JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 329-344.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__329_0>

Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

SUITE [*].

IV. — ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE D'UNE PLAQUE.

19. Les modes d'équilibre d'un prisme qui servent de type à ceux d'un tronçon de plaque, en ce sens que ces derniers en diffèrent d'autant moins que la plaque est plus mince par rapport à sa longueur et à sa largeur, sont ceux dans lesquels, nulle force extérieure n'étant appliquée aux bases du prisme ni à sa masse, la constitution de la matière, les forces N, T et les déformations ∂, g sont les mêmes aux divers points d'un feuillet quelconque parallèle aux bases. Nous supposerons normal à celles-ci l'axe des z du système local de coordonnées qui sera propre au tronçon.

Les trois équations indéfinies ordinaires de l'équilibre d'un prisme

$$(43)\quad \frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}=0,\quad \frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}=0,\quad \frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}=0$$

deviendront, grâce aux conditions $\frac{d(N,T)}{d(x,y)}=0$, caractéristiques du genre

[*] Voir la première Partie à la page 163 de ce volume.

d'équilibre considéré,

$$\frac{dT_2}{dz} = o, \quad \frac{dT_1}{dz} = o, \quad \frac{dN_3}{dz} = o:$$

combinées avec les relations $T_2 = o$, $T_1 = o$, $N_3 = o$, spéciales à chacune des deux bases, elles reviennent à dire que les trois composantes T_2, T_1, N_3 de l'action mutuelle de deux feuillets quelconques sont nulles partout.

20. Mais, sans faire toutes les hypothèses $\frac{d(N, T)}{d(x, y)} = o$, qui ne sont vraies dans un tronçon de plaque qu'à une première approximation, on ne cessera pas d'avoir un problème abordable, *pour le cas ordinaire où la contexture est symétrique par rapport aux faces des feuillets*, et l'on atteindra, dans le même cas, à une approximation plus élevée pour une plaque plane, pareillement à ce qu'on a vu au n° **4** pour un tronçon de tige, si l'on annule seulement : 1° les dérivées secondes $\frac{d^2N_1}{dy^2}$, $\frac{d^2N_2}{dx^2}$, $\frac{d^2T_3}{dx^2, dx\,dy, dy^2}$; 2° les dérivées premières en x, y des forces T_2, T_1, qui étaient nulles à une première approximation. Rien n'empêchera même d'ajouter aux premiers membres des deux premières équations (43) les composantes respectives, suivant les x et suivant les y, d'une action extérieure rapportée à l'unité de volume, pourvu que les dérivées en x et en y de ces petites composantes soient insensibles.

En effet, les deux premières équations (43), différentiées chacune par rapport à x et par rapport à y, donneront $\frac{d^2N_1}{dx^2, dx\,dy} = o$, $\frac{d^2N_2}{dy^2, dx\,dy} = o$, en sorte que toutes les dérivées secondes en x et y de N_1, N_2, T_3 seront nulles. La troisième (43), réduite à $\frac{dN_3}{dz} = o$, donnera également $N_3 = o$, en tenant compte d'une condition spéciale aux bases du prisme. On aura donc, en somme,

$$(44) \qquad N_3 = o, \quad \frac{d^2(N_1, N_2, T_3)}{dx^2, dx\,dy, dy^2} = o, \quad \frac{d(T_2, T_1)}{d(x, y)} = o.$$

On voit que *l'action mutuelle de deux feuillets contigus de la plaque se réduit à ses deux composantes tangentielles* T_2, T_1, *ou n'a pas de composante normale sensible* N_3.

Dans ce numéro, je suppose la contexture du prisme symétrique par rapport au plan des xy, ce qui revient à dire : 1° que N_1, N_2, N_3, T_3 dépendent seulement de ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{xy}; 2° que T_2, T_1 dépendent seulement de g_{xz}, g_{yz}. Chaque feuillet du prisme étant d'ailleurs homogène dans toute son étendue, l'annulation des dérivées secondes en x et y de N_1, N_2, N_3, T_3 équivaut à poser

$$(45) \qquad \frac{d^2(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{xy})}{dx^2, dx\,dy, dy^2} = 0,$$

et celle des dérivées premières de T_2, T_1 en x et y donne à son tour

$$(46) \qquad \frac{d(g_{xz}, g_{yz})}{d(x, y)} = 0.$$

Enfin, vu la formule de N_3, la relation $N_3 = 0$ est une équation qui permet d'exprimer linéairement ∂_z en fonction de ∂_x, ∂_y, g_{xy}, puis de porter cette valeur de ∂_z dans les expressions de N_1, N_2, T_3. Celles-ci deviennent alors de la forme

$$(47) \quad \begin{cases} N_1 = C(\beta\partial_x + \beta'\partial_y + \beta'' g_{xy}), \quad N_2 = C(\beta_1\partial_x + \beta'_1\partial_y + \beta''_1 g_{xy}), \\ \qquad\qquad T_3 = C(\gamma\partial_x + \gamma'\partial_y + \gamma'' g_{xy}) : \end{cases}$$

elles ne dépendent que des déformations ∂_x, ∂_y, g_{xy} éprouvées, au point (x, y), par le *feuillet* qui y passe et dans les sens parallèles à son plan tangent. Nous supposerons que le coefficient positif d'élasticité C puisse seul varier d'un feuillet à l'autre, ou que les coefficients β, β', ..., γ'' soient indépendants de z; *cela revient à admettre que, pour d'égales déformations ∂_x, ∂_y, g_{xy} éprouvées par tous les feuillets (supposés isolés) dans leurs propres plans, les forces déformatrices N_1, N_2, T_3 conservent, chez tous, les mêmes rapports.*

