JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Étude des solutions simples des équations aux différences partielles de la Physique mathématique

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 5-20.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Étude des solutions simples des équations aux différences partielles de la Physique mathématique;

Par M. Émile Mathieu.

Dans toutes les questions de mouvements vibratoires ou de mouvements de la chaleur dans un corps de forme donnée, on commence par chercher une solution dite *simple*, qui ne dépend du temps t que par un facteur qui est le sinus d'un arc qui varie proportionnellement au temps, ou par un facteur qui renferme le temps en exposant. Cette solution simple satisfait non-seulement à une équation aux différences partielles, mais encore à certaines *conditions aux limites*. La solution la plus générale est la somme d'un nombre infini de ces solutions simples.

Mais, bien que l'on ait calculé pour différents problèmes cette solution simple, on n'en a jamais donné jusqu'ici une définition mathématique qui convienne à tous les cas. Nous nous proposons d'examiner cette question dans ce Mémoire et nous donnerons aussi quelques propriétés de cette solution.

Sur la représentation de la solution de l'équation $\Delta v = -a^2 v$.

1. Posons

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = \Delta u;$$

l'équation qui détermine le mouvement de la température u dans un corps solide homogène renfermé sous la surface σ est

$$\frac{du}{dt} = c^2 \Delta u,$$

et, en désignant par dn l'élément de normale à la surface mené extérieurement, on aura sur cette surface

$$u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dn} + bu = 0,$$

suivant que la surface sera entretenue à une même température que l'on prend pour zéro ou rayonnera dans l'espace où il se trouve. Pour avoir une solution simple, nous devons poser

$$u = e^{-a^2c^2t} v;$$

nous obtiendrons

$$\Delta v = -a^2 v,$$

et v devra aussi satisfaire, sur la surface σ, à l'équation

$$v = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dn} + bv = 0.$$

J'ai démontré dans ce Journal (*Mémoire sur l'intégration des équations de la Physique mathématique*, t. XVII, 1872) que toute fonction v qui satisfait, dans l'espace renfermé sous une surface σ, à l'équation

$$\Delta v = -a^2 v, \tag{1}$$

et qui y est finie et continue ainsi que ses premières dérivées, peut toujours se mettre sous la forme

$$(2) \qquad v = \int \frac{\cos ar}{r} \rho \, d\sigma,$$

ρ étant une quantité déterminée en chaque point de σ, r la distance entre le point (x, y, z) et l'élément $d\sigma$, et l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\sigma$ de la surface.

Imaginons une couche infiniment mince distribuée sur σ et dont la densité soit ρ en chaque point ; concevons de plus que l'élément de cette couche exerce à la distance r une attraction proportionnelle à la fonction $\frac{\cos ar + ar \sin ar}{r^2}$. Alors v donnera, par ses dérivées par rapport à x, y, z, les composantes de l'accélération du point (x, y, z) provenant de l'attraction de la couche, et il pourra être appelé pour abréger le potentiel de cette couche.

2. Si l'on cherche la densité d'une couche distribuée sur σ et dont le potentiel est donné à l'intérieur et à l'extérieur de la surface σ, on trouve, en raisonnant comme pour le potentiel ordinaire, que cette densité ne peut avoir qu'une valeur et qu'elle est fournie par la formule

$$(3) \qquad \rho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dv}{dn'} + \frac{dv}{dn}\right),$$

dn' et dn étant des éléments de normale menés respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de la surface.

Examinons le cas particulier où la fonction v est nulle sur σ. On a (Mémoire cité, n° **13**)

$$0 = -\int v \frac{d\frac{\cos ar}{r}}{dn'} d\sigma + \int \frac{\cos ar}{r} \frac{dv}{dn'} d\sigma + 4\pi v,$$

et, puisque v est nul sur σ, on a

$$v = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\cos ar}{r} \frac{dv}{dn'} d\sigma.$$

Donc v est le potentiel d'une couche dont la densité a pour valeur

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{dv}{dn'}.$$

On a donc ce théorème :

Si la fonction v est nulle sur la surface σ, elle est le potentiel d'une couche distribuée sur cette surface et dont la densité est égale à $-\frac{1}{4\pi}\frac{dv}{dn'}$.

