JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Sur les problèmes des températures stationnaires, de la torsion et de l'écoulement bien continu, dans les cylindres ou les tuyaux dont la section normale est un rectangle à côtés courbes ou est comprise entre deux lignes fermées

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 6 (1880), p. 177-186.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__177_0>

Sur les problèmes des températures stationnaires, de la torsion et de l'écoulement bien continu, dans les cylindres ou les tuyaux dont la section normale est un rectangle à côtés courbes ou est comprise entre deux lignes fermées;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

1. Parmi les belles intégrations que Lamé a effectuées, dans des questions de Physique mathématique, au moyen de ses coordonnées curvilignes, la plus étendue, la seule même qui s'applique à des corps d'une infinité de formes différentes, échappant à toute équation finie particulière, est celle qui concerne le problème des températures stationnaires dans les cylindres qui ont pour section normale un rectangle à côtés courbes, et où la température est maintenue constante sur chaque génératrice, mais variable d'une manière quelconque d'une génératrice à l'autre. D'ailleurs, la méthode qu'il y suit s'étend aisément au cas où le contour ne comprend que deux courbes (alors fermées), au lieu de quatre, et à celui où, sur toute l'étendue de quelques-uns des côtés de la section, on se donne arbitrairement, au lieu de la température, le flux de chaleur, constant en chaque point, qui traverse la surface. Lamé montre que ce problème est toujours résoluble, à la seule condition qu'on sache effectuer l'intégration dans le cas simple où deux faces opposées du cylindre sont maintenues à deux températures uniformes sur toute leur étendue et où les deux autres faces (quand elles existent) sont supposées imperméables à la chaleur. En d'autres termes, l'intégration peut s'effectuer, pourvu que

l'on connaisse, dans le plan de la section, une famille de lignes isothermes dont fassent partie deux côtés opposés et qui, s'il s'agit d'un rectangle curviligne, coupent à angle droit les deux autres côtés.

Lamé traite ce problème, à deux coordonnées x, y, en partant de formules fort complexes, établies pour le cas général de trois coordonnées x, y, z, en sorte que les éléments de la solution doivent en être cherchés dans les Ire, IIe, IIIe et XIe de ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes*. M. Émile Mathieu a repris la même question aux Chapitres II et III de son *Cours de Physique mathématique;* il a examiné notamment les cas particuliers déjà étudiés dans les XIe, XIIe et XIIIe des *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, c'est-à-dire les cas des coordonnées elliptiques, bicirculaires et lemniscatiques, et il a éclairci certaines difficultés spéciales auxquelles est parfois sujette leur application, difficultés tenant à l'existence, dans le plan, de régions singulières ou extrêmes (telles que le pôle quand il s'agit de coordonnées polaires) où des discontinuités analytiques peuvent se produire parce qu'une des coordonnées employées cesse d'y être parfaitement déterminée. Mais il a, comme Lamé, déduit les équations dont il se sert de celles qui concernent le cas de trois coordonnées (auxquelles il arrive, il est vrai, par une voie plus rapide).

Je crois donc utile d'exposer ici directement, pour le lecteur étranger à la théorie des coordonnées curvilignes, les principes de la solution générale, déjà contenus sous une certaine forme dans le § CVII des *Leçons* de Lamé (p. 192), et dont MM. William Thomson et Tait ont su tirer un excellent parti au n° 707 de leur *Traité de Philosophie naturelle*. La question en vaut d'autant plus la peine, qu'elle ne concerne pas seulement les températures stationnaires dans des prismes de longueur indéfinie, mais qu'elle embrasse aussi les lois, autrement importantes, de la torsion des mêmes prismes et celles de l'écoulement uniforme bien continu d'un liquide dans des tuyaux droits dont l'intérieur aurait même section que ces prismes; c'est ce que j'ai montré aux §§ IX et X d'une *Etude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVI, 1871; premier Mémoire: *Des tiges*). Enfin, la même analyse donne encore la solution d'un quatrième problème assez intéressant, celui du mouvement que prend un liquide sans pesanteur, remplissant un cylindre solide creux auquel on imprime un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle aux génératrices, dans les cas où le frottement intérieur du fluide est négligeable et où les composantes de sa vitesse suivant les axes fixes des coordonnées égalent en chaque point les dérivées partielles correspondantes d'une même fonction φ. Cette question, étudiée en 1843 par M. Stokes, a été rappelée en 1867, dans les n^{os} **704** et **705** du *Traité de Philosophie naturelle*, par MM. Thomson et Tait, qui ont signalé ses rapports avec le problème de la torsion.