Les quatre relations (46), en y remplaçant g_{xz}, g_{yz} par $\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}$, $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$, puis ajoutant deux résultats, donnent

$$(48) \quad \frac{d\partial_x}{dz} = -\frac{d^2w}{dx^2}, \quad \frac{d\partial_y}{dz} = -\frac{d^2w}{dy^2}, \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) \text{ ou } \frac{dg_{xy}}{dz} = -2\frac{d^2w}{dx\,dy}.$$

Les seconds membres de celles-ci sont continus quand z varie ou que l'on passe d'un feuillet à un autre; car le déplacement w a d'égales valeurs pour deux feuillets contigus du prisme, même hétérogènes, et par suite les dérivées de ces valeurs en x et y sont aussi égales. Or, ces trois seconds membres des équations (48), différentiés par rapport à z, donnent zéro pour résultat, parce que trois des relations (45) ne sont autres que $\frac{d^2\partial_z}{dx^2,\, dy^2,\, dx\,dy} = 0$. Si donc, en vue de fixer les idées, on appelle w_0 le déplacement transversal w pour la *couche* (tangente à un feuillet du tronçon) qui a été choisie dans sa position primitive comme plan *local* des xy, on peut remplacer w par w_0 dans les équations (48).

Désignons en outre par ∂_x^0, ∂_y^0, g_{xy}^0 les valeurs de ∂_x, ∂_y, g_{xy} sur le même feuillet tangent au plan des xy; les équations (48), multipliées par dz, puis intégrées, donneront

$$(49)\quad \partial_x = \partial_x^0 - \frac{d^2 w_0}{dx^2} z, \quad \partial_y = \partial_y^0 - \frac{d^2 w_0}{dy^2} z, \quad g_{xy} = g_{xy}^0 - 2\frac{d^2 w_0}{dx\,dy} z.$$

Ainsi, *les déformations* ∂_x, ∂_y, g_{xy}, *éprouvées par les feuillets dans les sens parallèles à leurs plans, varient linéairement le long d'une normale à la plaque.*

J'appellerai feuillet *moyen* la surface matérielle, sensiblement parallèle aux deux faces de la plaque ou aux bases du prisme, qui contiendra les centres de gravité des normales menées à cette même surface et d'une base à l'autre dans l'état primitif, les centres dont il s'agit étant déterminés d'après la supposition que chaque élément dz des normales ait une masse, par unité de longueur, égale à la valeur du coefficient d'élasticité C sur cet élément. Le plan local des xy sera supposé constamment tangent au feuillet moyen du tronçon ou du prisme, en sorte qu'on aura, si $\int_h$ désigne une intégrale prise sur toute l'épaisseur h de la plaque,

$$(50)\qquad \int_h \mathrm{C} z\, dz = 0.$$

J'appellerai en outre C' la valeur moyenne de C sur toute l'épaisseur

h, et $C'' \frac{h^3}{12}$ le moment d'inertie d'une normale par rapport à son centre de gravité : en d'autres termes, je poserai

$$(50\,bis) \qquad C'h = \int_h C\,dz, \quad C''\frac{h^3}{12} = \int_h C z^2\,dz.$$

On remarquera que, dans le cas d'une plaque homogène, pour laquelle le coefficient C est constant, ces formules (50 *bis*) reviennent à prendre $C' = C$, $C'' = C$, vu qu'alors z varie de $-\frac{h}{2}$ à $\frac{h}{2}$.

21. *A une première approximation, les formules du numéro précédent subsistent dans le cas général où la matière ne possède aucun plan de symétrie de contexture.* En effet, d'une part, les trois équations $T_2 = 0$, $T_1 = 0$, $N_3 = 0$ trouvées plus haut y donnent g_{xz}, g_{yz}, ∂_z en fonction linéaire de ∂_x, ∂_y, g_{xy}; ce qui ramène les expressions de N_1, N_2, T_3 aux formes (47), où nous admettrons toujours que β, β', ..., γ'' soient indépendants de z. D'autre part, la nullité supposée des dérivées des N, T en x et y entraîne celle des dérivées pareilles des ∂, g; et les relations (45), (46), (48), (49) ne cessent pas non plus d'être admissibles.

Évaluons maintenant, à cette première approximation, les actions totales exercées par unité de longueur à travers deux sections faites dans la plaque suivant deux surfaces matérielles primitivement perpendiculaires au feuillet moyen et entre elles : nous supposerons la première section primitivement normale à l'axe des x, la seconde primitivement normale à l'axe des y.