Comme la densité de la couche est aussi donnée par la formule (3), il en résulte $\frac{dv}{dn} = 0$; v sera donc nul en tous les points d'une surface σ' infiniment voisine de σ et extérieure à σ; on peut raisonner sur σ' comme sur σ, et l'on reconnaît facilement que v est nul en tous les points extérieurs. La formule qui donnera la solution simple pourra cependant ne pas être nulle à l'extérieur de σ, car l'expression (2) ne doit servir de facteur à la solution simple que dans l'intérieur de σ.

3. Dans le mouvement vibratoire d'une membrane, le déplacement normal de chaque point est donné par la formule

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right),$$

et u est nul sur le contour s de la membrane. Pour avoir une solution simple, on pose

$$u = (\mathrm{A}\sin act + \mathrm{B}\cos act)v,$$

et l'on a

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = -a^2v, \tag{4}$$

v s'annulant sur le contour.

Nous avons vu (Mémoire cité, n° 14) que la solution de l'équation (4), assujettie à être finie et continue en même temps que ses dérivées du premier ordre, peut se mettre sous la forme

$$v = \int \mathrm{N}\rho\, ds \quad \text{avec} \quad \mathrm{N} = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega,$$

ρ étant une quantité donnée en chaque point de s, r la distance entre le point (x, y) et l'élément ds du contour, et l'intégrale étant étendue à tout ce contour.

On verrait comme ci-dessus que, si la fonction v s'annule sur le contour, ρ est donné par la formule

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\frac{dv}{dn'}.$$

Sur la solution de l'équation $\Delta v = a^2 v$.

4. Soient u, v deux fonctions qui sont continues, ainsi que leurs premières dérivées, dans l'intérieur d'un volume ϖ limité par une surface σ. On a, d'après un théorème connu,

$$\text{(A)} \qquad \int\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dv}{dz}\right) d\varpi = -\int u\,\Delta v\,d\varpi - \int u\frac{dv}{dn'}\,d\sigma,$$

les deux premières intégrales s'étendant à tout le volume ϖ et la troisième à toute la surface σ.

Si u est égal à v et que v satisfasse à l'équation

$$(a) \qquad \Delta v = a^2 v,$$

si de plus v ou $\frac{dv}{dn'}$ est nul à la surface, on obtient

$$\int\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + a^2 v^2\right] d\varpi = 0.$$

On en conclut que v est nul dans tous les points du volume ϖ. Donc aussi, si une fonction v, assujettie aux conditions de continuité, satisfait à l'équation (a) dans tout le volume ϖ et qu'on connaisse sa valeur ou celle de $\frac{dv}{dn'}$ sur la surface, cette fonction est complétement déterminée.

Car, si l'on suppose que deux fonctions satisfassent à ces conditions, leur différence F ou $\frac{dF}{dn'}$ sera nulle à la surface, et, d'après ce qui précède, F sera nul dans tous les points intérieurs à σ.

5. Je dis maintenant qu'on peut toujours trouver une telle fonction v, si sa valeur est connue en chaque point de la surface σ.

Posons, en général,

$$(\mathrm{D}u)^2 = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2,$$

et désignons par u une fonction de x, y, z qui est continue, ainsi que ses premières dérivées, dans l'intérieur de σ et dont la valeur est donnée sur σ. Il est aisé de voir que $\int[(\mathrm{D}u)^2 + a^2u^2]\,d\varpi$ est susceptible d'un minimum; supposons que ce minimum ait lieu pour $u = v$, et imitons une démonstration de Dirichlet. Posons

$$u = v + hv,$$

h étant une constante et v une certaine fonction. Nous pouvons mettre $\int[(\mathrm{D}u)^2 + a^2u^2]\,d\varpi$ sous cette forme

$$\int[(\mathrm{D}v)^2 + a^2v^2]\,d\varpi - 2h\int v\frac{dv}{dn'}\,d\sigma - 2h\int v(\Delta v - a^2v)\,d\varpi$$
$$+ h^2\int[(\mathrm{D}v)^2 + a^2v^2]\,d\varpi,$$

en nous servant de l'équation (A).