2. Il s'agit de former une fonction u de deux coordonnées rectangulaires x, y, qui satisfasse à l'équation indéfinie

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0, \tag{1}$$

dans toute la partie du plan des xy comprise entre deux courbes fermées données ou à l'intérieur d'un rectangle curviligne donné, et qui, sur chaque côté de ce contour, acquière en chaque point des valeurs arbitraires connues ou ait sa dérivée, dans un sens normal au contour, égale à des valeurs connues. On suppose la solution déjà trouvée, pour le cas simple où u se réduit à deux constantes sur deux côtés opposés du contour et où la dérivée de u, dans un sens normal au contour, est nulle tout le long des autres côtés (quand ils existent).

J'appellerai α cette expression particulière de u, fonction connue de x et y. Les courbes (dites *isothermes*) $\alpha=$ const. auront évidemment pour trajectoires orthogonales celles dont l'équation différentielle est $\frac{d\alpha}{dy}dx-\frac{d\alpha}{dx}dy=0$. Or le premier membre de cette équation est la différentielle exacte d'une certaine fonction β; car, α vérifiant la relation

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}=0, \tag{2}$$

la dérivée de $\frac{d\alpha}{dy}$ par rapport à y égale bien celle de $-\frac{d\alpha}{dx}$ par rapport à x. Donc, dans l'équation $\beta=$ const. des trajectoires orthogonales considérées, le paramètre β satisfait aux deux relations

$$(3) \qquad \frac{d\beta}{dx} = \frac{d\alpha}{dy}, \quad \frac{d\beta}{dy} = -\frac{d\alpha}{dx}.$$

D'ailleurs, si l'on ajoute ces deux relations après les avoir respectivement différentiées en x et en y, on trouve

$$(4) \qquad \frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d^2\beta}{dy^2} = 0;$$

ainsi les lignes $\beta = \text{const.}$ sont isothermes, β satisfaisant comme α à l'équation (1). Enfin, le troisième et le quatrième côté du contour (quand il s'agit d'un rectangle curviligne) coïncident avec deux de ces lignes, car ils coupent à angle droit toutes les courbes $\alpha = \text{const.}$, à cause de la condition que α y vérifie par hypothèse.

J'admettrai que les lignes de l'une quelconque des deux familles $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ *divisent l'espace considéré en bandes continues, sans s'y rencontrer nulle part.* Dans ces conditions, chacun des deux paramètres α, β croîtra sans cesse ou décroîtra sans cesse le long d'un chemin normal aux courbes qu'il caractérise.

Pour le démontrer, multiplions, par exemple, l'équation (2) par un élément $dx\,dy = d\sigma$ de l'aire du plan et intégrons le résultat dans toute l'étendue qu'entoure un contour fermé quelconque χ. Chaque terme sera intégrable, et, en appelant $\int_\chi$ une somme prise tout le long du contour, $d\chi$ un élément quelconque de ce contour, λ l'angle fait avec les x positifs par une normale infiniment petite dn menée à $d\chi$ vers le dehors, enfin $\frac{d}{dn}$ une dérivée prise le long de dn, il viendra

$$(5) \qquad \int_\chi \left(\frac{d\alpha}{dx}\cos\lambda + \frac{d\alpha}{dy}\sin\lambda\right) d\chi = 0, \quad \text{ou} \quad \int_\chi \frac{d\alpha}{dn}\, d\chi = 0.$$

Cela posé, prenons pour contour χ le rectangle curviligne que forment deux trajectoires très voisines menées orthogonalement aux courbes $\alpha = \text{const.}$ et des éléments correspondants $d\chi_1$, $d\chi_2$ de deux de ces dernières courbes; puis observons que la dérivée $\frac{d\alpha}{dn}$ s'annule tout le long des deux trajectoires. En désignant par dn_1 une normale à l'élément $d\chi_1$, tirée vers le dedans du rectangle (ou égale à $-dn$), et par dn_2 la normale à $d\chi_2$ menée vers le dehors, c'est-à-dire de même sens que dn_1 pour un observateur qui parcourrait une des deux trajectoires, l'équation (5) deviendra simplement

$$-\frac{d\alpha}{dn_1}d\chi_1+\frac{d\alpha}{dn_2}d\chi_2=0. \tag{6}$$

Donc les deux valeurs quelconques $\frac{d\alpha}{dn_1}$ et $\frac{d\alpha}{dn_2}$ de la dérivée de α ont le même signe, et α varie toujours dans un même sens le long d'un chemin normal aux courbes $\alpha=$ const. Une remarque analogue s'appliquerait au paramètre β.