Les forces T_2, T_1 se trouvant négligeables, la pression exercée sur un élément plan de la section normale aux x n'a que les deux composantes N_1, T_3, dirigées respectivement suivant les x et suivant les y; de même, la pression exercée sur un élément de la section normale aux y n'a que les deux composantes T_3, N_2, dirigées aussi suivant les x et les y. Cherchons la valeur statique totale de ces forces, pour toute une bande comprise entre deux normales au feuillet moyen, menées, très-près l'une de l'autre, dans chaque section.

A cet effet, portons les valeurs (49) de ∂_x, ∂_y, g_{xy} dans les expressions (47) de N_1, N_2, T_3, et posons, pour abréger :

$$(51)\quad \begin{cases} n_1^0 = \beta \partial_x^0 + \beta' \partial_y^0 + \beta'' g_{xy}^0, \quad n_2^0 = \beta_1 \partial_x^0 + \beta'_1 \partial_y^0 + \beta''_1 g_{xy}^0, \\ t_3^0 = \gamma \partial_x^0 + \gamma' \partial_y^0 + \gamma'' g_{xy}^0; \end{cases}$$

$$(52)\quad \begin{cases} n_1 = \beta \dfrac{d^2 w_0}{dx^2} + \beta' \dfrac{d^2 w_0}{dy^2} + 2\beta'' \dfrac{d^2 w_0}{dx\,dy}, \\ n_2 = \beta_1 \dfrac{d^2 w_0}{dx^2} + \beta'_1 \dfrac{d^2 w_0}{dy^2} + 2\beta''_1 \dfrac{d^2 w_0}{dx\,dy}, \\ t_3 = \gamma \dfrac{d^2 w_0}{dx^2} + \gamma' \dfrac{d^2 w_0}{dy^2} + 2\gamma'' \dfrac{d^2 w_0}{dx\,dy}. \end{cases}$$

Il viendra

$$(53)\quad N_1 = C(n_1^0 - z n_1), \quad N_2 = C(n_2^0 - z n_2), \quad T_3 = C(t_3^0 - z t_3).$$

Occupons-nous d'abord de la bande de section normale aux x.

Les parties Cn_1^0 de N_1 sont des forces parallèles et de mêmes sens sur les divers éléments de cette bande, et il en est de même des parties Ct_3^0 de T_3. Elles équivalent en tout à deux forces appliquées au centre de gravité de la bande, c'est-à-dire à un point de son intersection par le feuillet moyen ; la première est parallèle aux x ou perpendiculaire à la bande, la seconde parallèle aux y ou dirigée suivant l'intersection de la bande par le feuillet moyen. Leurs valeurs totales, rapportées à l'unité de largeur de la bande ou à l'unité de longueur de la section, sont respectivement

$$n_1^0 \int_h C\,dz, \quad t_3^0 \int_h C\,dz, \quad \text{ou} \quad C'hn_1^0, \quad C'ht_3^0.$$

Au contraire, les parties $-Cn_1 z$, $-Ct_3 z$ de N_1, T_3 changent de signe avec z et ont leurs valeurs moyennes nulles d'après la relation (50). Elles équivalent donc à deux couples, dont les moments totaux, rapportés à l'unité de largeur de la bande et supposés positifs quand ils tendent à imprimer à celle-ci une rotation, autour de son centre, dans le sens des x ou des y positifs vers les z positifs, sont respectivement $\int_h z.Cn_1 z\,dz$, $\int_h z.Ct_3 z\,dz$, c'est-à-dire $C''\frac{h^3}{12}n_1$, $C''\frac{h^3}{12}t_3$. Le premier de ces couples est perpendiculaire à l'intersection de la bande par le feuillet moyen, le second est parallèle à la bande.

De même, les forces exercées sur une bande ou section perpendiculaire aux y équivalent par unité de longueur : 1° à deux forces $C'ht_3^0$, $C'hn_2^0$, l'une tangentielle, l'autre normale, appliquées à son centre de gravité, point situé sur l'intersection de la bande par le feuillet moyen ; 2° à deux couples $C''\frac{h^3}{12}t_3$, $C''\frac{h^3}{12}n_2$, qui se trouvent, le premier, parallèle à la bande, le second, perpendiculaire à l'intersection de la bande par le feuillet moyen.

22. Ces résultats ne sont exacts qu'à une première approximation, c'est-à-dire dans l'hypothèse multiple que la constitution et l'état de la matière soient les mêmes, à l'intérieur du tronçon, sur toute l'étendue d'un feuillet quelconque parallèle au feuillet moyen, que ces feuillets soient plans à l'état naturel, et que ni les bases ni la masse du tronçon ne supportent aucune action extérieure. En réalité, les pressions, quelles qu'elles soient, exercées sur une bande infiniment étroite, primitivement perpendiculaire à une ligne matérielle du feuillet moyen et comprise entre deux autres lignes matérielles d'abord normales à ce feuillet, équivalent en tout : 1° à trois forces appliquées en un point de l'intersection de la bande par le feuillet moyen et dirigées, l'une suivant la ligne primitivement normale à la bande, la seconde suivant l'intersection de celle-ci par le feuillet moyen, la troisième suivant la normale aux deux premières ; 2° à deux couples respectivement perpendiculaires, le premier, à l'intersection de la bande par le feuillet moyen, le second, à la ligne qui était primitivement normale à la bande. Il n'y a pas à considérer un troisième couple parallèle au feuillet moyen, parce qu'il serait de l'ordre du carré de la largeur de la bande, et par conséquent négligeable, comme composé de forces comparables à cette largeur et ayant des bras de levier également de l'ordre de la même largeur. Ce qui précède montre que, pour les bandes ou sections primitivement normales aux x et aux y, les composantes, suivant leurs intersections mutuelles par le feuillet moyen, des forces totales qu'elles supportent, ont, par unité de longueur primitive des sections, des valeurs peu différentes respectivement de