Le second terme de cette expression est nul, parce que v est nul sur σ d'après l'hypothèse, et, pour qu'il y ait minimum pour $u = v$, il faut que le troisième terme qui change de signe avec h soit nul, quel que soit v; il faut donc, pour le minimum cherché, que l'on ait

$$\Delta v = a^2 v$$

pour tous les points situés à l'intérieur de σ.

De ce qui précède on tire les conclusions suivantes :

1° *Toute fonction qui satisfait, dans l'intérieur d'une surface σ, à l'équation*

$$\Delta v = a^2 v,$$

et qui y est continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, a pour *expression*

$$v = \int \frac{\cos(ar\sqrt{-1})}{r} \rho\, d\sigma, \tag{B}$$

r étant la distance du point (x, y, z) à $d\sigma$ et ρ une fonction arbitraire des coordonnées de σ.

2° *On peut toujours disposer de la fonction ρ et d'une seule manière, de telle sorte que v ait une valeur donnée en chaque point de σ.*

Application de ce qui précède à la fonction $\int \frac{\cos ar}{r} \rho\, d\sigma$.

6. Si l'on change a^2 en $-a^2$ dans le raisonnement des n^{os} 4, 5, ils cessent d'être exacts ; car on ne peut plus dire que $\int[(\mathrm{D}u)^2 - a^2u^2]\,d\varpi$ soit susceptible d'un minimum, ni que u s'annule, si cette intégrale est nulle. Toutefois, la conclusion obtenue pour la fonction (B) doit avoir lieu en général pour la fonction

$$\int \frac{\cos ar}{r} \rho\, d\sigma, \tag{C}$$

qui s'en déduit par le changement de a^2 en $-a^2$.

En effet, la fonction ρ peut être développée en une série dont tous les coefficients constants sont arbitraires, et la formule (B) est développable aussi en une série dont les coefficients dépendront des premiers ; tous ces coefficients seront déterminés par la condition que la fonction (B) ait une valeur déterminée sur la surface σ.

Si dans le calcul précédent on change a en $a\sqrt{-1}$, les coefficients obtenus par ce changement resteront réels, et ils seront déterminés de manière que l'expression (C) ait une valeur donnée sur la surface σ.

Donc aussi on peut, en général, trouver une fonction de la forme (C) qui ait une valeur donnée en chaque point d'une surface σ. Il peut toutefois y avoir exception pour des valeurs particulières de a qui rendraient infini un des coefficients de la série qui représente la fonction (C).

Chacun des termes du développement de (C), dont les coefficients sont d'abord arbitraires, satisfait à l'équation

$$\Delta v = -a^2 v.$$

Si l'un de ces termes s'annule sur σ, son coefficient devient infini en général. Dans ce cas, le problème est donc impossible. Mais alors on peut résoudre un autre problème qui consiste à trouver une fonction (C) qui s'annule sur σ.

Tout ce que nous venons de dire de la fonction (C) peut être étendu à la fonction de x, y,

$$\text{(D)} \qquad v = \int N\rho\, ds,$$

où

$$N = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega.$$

Ainsi on peut, en général, trouver une telle fonction qui ait une valeur donnée en chaque point d'une courbe s. Il y a exception pour des valeurs particulières de a; et, pour ces valeurs de a, on peut choisir ρ, de manière que la fonction (D) s'annule sur le contour de la courbe s.