Ainsi, la variable α croît graduellement, depuis une certaine valeur α_0 jusqu'à une autre valeur α_1, quand on traverse successivement toutes les courbes $\alpha=$ const. comprises dans l'espace que l'on considère. De même, le paramètre β croît graduellement depuis sa valeur β_0 sur un côté jusqu'à la valeur β_1 qu'il prend sur le côté opposé, s'il s'agit d'un rectangle, ou, dans le cas contraire de l'espace annulaire compris entre deux courbes $\alpha=$ const., depuis la valeur β_0 qu'il a sur une trajectoire orthogonale déterminée de ces courbes jusqu'à la valeur $\beta_0+\varpi$ qu'il acquiert quand, après un tour complet décrit le long des mêmes courbes, on se trouve revenu sur cette trajectoire. Par suite, tout système de valeurs de α et β, comprises respectivement, soit entre α_0 et α_1, soit entre β_0 et β_1 ou β_0 et $\beta_0+\varpi$, caractérisera parfaitement un point de l'espace étudié, savoir l'intersection unique des courbes correspondantes $\alpha=$ const., $\beta=$ const., dont chacune n'aura dans cet espace qu'une branche. On pourra donc prendre α et β, à la place de x et de y, comme variables indépendantes. C'est ce que nous allons faire.

3. Voyons d'abord ce que devient l'équation indéfinie (1). Si nous supposons u exprimé en fonction de α et de β, variables qui dépendent elles-mêmes de x et de y, une première différentiation, effectuée par rapport à x, donne

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{du}{d\beta}\frac{d\beta}{dx}.$$

Différentions une fois de plus par rapport à x; il viendra

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u}{d\alpha^2}\frac{d\alpha^2}{dx^2}+2\frac{d^2u}{d\alpha d\beta}\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx}+\frac{d^2u}{d\beta^2}\frac{d\beta^2}{dx^2}+\frac{du}{d\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{du}{d\beta}\frac{d^2\beta}{dx^2}.$$

On aura pour $\frac{d^2u}{dy^2}$ une valeur analogue, et ces deux valeurs, ajoutées en tenant compte des relations (2), (3) et (4), donneront

$$(8)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2}+\frac{d^2u}{d\beta^2}\right)\left(\frac{d\alpha^2}{dx^2}+\frac{d\alpha^2}{dy^2}\right).$$

Comme on ne peut avoir $\frac{d\alpha^2}{dx^2}+\frac{d\alpha^2}{dy^2}=0$ qu'en des points particuliers tout au plus, et que l'équation (1) doit être vérifiée d'une manière continue, il vient

$$(9)\qquad \frac{d^2u}{d\alpha^2}+\frac{d^2u}{d\beta^2}=0.$$

L'équation indéfinie conserve donc, dans le système des variables α, β, la forme qu'elle avait dans celui des x, y. Mais les conditions spéciales au contour limite deviennent beaucoup plus simples. D'une part, les équations du contour se réduisent, dans le cas où il s'agit d'une bande comprise entre deux courbes fermées, à $\alpha=\alpha_0$ pour un bord et à $\alpha=\alpha_1$ pour l'autre, et, dans le cas d'un rectangle curviligne, à $\alpha=\alpha_0$, $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_0$, $\beta=\beta_1$ pour les quatre côtés respectifs. D'autre part, la dérivée de u le long d'un chemin normal, par exemple, aux courbes $\alpha=$ const. (dérivée proportionnelle aux flux de chaleur de même sens) est en chaque point la somme des produits de

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{du}{d\beta}\frac{d\beta}{dx},\quad \frac{du}{dy}=\frac{du}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{du}{d\beta}\frac{d\beta}{dy}$$

par les cosinus des angles que fait avec les axes la normale aux courbes, c'est-à-dire par les rapports de $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\alpha}{dy}$ à $\sqrt{\frac{d\alpha^2}{dx^2}+\frac{d\alpha^2}{dy^2}}$, somme égale, vu les relations (3), à $\frac{du}{d\alpha}\sqrt{\frac{d\alpha^2}{dx^2}+\frac{d\alpha^2}{dy^2}}$. Dire que cette dérivée équivaut, le long des côtés $\alpha=\alpha_0$, $\alpha=\alpha_1$, à une fonction donnée de x et de y, c'est donc dire qu'on y connaît les valeurs de $\frac{du}{d\alpha}$. De même, on connaîtra $\frac{du}{d\beta}$ le long des côtés $\beta=\beta_0$, $\beta=\beta_1$ où le flux de chaleur serait donné.