$$\mathfrak{N}_x = C'hn_1^0, \quad \mathfrak{T} = C'ht_3^0; \quad \mathfrak{T} = C'ht_3^0, \quad \mathfrak{N}_y = C'hn_2^0.$$

Ces valeurs, vu les expressions (51) de n_1^0. n_2^0, t_3^0, reviennent à celles-ci :

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{N}_x &= C'h(\beta\,\partial_x^0 + \beta'\partial_y^0 + \beta'' g_{xy}^0),\\ \mathfrak{N}_y &= C'h(\beta_1\partial_x^0 + \beta'_1\partial_y^0 + \beta''_1 g_{xy}^0),\\ \mathfrak{T} &= C'h(\gamma\partial_x^0 + \gamma'\partial_y^0 + \gamma'' g_{xy}^0). \end{aligned}\right.$$

Quant aux couples qui sont appliqués aux mêmes bandes et qui se trouvent tous normaux au plan du feuillet moyen, en les rapportant aussi à l'unité de longueur primitive des sections, et désignant les deux qui sont perpendiculaires aux bandes (*couples de flexion*) par ν_x, ν_y, les deux qui sont à peu près parallèles aux bandes (dits *couples de torsion*), et qui ne diffèrent pas sensiblement l'un de l'autre, par τ, on aura, sauf erreurs négligeables,

$$\nu_x = C''\frac{h^3}{12}n_1,\quad \nu_y = C''\frac{h^3}{12}n_2,\quad \tau = C''\frac{h^3}{12}t_3,$$

c'est-à-dire, à cause des valeurs (52) de n_1, n_2, t_3,

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} \nu_x &= \frac{C''h^3}{12}\left(\beta\frac{d^2w_0}{dx^2} + \beta'\frac{d^2w_0}{dy^2} + 2\beta''\frac{d^2w_0}{dx\,dy}\right),\\ \nu_y &= \frac{C''h^3}{12}\left(\beta_1\frac{d^2w_0}{dx^2} + \beta'_1\frac{d^2w_0}{dy^2} + 2\beta''_1\frac{d^2w_0}{dx\,dy}\right),\\ \tau &= \frac{C''h^3}{12}\left(\gamma\frac{d^2w_0}{dx^2} + \gamma'\frac{d^2w_0}{dy^2} + 2\gamma''\frac{d^2w_0}{dx\,dy}\right). \end{aligned}\right.$$

Enfin, nous désignerons par

$$Z_x,\ Z_y$$

les composantes respectives, suivant la normale au feuillet moyen ou à fort peu près suivant les z, des actions totales exercées par unité de longueur sur la section perpendiculaire aux x et sur la section perpendiculaire aux y. Ces composantes (appelées *efforts tranchants*), nulles à une première approximation ou dans le cas limite d'une égale répartition des pressions en tous les points d'un même feuillet, deviennent sensibles à une seconde approximation.

Les déformations ∂_x^0, ∂_y^0, g_{xy}^0, qui paraissent dans les expressions (54) de $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{T}$, sont celles que le feuillet moyen a éprouvées suivant les sens parallèles à son plan tangent, à l'endroit considéré. Les dérivées $\frac{d^2 w_0}{dx^2}, \frac{d^2 w_0}{dy^2}, \frac{d^2 w_0}{dx\,dy}$, dont dépendent les valeurs (55) des couples ν_x, ν_y, τ, caractérisent parfaitement les courbures prises au même endroit par une surface matérielle primitivement plane et tangente au feuillet moyen, courbures représentant elles-mêmes les modifications éprouvées par celles du feuillet moyen. Si l'on parvient à calculer les déplacements, dans l'espace, des divers points de ce feuillet, on pourra connaître, en chaque endroit ou pour chaque tronçon, les quantités $\partial_x^0, \partial_y^0, g_{xy}^0, \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \frac{d^2 w_0}{dy^2}, \frac{d^2 w_0}{dx\,dy}$, et puis y évaluer les déformations éprouvées par la matière, au moyen des formules approchées (49) et de celles qui donnent $g_{xz}, g_{yz}, \partial_z$ en fonction de $\partial_x, \partial_y, g_{xy}$.

23. Voyons actuellement comment s'obtiendront les équations indéfinies d'équilibre de la plaque. Il suffira de considérer, à cet effet, un filet de matière compris entre quatre sections infiniment voisines, primitivement normales deux à deux et au feuillet moyen, puis d'appliquer à ce filet infiniment petit les principes des quantités de mouvement par rapport à trois axes rectangulaires, et celui des moments par rapport aux intersections du feuillet moyen par deux faces contiguës du filet. On aura ainsi, entre $\mathfrak{N}_x, \mathfrak{N}_y, \mathfrak{E}, \nu_x, \nu_y, \tau, Z_x, Z_y$, ou leurs dérivées dans des sens parallèles au feuillet moyen, cinq équations, que l'élimination de Z_x, Z_y ramènera à trois : or il faut précisément trois équations indéfinies pour déterminer les composantes, suivant trois axes, des déplacements des divers points du feuillet moyen.