7. Il est bon d'élucider ce qui précède par un exemple.

Considérons la fonction (D) pour le cas où s représente le contour d'un cercle de rayon R_1, et prenons des coordonnées polaires R, α, dont l'origine est au centre du cercle. J'ai démontré (Mémoire cité, n° 21) que cette fonction peut se mettre sous la forme de la série suivante :

$$\begin{aligned} &C_0 Q_0(R, a) + (C_1\cos\alpha + D_1\sin\alpha)\,Q_1(R, a) + \ldots \\ &\quad + (C_n\cos n\alpha + D_n\sin n\alpha)\,Q_n(R, a) + \ldots, \end{aligned}$$

C_n, D_n étant des coefficients constants et $Q_n(R, a)$ la solution de l'équation

$$R^2\frac{d^2Q}{dR^2} + R\frac{dQ}{dR} + (a^2R^2 - n^2)\,Q = 0,$$

qui ne devient pas infinie pour $R = 0$.

On voit immédiatement qu'on pourra déterminer tous les coefficients, et d'une seule manière, de telle sorte que, sur le contour

$u = R_1$, v soit une fonction donnée arbitrairement $f(\alpha)$. Il y aura, toutefois, exception dans le cas où a est racine d'une des équations

$$(\mathrm{E})\quad Q_0(R_1, a) = 0, \quad Q_1(R_1, a) = 0, \quad \ldots, \quad Q_n(R_n, a) = 0, \quad \ldots.$$

Alors le problème est, en général, impossible; car, si, par exemple, l'équation $Q_n(R_1, a) = 0$ est satisfaite, les coefficients C_n, D_n deviennent infinis; ils sont cependant indéterminés si la fonction $f(\alpha)$ satisfait aux équations

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha = 0, \quad \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha = 0.$$

Si l'on veut, au contraire, que v soit nul sur le contour, tous les coefficients C_0, C_1, D_1, ... sont nuls en général; il y aura, toutefois, exception si a est racine d'une des équations (E), $Q_n(R_1, a) = 0$; car alors on aura aussi la solution

$$v = (C_n \cos n\alpha + D_n \sin n\alpha)\, Q_n(R, a).$$

Il est facile de faire la même recherche dans le cas où le contour s se compose, ou de deux cercles concentriques, ou d'un rectangle, ou d'une ellipse, ou de deux ellipses homofocales.

8. De ce qui précède on déduit le théorème suivant :

On peut, en général, déterminer une fonction et une seule qui satisfasse à l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = -a^2 v,$$

dans l'intérieur d'un contour s, qui y soit finie et continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, et qui ait en chaque point de ce contour une valeur variable et donnée arbitrairement. Il y a, toutefois, exception pour de certaines valeurs de a se suivant, les unes les autres, à des intervalles; et, pour ces valeurs de a, il existe une fonction v différente de zéro et satisfaisant à toutes les conditions précédentes, sauf qu'elle s'annule sur le contour, au lieu d'y être une fonction arbitraire. Cette fonction v, substituée dans la formule

$$(\mathrm{F})\qquad u = (A \sin act + B \cos act)\, v,$$

fournit une solution simple de l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right),$$

qui doit être satisfaite à l'intérieur de s, et à laquelle on adjoint la condition que v soit nul sur le contour s.

[En voulant étendre à un cylindre plein les considérations que j'avais obtenues pour un corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques (t. XIV de ce Journal, 1869, p. 81), j'ai obtenu un résultat inexact et en contradiction avec le théorème précédent.]

La formule (F) donne le mouvement vibratoire simple d'une membrane terminée au contour s, et le mouvement vibratoire le plus général est la somme d'une infinité de ces mouvements simples. Ces mouvements simples sont très-intéressants à étudier au point de vue de l'expérience; car, comme ils donnent des sons incommensurables entre eux, ils tendent à se produire séparément dans l'expérience, afin de donner lieu à un mouvement périodique.

