut être remplacée également par une équation plus simple. Simplifier une équation génératrice, c'est la remplacer par une équation plus simple convenant à la même série.

L'unique équation génératrice qui ne peut être simplifiée jouit évidemment de cette propriété que son premier membre divise exactement les premiers membres de toutes les autres équations génératrices. Pour se rapprocher de cette équation unique, en partant d'une équation génératrice quelconque, il faudra donc, dans cette dernière, supprimer des racines : il ne faudra jamais en ajouter.

26. Cela posé, considérons une série récurrente quelconque, ayant pour terme général F_n, et supposons, d'une part, que l'équation génératrice que nous en connaissons admette la racine ω au degré i de multiplicité. Cette racine entrera, comme on sait, dans l'expression de F_n par un produit de la forme $\xi_\omega(n)\,\omega^n$, qui s'ajoutera aux produits analogues correspondant aux autres racines et dans lequel $\xi_\omega(n)$ sera un polynôme entier en n, du degré $i-1$.

Si une propriété quelconque de F_n nous montre, d'autre part, que ω^n ne figure pas dans son expression, nous serons en droit de supprimer la racine ω dans l'équation génératrice considérée, c'est-à-dire de diviser le premier membre de cette équation par le facteur $(z-\omega)^i$.

Cette manière de simplifier une équation génératrice est celle que nous allons employer.

§ II. — *Forme simplifiée du coefficient $p_{n,t}$.*

27. La fonction $\mathrm{Al}(x)$ est, comme on le sait [*], liée à la fonction elliptique $\lambda(x)$ par l'équation

$$D^2 \log \mathrm{Al}(x) + k^2\lambda^2(x) = 0;$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\log \mathrm{Al}(x) = Mx + N - k^2 \int dx \int \lambda^2(x)\,dx = \psi(x),$$

et, par suite,

$$\mathrm{Al}(x) = e^{\psi(x)}.$$

Or nous avons montré [**] que, dans le développement de $\lambda^2(x)$ suivant les puissances croissantes de x, le coefficient analogue à $p_{n,t}$ ne contenait, à la puissance n, que des carrés de nombres entiers pairs. Il en est évidemment de même pour le coefficient analogue dans le développement de $\psi(x)$; et, par conséquent, pour le coefficient analogue dans le développement de $e^{\psi(x)}$, c'est-à-dire pour le coefficient $p_{n,t}$.

---

[*] Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 466.

[**] *Comptes rendus*, séance du 10 juillet 1876. — *Annales de l'École Normale*, année 1877, p. 265.

28. Nous avons donc le droit de supprimer, dans l'équation génératrice (18) correspondant à ce coefficient $p_{n,t}$, toute racine qui n'est pas le carré d'un nombre entier pair.

Après cette suppression, cette équation n'admettra plus que les seules racines

$$(2.1)^2,\ (2.2)^2,\ (2.3)^2,\ \ldots,\ (2.\eta)^2,$$

le nombre η n'étant autre chose que la partie entière de $\sqrt{t}$.

Quant aux degrés de multiplicité respectifs de ces racines, ils resteront ce qu'ils étaient avant la suppression. La racine $(2\tau)^2$ aura pour degré de multiplicité le nombre $2t - 2\tau^2 + 1$.

En définitive, l'équation génératrice (18) sera remplacée par l'équation

$$\prod_{1}^{\eta}{}_{\tau}[z - (2\tau)^2]^{2t-2\tau^2+1} = 0.$$

29. La forme simplifiée du coefficient $p_{n,t}$ nous sera donc donnée par l'égalité

$$p_{n,t} = \sum_{1}^{\eta}{}_{\tau} \xi_\tau(n)\,[(2\tau)^2]^n,$$

dans laquelle nous désignons par η la partie entière de $\sqrt{t}$ et par $\xi_\tau(n)$ un polynôme entier en n, du degré $2t - 2\tau^2$.

§ III. — *Forme simplifiée du coefficient $q_{n,t}$.*

30. La fonction $\mathrm{Al}_1(x)$ est liée à la fonction elliptique $\lambda(x)$ par l'équation [*]

$$\mathrm{Al}_1(x) = \mathrm{Al}(x)\,\lambda(x).$$

Nous avons montré antérieurement [**] que, dans le développe-

[*] Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 466.

[**] *Comptes rendus*, séance du 10 juillet 1876. — *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1877, p. 265.

ment de $\lambda(x)$, suivant les puissances croissantes de x, le coefficient analogue à $q_{n,t}$ ne contient, à la puissance n, que des carrés de nombres entiers impairs. Nous venons à l'instant (27) de prouver que, dans le développement de $\mathrm{Al}(x)$, le coefficient $p_{n,t}$ ne présente à la puissance n que des carrés de nombres entiers pairs. Il suit de ces deux faits, joints à l'égalité rappelée ci-dessus, que $q_{n,t}$, coefficient du développement de $\mathrm{Al}_1(x)$, ne renferme, à la puissance n, que des carrés de nombres entiers impairs.