Bornons-nous au cas d'une plaque primitivement plane, peu déformée, et supposons qu'on ait pris pour plan *général* des xy le feuillet moyen dans sa position primitive. Nous construirons, à partir du point quelconque du feuillet moyen dont les coordonnées primitives sont x, y et que *caractériseront* ces coordonnées, un filet de matière qui ait, dans son état primitif, pour hauteur l'épaisseur h de la plaque et pour section normale un élément rectangulaire, $dx\,dy$, du feuillet moyen, à côtés infiniment petits, dx, dy, respectivement parallèles aux x et aux y. J'appellerai : ρ la densité moyenne primitive de ce filet de matière, ou $\rho h\,dx\,dy$ sa masse, et $\rho h X\,dx\,dy$, $\rho h Y\,dx\,dy$, $\rho h Z\,dx\,dy$ les composantes totales, suivant les trois axes fixes rectangulaires ox, oy, oz, des actions extérieures qu'il supporte.

On sait que les deux éléments rectilignes du feuillet moyen, primitivement égaux à dx, dy, qui partent du point matériel (x, y), auront pour projections sur les axes, après de petits déplacements u_0, v_0, w_0, le premier, $\left(1+\frac{du_0}{dx}\right)dx$, $\frac{dv_0}{dx}dx$, $\frac{dw_0}{dx}dx$; le second, $\frac{du_0}{dy}dy$, $\left(1+\frac{dv_0}{dy}\right)dy$, $\frac{dw_0}{dy}dy$. En divisant respectivement ces projections par les racines carrées de la somme de leurs carrés, on trouve que les cosinus des angles que font avec les axes ces éléments rectilignes, après les déformations, valent sensiblement 1, $\frac{dv_0}{dx}$, $\frac{dw_0}{dx}$ pour le premier; $\frac{du_0}{dy}$, 1, $\frac{dw_0}{dy}$ pour le second. Par suite, les cosinus des angles faits avec les axes par la normale au feuillet moyen seront $-\frac{dw_0}{dx}$, $-\frac{dw_0}{dy}$, 1. Tels sont les neuf cosinus par lesquels il faudra multiplier les forces respectives $-\mathfrak{N}_x\,dy$, $-\mathfrak{T}\,dy$, $-Z_x\,dy$, appliquées à la première face $h\,dy$ du filet, et les forces analogues, valant sensiblement $-\mathfrak{T}\,dx$, $-\mathfrak{N}_y\,dx$, $-Z_y\,dx$, qui sont appliquées à la première face $h\,dx$, pour avoir leurs composantes sur les trois axes ox, oy, oz. Les composantes appliquées aux faces opposées auront des expressions pareilles, mais changées de signe et augmentées respectivement de leurs différentielles par rapport à x ou par rapport à y. En négligeant devant les dérivées $\frac{d(\mathfrak{N}_x, \mathfrak{N}_y, \mathfrak{T})}{d(x, y)}$ les produits, par les petits cosinus $\frac{dv_0}{dx}$, $\frac{dw_0}{dx}$, ... ou plutôt par leurs dérivées, soit des forces mêmes $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{T}$, qui sont de l'ordre des petites déformations ∂_x^0, ∂_y^0, g_{xy}^0, soit surtout des forces encore plus petites Z_x, Z_y (numéro précédent), il vient pour composantes totales, suivant les x, les y et les z, des pressions appliquées aux quatre faces du filet considéré de matière,

$$\left(\frac{d\mathfrak{N}_x}{dx}+\frac{d\mathfrak{T}}{dy}\right)dx\,dy, \quad \left(\frac{d\mathfrak{T}}{dx}+\frac{d\mathfrak{N}_y}{dy}\right)dx\,dy,$$

$$\left[\frac{d}{dx}\left(Z_x+\mathfrak{N}_x\frac{dw_0}{dx}+\mathfrak{T}\frac{dw_0}{dy}\right)+\frac{d}{dy}\left(Z_y+\mathfrak{T}\frac{dw_0}{dx}+\mathfrak{N}_y\frac{dw_0}{dy}\right)\right]dx\,dy.$$

Égalons à zéro les sommes respectives de ces expressions et des composantes $\rho h X\, dx\, dy$, $\rho h Y\, dx\, dy$, $\rho h Z\, dx\, dy$ de l'action extérieure; puis divisons les résultats par $dx\, dy$. Il viendra

$$(56)\qquad \frac{d\mathfrak{N}_x}{dx}+\frac{d\mathfrak{T}}{dy}+\rho h X=0,\quad \frac{d\mathfrak{T}}{dx}+\frac{d\mathfrak{N}_y}{dy}+\rho h Y=0;$$

$$(57)\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{dZ_x}{dx}+\frac{dZ_y}{dy}\right)+\left(\mathfrak{N}_x\frac{d^2w_0}{dx^2}+2\mathfrak{T}\frac{d^2w_0}{dx\,dy}+\mathfrak{N}_y\frac{d^2w_0}{dy^2}\right)\\&\qquad+\frac{dw_0}{dx}\left(\frac{d\mathfrak{N}_x}{dx}+\frac{d\mathfrak{T}}{dy}\right)+\frac{dw_0}{dy}\left(\frac{d\mathfrak{T}}{dx}+\frac{d\mathfrak{N}_y}{dy}\right)+\rho h Z=0.\end{aligned}\right.$$