9. On pourrait énoncer un théorème tout semblable au précédent et relatif à la fonction v, qui satisfait, dans l'intérieur d'une surface σ, à l'équation

$$\text{(G)} \qquad \Delta v = -a^2 v,$$

et, sur cette surface, à l'équation $v = 0$. Pour étudier le refroidissement d'un corps qui rayonne dans l'espace, il faudrait examiner les fonctions qui satisfont, dans l'intérieur de σ, à l'équation (G) et, sur cette surface, à l'équation

$$\frac{dv}{dn} + bv = 0,$$

dn étant l'élément de normale extérieure. Mais le théorème relatif à cette solution, et analogue au précédent, est encore plus difficile à démontrer rigoureusement.

Sur la solution de l'équation $\frac{d^2u}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right)$.

10. Considérons une fonction finie et continue, et dont les premières dérivées le sont aussi, qui satisfait dans l'intérieur d'un contour s à l'équation

$$(a) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = -a^2v,$$

et sur ce contour à la condition $v = 0$. Pour fixer mieux les idées, nous supposerons que cette solution donne le mouvement vibratoire simple d'une membrane fixée au contour s.

La fonction v peut se mettre sous la forme

$$v = \int N\rho\, ds \quad \text{avec} \quad N = \int_0^\pi \cos(ar\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega.$$

Or je dis que, la fonction v étant nulle sur s, si la densité ρ s'annule m fois sur ce contour, v s'annule m fois dans le voisinage de ce contour.

En effet, on a la formule

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\frac{dv}{dn'}$$

(nº 3). Donc, si ρ est nul en un point A du contour, on a aussi en ce point $\frac{dv}{dn'} = 0$. Ainsi l'accroissement de v suivant la normale est nul; donc v est nul en un point infiniment voisin du contour et situé sur la normale au point A. Il résulte aussi de là que les lignes nodales, qui forment le lieu des points où v est nul, couperont le contour normalement aux m points où la densité est nulle.

D'après cela, on peut classer les solutions simples d'après le nombre m de fois que ρ s'annule sur le contour; mais à chaque nombre m correspondront encore une infinité de valeurs de a, qui iront en croissant jusqu'à l'infini.

11. Nous supposerons que le contour soit formé d'une ou de deux courbes fermées qui ne se coupent pas elles-mêmes, ni entre elles. Aux deux coordonnées x, y on peut en substituer deux autres, α, β, telles que le contour soit représenté par une ou deux équations de la forme $\beta = \text{const.}$; α, β peuvent être supposées des coordonnées thermométriques. En effet, supposons d'abord que le contour soit composé de deux courbes; on peut imaginer entre les deux courbes un certain état d'équilibre de température, obtenu en maintenant tous les points de chaque courbe à une même température : il en résultera un système de lignes isothermes dont la température pourra être représentée par β.

Supposons ensuite que le contour ne renferme qu'un bord extérieur C; imaginons, tout le long de la courbe C, une source de chaleur qui la maintienne à une même température constante; supposons que, sous l'influence de cette source, tout le plan soit en équilibre de température : nous aurons à l'extérieur une série de lignes isothermes dont C fera partie; à l'intérieur de C, la température V sera constante. Nous pouvons former une courbe intérieure à C, et infiniment voisine, en élevant des normales intérieures dn' qui satisfassent à l'équation

$$V + \frac{dV}{dn} dn' = \text{const.} \quad \text{ou} \quad \frac{dV}{dn} dn' = \text{const.}$$

et en joignant les extrémités de ces normales. La distance normale, infiniment petite, des deux courbes sera en raison inverse du flux de chaleur qui traverse C, de l'intérieur vers l'extérieur. Cette courbe C' étant échauffée comme C, d'une manière uniforme, produirait les lignes isothermes précédentes. On peut imaginer de même des courbes intérieures infiniment voisines, C', C'', ...; et, en entretenant l'une d'elles à une même température, on obtiendra comme lignes isothermes toutes les lignes analogues à cette courbe, et qui lui sont extérieures. La limite de ces courbes sera une ligne non fermée et située à l'intérieur de C. En la maintenant à une même température, elle produirait des lignes isothermes qui couvriraient tout le plan, et dont nous désignerons encore la température par β.