31. Par conséquent, nous supprimerons, dans l'équation génératrice (21), toutes les racines qui ne sont pas des carrés de nombres entiers impairs. Les seules racines restantes seront

$$(2.1+1)^2,\ (2.1+1)^2,\ (2.2+1)^2,\ \ldots,\ (2\eta+1)^2,$$

le nombre η n'étant autre chose que la partie entière de l'expression $\frac{-1+\sqrt{4t+1}}{2}$, et chacune de ces racines restantes conservera le degré de multiplicité qu'elle avait dans l'équation génératrice (21).

La nouvelle équation génératrice sera donc

$$\prod_{0}^{\eta}{}_{\tau}\left[z-(2\tau+1)^2\right]^{2t-2\tau^2-2\tau+1}=0.$$

32. Il s'ensuit que la forme simplifiée du coefficient $q_{n,t}$ sera donnée par l'égalité

$$q_{n,t}=\sum_{0}^{\eta}{}_{\tau}\,\xi_\tau(n)\left[(2\tau+1)^2\right]^n,$$

dans laquelle η a la même signification que précédemment, et où $\xi_\tau(n)$ représente un polynôme entier en n, du degré $2t-2\tau^2-2\tau$.

§ IV. — *Forme simplifiée des coefficients* $r_{n,t}$, $s_{n,t}$.

33. La fonction $\mathrm{Al}_2(x)$ est liée à la fonction elliptique $\mu(x)$ par l'équation [*]

$$\mathrm{Al}_2(x) = \mathrm{Al}(x)\mu(x).$$

Nous avons montré antérieurement [**] que, dans le développement de $\mu(x)$, suivant les puissances croissantes de x, le coefficient analogue à $r_{n,t}$ ne contient, à la puissance n, que des carrés de nombres entiers impairs. Nous avons, dans le présent Mémoire (27), prouvé que, dans le développement de $\mathrm{Al}(x)$, le coefficient $p_{n,t}$ ne présente, à la puissance n, que des carrés de nombres entiers pairs. Il suit de ces deux remarques, jointes à l'équation que nous venons d'écrire, cette conséquence que $r_{n,t}$, coefficient du développement de $\mathrm{Al}_2(x)$, ne présente, à la puissance n, que des carrés de nombres entiers impairs; et il en est de même pour le coefficient $s_{n,t}$, qui est égal à $r_{n,t}$.

34. Nous pouvons donc, dans l'équation génératrice correspondant à $r_{n,t}$ et à $s_{n,t}$, supprimer toutes les racines qui ne sont pas des carrés de nombres entiers impairs. Cette suppression nous conduit, pour ces coefficients $r_{n,t}$ et $s_{n,t}$, à une nouvelle équation génératrice et à une nouvelle forme, qui ne sont autres que l'équation génératrice et que la forme correspondant au coefficient $q_{n,t}$.

§ V. — *Résumé.*

35. Comme résumé, non-seulement du Chapitre actuel, mais du présent Mémoire tout entier, nous pouvons énoncer les résultats suivants :

1° *Les coefficients $p_{n,t}$, $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$, regardés comme des fonctions de n seulement, constituent chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite;*

---

[*] BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 466.

[**] *Comptes rendus*, séance du 10 juillet 1876. — *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1877, p. 265.

2° *La série récurrente ayant le coefficient $p_{n,t}$ pour terme général admet l'équation génératrice*

$$\prod_{1}^{\eta}{}_{\tau}[z-(2\tau)^2]^{2t-2\tau^2+1}=0,$$

les séries qui ont pour termes généraux respectifs les coefficients $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$ admettent chacune l'équation génératrice

$$\prod_{0}^{\eta}{}_{\tau}[z-(2\tau+1)^2]^{2t-2\tau^2-2\tau+1}=0,$$

η représentant, dans la première de ces équations, la partie entière de $\sqrt{t}$, et, dans la seconde, la partie entière de $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{4t+1})$;

3° *Les formes générales des coefficients considérés, lesquelles se déduisent immédiatement des équations génératrices qui précèdent, sont données, pour $p_{n,t}$, par la formule*

$$p_{n,t}=\sum_{1}^{\eta}{}_{\tau}\xi_\tau(n)[(2\tau)^2]^n,$$

pour $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, $s_{n,t}$, par la formule

$$q_{n,t}=\sum_{0}^{\eta}{}_{\tau}\xi_\tau(n)[(2\tau+1)^2]^n,$$

η ayant, dans ces deux formules, les mêmes significations que dans les équations génératrices correspondantes qui précèdent, et $\xi_\tau(n)$ représentant un polynôme entier en n, du degré $2t-2\tau^2$ dans la première formule, et du degré $2t-2\tau^2-2\tau$ dans la seconde.