Les deux équations (56), dans lesquelles on portera les valeurs (54) de $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{T}$ en fonction de ∂_x^0, ∂_y^0, g_{xy}^0, c'est-à-dire en fonction de $\frac{du_0}{dx}$, $\frac{dv_0}{dy}$, $\frac{du_0}{dy}+\frac{dv_0}{dx}$, régissent l'équilibre d'*extension* ou de *contraction* de la plaque : elles serviront à calculer les déplacements u_0, v_0 éprouvés par le feuillet moyen dans les sens des coordonnées x, y parallèles à son plan primitif.

Quant à l'équation (57), on peut y remplacer $\frac{d\mathfrak{N}_x}{dx}+\frac{d\mathfrak{T}}{dy}$, $\frac{d\mathfrak{T}}{dx}+\frac{d\mathfrak{N}_y}{dy}$ par les valeurs $-\rho h X$, $-\rho h Y$ tirées de (56), puis observer que la somme $\rho h\left(Z - X\frac{dw_0}{dx} - Y\frac{dw_0}{dy}\right)$, qui y paraît alors et qui représente la projection totale, sur la normale au feuillet moyen, de l'action extérieure rapportée à l'unité de surface de celui-ci, peut être généralement confondue avec $\rho h Z$. Cette équation devient donc

$$(58)\quad \left(\frac{dZ_x}{dx}+\frac{dZ_y}{dy}\right)+\left(\mathfrak{N}_x\frac{d^2w_0}{dx^2}+2\mathfrak{T}\frac{d^2w_0}{dx\,dy}+\mathfrak{N}_y\frac{d^2w_0}{dy^2}\right)+\rho h Z=0.$$

24. Il reste, pour déterminer Z_x, Z_y, à appliquer aux forces qui sollicitent le filet considéré $h\,dx\,dy$ le principe des moments par rapport aux deux éléments rectilignes, émanés du point matériel (x, y), qui étaient primitivement dx, dy.

Les actions extérieures, exercées sur le filet, n'auront que leurs composantes parallèles au feuillet moyen, dont les bras de levier soient sensibles, et ces composantes, en tout de l'ordre du produit $dx\, dy$, ne donneront même que des moments totaux négligeables si elles se trouvent distribuées à peu près pareillement de part et d'autre du feuillet moyen. En outre, les composantes $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$, tangentes à ce feuillet, des forces appliquées aux quatre faces du filet, n'auront que des moments négligeables, vu que leur résultante, pour chaque face, sera de l'ordre de dx ou de dy, et passera à des distances infiniment petites du second ordre, sinon même nulles, des éléments matériels dy ou dx par rapport auxquels se prennent les moments. Seules, les forces $-Z_x dy$, $-Z_y dx$, $\left(Z_x + \frac{dZ_x}{dx} dx\right) dy$, $\left(Z_y + \frac{dZ_y}{dy} dy\right) dx$, dont les bras de levier autour de dy et dx vaudront, à fort peu près, o et $\frac{dy}{2}$ pour la première, $\frac{dx}{2}$ et o pour la seconde, dx et $\frac{dy}{2}$ pour la troisième, $\frac{dx}{2}$ et dy pour la quatrième, donneront des moments de l'ordre du produit $dx\,dy$: ces moments égaleront en tout $Z_x dx\,dy$ par rapport à dy, $Z_y\, dx\,dy$ par rapport à dx. Il faudra y joindre la somme des moments, par rapport à dy ou à dx, des huit couples appliqués aux quatre faces du filet, et dont quatre,

$$-\nu_x dy, \quad \left(\nu_x + \frac{d\nu_x}{dx} dx\right) dy, \quad -\tau dx, \quad \left(\tau + \frac{d\tau}{dy} dy\right) dx,$$

sont sensiblement perpendiculaires à dy, les quatre autres,

$$-\tau dy, \quad \left(\tau + \frac{d\tau}{dx} dx\right) dy, \quad -\nu_y dx, \quad \left(\nu_y + \frac{d\nu_y}{dy} dy\right) dx,$$

sensiblement perpendiculaires à dx.