Par exemple, si le contour est un cercle, la limite des courbes isothermes est un point; si le contour est une ellipse, cette limite est la droite qui joint ses foyers.

Nous avons prouvé, dans les deux cas étudiés, l'existence d'un et d'un seul système de lignes isothermes, dont font partie le bord ou les deux bords, et dont l'équation est $\beta = \text{const}$. Imaginons les trajectoires orthogonales de ces courbes; on sait qu'elles seront aussi des lignes isothermes. Soit α leur paramètre thermométrique; elles auront donc pour équation

$$\alpha = \text{const}.$$

En adoptant α, β pour coordonnées, l'équation (a) peut se mettre sous la forme

$$(b) \qquad \frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{d^2 v}{d\beta^2} = -\frac{a^2}{h^2} v,$$

en posant

$$h^2 = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2.$$

12. Nous supposerons, ce qui n'a pas toujours lieu, que α puisse être regardé comme variant d'une manière continue dans l'intérieur du contour.

Tous les raisonnements de mon *Cours de Physique mathématique* (nos **70**, **71**, **72**), relatifs aux lignes nodales d'une membrane elliptique, sont applicables à la membrane terminée par le contour actuel formé d'une ou de deux courbes.

Soit $v(\alpha, \beta, a, n)$ une solution de l'équation (b) assujettie à s'annuler sur le bord intérieur $\beta = b$, s'il en existe un, et n étant le nombre de fois que u s'annule dans le voisinage du bord extérieur $\beta = \text{B}$. On déterminera a par l'équation

$$v(\alpha, \text{B}, a, n) = 0;$$

soient

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s,\ \ldots$$

les racines de cette équation. Ces racines ne dépendent pas de α, mais elles varient avec B, et l'on peut poser

$$(c) \qquad a_s = f(\text{B});$$

ce qui prouve que la fonction v renferme, en facteur, une fonction de la forme $\varphi(a, \beta)$. Il résulte de ce que j'ai démontré (lieu cité) que, si l'on fait croître B à partir de zéro jusqu'à l'infini, a_s ira constamment en décroissant.

L'équation (c) équivaut à

$$v(\alpha, \mathrm{B}, a_s, n) = 0.$$

Quand B croît par degrés infiniment petits, a_s décroît par degrés infiniment petits en restant indépendant de α; donc, réciproquement, quand a_s va en croissant, B décroît en restant indépendant de α. Ainsi l'équation

$$v(\alpha, \beta, a_s, n) = 0$$

aura des racines en β, indépendantes de α,

$$\beta = \mathrm{B}_1, \quad \beta = \mathrm{B}_2, \quad \beta = \mathrm{B}_3, \quad \ldots,$$

et ces solutions donneront des lignes nodales qui coïncident avec des lignes isothermes. De plus, on peut démontrer (lieu cité, n° 72) qu'il y a dans l'intérieur de ce contour $s - 1$ de ces lignes nodales.

Mais il existe un second système de lignes nodales, et je dis que ce second système est rectangulaire sur le premier.

En effet, bien que la membrane soit limitée par le contour $\beta = \mathrm{B}$, on peut la concevoir comme terminée à une ligne nodale $\beta = \mathrm{B}_i$ dont tous les points sont fixes, et la théorie qui précède reste applicable à la partie restante de la membrane. Donc la ligne $\beta = \mathrm{B}_i$ est rencontrée à angle droit par les lignes nodales de l'autre système, d'après ce que j'ai démontré ci-dessus (n° **10**). Toutefois, ces lignes nodales ne se confondent pas en général avec des courbes $\alpha = \text{const.}$

On a donc le théorème suivant :