Ces huit couples peuvent être simplement ajoutés deux à deux, algébriquement, sauf erreurs négligeables. En effet, les deux couples $-\nu_x dy$, $\left(\nu_x + \frac{d\nu_x}{dx} dx\right) dy$, par exemple, sont perpendiculaires, le premier, à une droite dont les angles avec les axes ont pour cosinus $\frac{du_0}{dy}$, 1, $\frac{dw_0}{dy}$, le second, à une droite dont les angles avec les axes ont les mêmes cosinus augmentés de leurs différentielles en x. L'angle de ces deux droites est donc de l'ordre du produit de dx par les petites dérivées en x de $\frac{du_0}{dy}$, $\frac{dw_0}{dy}$; et le couple $\left(\nu_x + \frac{d\nu_x}{dx} dx\right) dy$ peut être décomposé en deux, l'un, normal à la même droite que le couple

$-\nu_x dy$ et égal au produit de $\left(\nu_x + \frac{d\nu_x}{dx}dx\right)dy$ par le cosinus de ce petit angle, cosinus évidemment réductible à l'unité sauf erreur de l'ordre de dx^2, l'autre normal à une droite perpendiculaire et égal au produit de $\left(\nu_x + \frac{d\nu_x}{dx}dx\right)dy$ par le cosinus de l'angle complémentaire ou par le petit sinus de l'angle considéré. Le premier de ces couples, ajouté à $-\nu_x dy$, donnera simplement $\frac{d\nu_x}{dx}dx\,dy$; le second, étant de l'ordre du produit de $\nu_x\,dy\,dx$ par les petites dérivées en x de $\frac{du_0}{dy}$, $\frac{dv_0}{dy}$, sera négligeable en comparaison de couples tels que $\frac{d(\nu_y, \tau)}{d(y,x)}dy\,dx$, à côté desquels on aurait à le compter. Les huit couples pourront ainsi se réduire à quatre, dont deux, normaux à dy, vaudront en tout, sensiblement, $\left(\frac{d\nu_x}{dx} + \frac{d\tau}{dy}\right)dx\,dy$, et dont les deux autres, normaux à dx, vaudront de même $\left(\frac{d\tau}{dx} + \frac{d\nu_y}{dy}\right)dx\,dy$. Chacun de ces deux couples totaux ne donnera pas d'ailleurs de moment appréciable par rapport à l'axe auquel il est à fort peu près parallèle.

En résumé, le principe des moments conduit à annuler les deux sommes

$$\left(Z_x + \frac{d\nu_x}{dx} + \frac{d\tau}{dy}\right)dx\,dy, \quad \left(Z_y + \frac{d\tau}{dx} + \frac{d\nu_y}{dy}\right)dx\,dy,$$

ou à poser

$$(59) \qquad Z_x = -\left(\frac{d\nu_x}{dx} + \frac{d\tau}{dy}\right), \quad Z_y = -\left(\frac{d\tau}{dx} + \frac{d\nu_y}{dy}\right).$$

Ces valeurs de Z_x, Z_y, portées dans (58), donnent enfin la troisième équation indéfinie de l'équilibre, celle qui régit la *flexion* de la plaque :

$$(60) \qquad \left\{ \begin{aligned} & -\left(\frac{d^2\nu_x}{dx^2} + 2\frac{d^2\tau}{dx\,dy} + \frac{d^2\nu_y}{dy^2}\right) \\ & + \left(\mathfrak{N}_x \frac{d^2w_0}{dx^2} + 2\mathfrak{T}\frac{d^2w_0}{dx\,dy} + \mathfrak{N}_y\frac{d^2w_0}{dy^2}\right) + \rho h Z = 0. \end{aligned} \right.$$

Il ne reste plus qu'à y substituer aux couples ν_x, ν_y, τ leurs expressions (55) en fonction des courbures prises par le feuillet moyen.

25. Les termes non linéaires de (60), c'est-à-dire ceux qui contiennent les produits de $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{T}$ par les dérivées secondes de w_0, sont insensibles pour une plaque simplement fléchie, sans extension ni compression dans les sens parallèles à son plan, et même pour une plaque d'une certaine épaisseur soumise à des tensions ou compressions. Mais ils deviennent très-sensibles, ou même prédominants, quand la plaque n'a qu'une épaisseur h fort petite et que les couples ν_x, ν_y, τ, comparables à h^3 d'après (55), deviennent comme des infiniment petits d'ordre supérieur devant les tensions $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{T}$ qui, d'après (54), sont de l'ordre de h. Alors la plaque ne résiste presque à la flexion qu'en vertu des tensions qu'elle supporte, et elle prend le nom de *membrane*.

On peut voir, dans mon Mémoire *Sur les plaques,* de 1871, comment les trois équations ordinaires de l'équilibre d'un élément de volume, multipliées par dz et intégrées à partir de la base inférieure de la plaque, font connaître, soit les petites composantes transversales T_3, T_2, négligées à une première approximation, des pressions exercées sur les éléments plans de deux sections normales aux x et aux y, pressions dont l'analyse ci-dessus donne seulement les résultantes (*efforts tranchants*) Z_x, Z_y, soit même la très-petite composante normale N_3 de la pression supportée par les feuillets de la plaque. Il est à remarquer que la théorie générale des plaques présente à cet égard bien moins de complication que celle des tiges. Cela tient à ce que des difficultés d'intégration qu'on ne pouvait s'empêcher d'aborder dans la théorie des tiges, et qu'on a résolues en effet (pour le cas où la contexture est symétrique par rapport aux sections normales) quand on a trouvé aux équations (13) les intégrales (18), ont pu être évitées dans la théorie générale des plaques. Mais aussi les équations (56), (60), qui restent à intégrer dans ce dernier cas, présenteront des difficultés autrement grandes que les équations (34) et (36) relatives aux tiges.