Supposons un mouvement vibratoire simple d'une membrane, donné par la formule

$$u = v(\alpha, \beta)(\mathrm{A}\sin act + \mathrm{B}\cos act),$$

où α, β sont des coordonnées thermométriques; v satisfait par consé-

quent à l'équation

$$\frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{d^2 v}{d\beta^2} = -\frac{a^2}{h^2} v;$$

supposons de plus que le bord extérieur et le bord intérieur, s'il y en a un, aient pour équation $\beta =$ const.; *enfin concevons encore que* α *varie d'une manière continue dans l'intérieur de la membrane. Alors les lignes nodales de la membrane se composeront de deux systèmes : l'un formé de lignes isothermes* β, *et l'autre de lignes rectangulaires sur les premières.*

13. Occupons-nous ensuite du mouvement vibratoire le plus général de la membrane, qui est la somme d'une infinité de mouvements vibratoires simples.

Désignons par n le nombre de fois que le bord extérieur est rencontré par les lignes nodales. Pour une valeur de n, a est susceptible d'une infinité de valeurs ; désignons-les par

$$a_{n,1},\ a_{n,2},\ \ldots,\ a_{n,m},\ \ldots,$$

dans l'ordre de grandeur croissante. Ces différentes valeurs de a pourront d'ailleurs correspondre soit à une seule, soit à deux ou plusieurs formes de la fonction u.

Pour former la solution générale, nous poserons la série double

$$\begin{aligned} u = & \sum_{k=0}^{k=\infty} (C_{0,k} \sin a_{0,k} ct + D_{0,k} \cos a_{0,k} ct)\, v_0(\alpha, \beta, a_{0,k}) + \ldots \\ & + \sum_{k=0}^{k=\infty} (C_{n,k} \sin a_{n,k} ct + D_{n,k} \cos a_{n,k} ct)\, v_n(\alpha, \beta, a_{n,k}) + \ldots, \end{aligned}$$

$C_{n,k}, D_{n,k}$ étant des coefficients constants. Pour les déterminer, supposons que, pour $t = 0$, le déplacement et la vitesse de chaque point de la membrane aient les valeurs suivantes :

$$u = f(\alpha, \beta), \quad \frac{du}{dt} = \varphi(\alpha, \beta);$$

nous aurons

$$f(\alpha, \beta) = \Sigma D_{0,k} v_0(\alpha, \beta, a_{0,k}) + \ldots + \Sigma D_{n,k} v_n(\alpha, \beta, a_{n,k}) + \ldots,$$
$$\frac{1}{c}\varphi(\alpha, \beta) = \Sigma C_{0,k} a_{0,k} v_0(\alpha, \beta, a_{0,k}) + \ldots + \Sigma C_{n,k} a_{n,k} v_n(\alpha, \beta, a_{n,k}) + \ldots.$$

Appuyons-nous sur l'égalité

$$\int\int v(\alpha, \beta, a)\, v(\alpha, \beta, a')\, dx\, dy = 0,$$

a, a' étant deux quelconques des quantités a, supposées différentes entre elles et l'intégrale s'étendant à toute la surface de la membrane. Multiplions les deux équations précédentes par $v_n(\alpha, \beta, a_{n,k})\, dx\, dy$ et intégrons sur toute la surface de la membrane. Nous obtiendrons

$$D_{n,k}\int\int v_n^2(\alpha, \beta, a_{n,k})\, dx\, dy = \int\int f(\alpha, \beta)\, v_n(\alpha, \beta, a_{n,k})\, dx\, dy,$$
$$c a_{n,k} C_{n,k}\int\int v_n^2(\alpha, \beta, a_{n,k})\, dx\, dy = \int\int \varphi(\alpha, \beta)\, v_n(\alpha, \beta, a_{n,k})\, dx\, dy.$$

Si n ou k sont très-grands, $v_n(\alpha, \beta, a_{n,k})$ s'annulera et changera de signe un grand nombre de fois dans l'intérieur du contour. Il en résulte que les intégrales des seconds membres sont très-petites et que celles des premiers membres ne le sont pas ; donc $C_{n,k}$, $D_{n,k}$ sont aussi très-petits.