Je renverrai également au Mémoire de 1871 pour tout ce qui concerne l'établissement des conditions spéciales au contour des plaques. Je n'y ai fait usage que d'un principe universellement admis, et dont M. de Saint-Venant a montré à plusieurs reprises l'importance. Ce principe peut s'énoncer ainsi : *Des forces extérieures qui se font équi-*

libre sur un solide élastique, et dont les points d'application se trouvent tous compris à l'intérieur d'une sphère donnée, ne produisent que des déformations insensibles à des distances de cette sphère qui sont d'une certaine grandeur par rapport à son rayon. Il répugnerait, en effet, que l'influence statique de certaines actions, confinées *toutes* dans une région déterminée, pût se faire sentir avec une intensité notable jusqu'à des distances quelconques de cette région. Par suite, et à cause du principe de la superposition des petits effets, qui s'étend aux solides élastiques peu déformés, le mode effectif d'équilibre d'une plaque ne sera changé que d'une manière insignifiante, si l'on applique à une petite portion de son contour un système de forces, comparables individuellement à celles que supporte déjà cette portion de contour, mais se faisant mutuellement équilibre. Les nouvelles déformations dues à ces forces n'auront de valeurs sensibles que dans le voisinage de la région d'application : au delà, elles disparaîtront devant celles qui proviennent des forces primitivement appliquées à la même région. Si l'on introduit pareillement, sur toutes les petites portions du contour, des systèmes de forces se faisant équilibre, les déformations totales qui en résulteront seront négligeables en comparaison des déformations antérieures dues à l'ensemble des forces que supportait déjà la plaque, abstraction faite toutefois d'une zone de peu de largeur, contiguë au contour. En d'autres termes, on a le droit de remplacer les vraies actions extérieures, exercées sur le cylindre contournant, par d'autres distribuées comme on voudra, pourvu qu'elles équivaillent statiquement aux premières sur toute partie du cylindre très-petite en tous sens. J'ai montré que les actions extérieures dont il s'agit, pour chaque portion du cylindre contournant comprise entre deux génératrices voisines, sont ainsi réductibles à une force s'exerçant sur le feuillet moyen et à un couple normal au contour du même feuillet (couple de *flexion*). A l'inverse, quelles que soient les valeurs totales de cette force et de ce couple, on peut statiquement les décomposer en actions élémentaires, réparties sur le cylindre contournant de telle sorte que les modes simples ou réguliers de déformation qui s'observent à une certaine distance des bords se continuent jusqu'aux bords mêmes : et c'est ce que l'on suppose toujours, pour plus de simplicité.

Il est vrai que cette manière de procéder revient, comme dans la théorie des tiges, à ne pas tenir compte des déformations très-complexes qui se produisent aux extrémités des corps allongés ou aplatis, là où l'état de la matière varie aussi rapidement dans les sens des grandes dimensions que dans ceux des petites. Mais le calcul général de ces déformations ou *perturbations locales* n'est pas actuellement abordable à l'analyse, et, d'ailleurs, il y aurait toujours lieu d'en faire d'abord abstraction pour ne s'occuper que du phénomène d'ensemble, bien plus simple. En toute rigueur, les vraies relations spéciales au contour d'une plaque *dont on suppose les bases libres* consisteraient, pour chaque point d'une génératrice du cylindre contournant, à égaler les trois composantes de la pression exercée du dedans sur ce cylindre à trois fonctions arbitraires de la coordonnée transversale z, qui exprimeraient les trois composantes analogues de la pression extérieure. On aurait donc une infinité de conditions se rapportant à une même bande du cylindre contournant. Seulement, pour le but que l'on se propose, toutes ces relations sont insignifiantes, en tant qu'elles servent à régler les perturbations locales, et il suffit d'extraire de leur ensemble, comme on a pu le faire grâce au principe énoncé, les conditions strictement nécessaires et suffisantes pour déterminer les *vraies* déformations générales produites [*].

[*] Depuis que la rédaction de ce Mémoire est terminée, j'ai reconnu que MM. Thomson et Tait avaient, quatre ans avant moi, dans leur beau *Traité de philosophie naturelle* (1867, nos 645 à 648), envisagé la question des conditions spéciales au contour des plaques exactement comme je l'ai fait en 1871. Ils ont en outre, aux nos 724 à 729 du même Traité, donné sous leur forme approchée des termes qui expriment les plus simples des perturbations locales et qui justifient analytiquement, comme le font voir les illustres professeurs écossais, la réduction des couples de torsion à des efforts tranchants, que Poisson n'avait pas aperçue. Ces mêmes termes, retrouvés en 1877 par M. Maurice Levy, mais seulement sous une forme plus générale et plus complexe qui n'en montrait pas le vrai sens, ont été l'occasion d'une polémique engagée d'abord par lui au *Journal de Mathématiques* (juillet 1877), puis continuée dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (17 et 31 décembre 1877; 14 janvier, 4 et 18 février 1878), et qui, je l'espère du moins, n'aura pas été inutile pour l'éclaircissement de cette question délicate.