En résumé, les conditions spéciales au contour deviennent

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l}(\text{pour } \alpha=\alpha_0 \text{ et pour } \alpha=\alpha_1)\\ u \text{ ou } \frac{du}{d\alpha}=\text{des fonctions données de } \beta,\end{array}\right.$$

et, en outre, quand il s'agit d'un rectangle curviligne

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l}(\text{pour } \beta=\beta_0 \text{ et pour } \beta=\beta_1),\\ u \text{ ou } \frac{du}{d\beta}=\text{des fonctions données de } \alpha.\end{array}\right.$$

Si l'on considère, au contraire, l'espace compris entre deux courbes fermées $\alpha=\alpha_0$, $\alpha=\alpha_1$, les conditions (11) sont remplacées par une seule, consistant en ce que u doit retrouver les mêmes valeurs quand β croît de sa période ϖ, obtenue en faisant un tour complet de l'un des deux bords.

4. Pour satisfaire, dans ce dernier cas, à toutes les conditions énumérées, on compose l'expression générale de u de deux parties distinctes, vérifiant chacune l'équation indéfinie (9). Dans l'une, on satisfait à la condition

$$u \text{ ou } \frac{du}{d\alpha}=\text{une fonction donnée de } \beta \ (\text{pour } \alpha=\alpha_0)$$

et à la condition

$$u \text{ ou } \frac{du}{d\alpha}=0 \quad (\text{pour } \alpha=\alpha_1);$$

tandis que, dans l'autre partie, on satisfait à la condition

$$u \text{ ou } \frac{du}{d\alpha} = 0 \quad (\text{pour } \alpha = \alpha_0)$$

et à la condition

$$u \text{ ou } \frac{du}{d\alpha} = \text{une fonction donnée de } \beta \quad (\text{pour } \alpha = \alpha_1).$$

La première partie, par exemple, sera de l'une des deux formes doubles

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} u = \sum \Bigg(& \frac{e^{m(\alpha_1 - \alpha)} \mp e^{-m(\alpha_1 - \alpha)}}{e^{m(\alpha_1 - \alpha_0)} \mp e^{-m(\alpha_1 - \alpha_0)}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{m} \frac{e^{m(\alpha_1 - \alpha)} \mp e^{-m(\alpha_1 - \alpha)}}{e^{m(\alpha_1 - \alpha_0)} \pm e^{-m(\alpha_1 - \alpha_0)}} \Bigg) \\ & \times [c \sin m(\beta - \beta_0) + c' \cos m(\beta - \beta_0)]. \end{aligned} \right.$$

Si l'on prend la première forme, avec l'un ou l'autre des signes $\mp$, il vient

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\text{pour } \alpha = \alpha_0) \quad u = \Sigma[c \sin m(\beta - \beta_0) + c' \cos m(\beta - \beta_0)], \\ & (\text{pour } \alpha = \alpha_1) \quad u \text{ ou } \frac{du}{d\alpha} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on prend, au contraire, la seconde forme, on trouve

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\text{pour } \alpha = \alpha_0) \quad -\frac{du}{d\alpha} = \Sigma[c \sin m(\beta - \beta_0) + c' \cos m(\beta - \beta_0)], \\ & (\text{pour } \alpha = \alpha_1) \quad u \text{ ou } \frac{du}{d\alpha} = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, dans les deux cas, l'une des quantités u, $-\frac{du}{d\alpha}$ est, pour $\alpha = \alpha_0$, une fonction donnée de β, fonction périodique, puisqu'elle repasse par les mêmes valeurs quand β croît de ϖ ou après chaque tour complet. Les valeurs de m, ainsi que celles des coefficients c, c', se détermineront donc par la formule, bien connue, qui sert à développer une fonction périodique en série procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples d'un certain arc proportionnel à sa variable.

D'ailleurs, rien n'empêchera, quand la fonction u ne cessera pas d'être partout finie, de supposer de plus en plus grande la courbe qui entoure extérieurement l'espace considéré, de manière que celui-ci comprenne, à la limite, toute la partie du plan située en dehors du bord intérieur. De même, on pourra, si u reste partout fini, concevoir que le bord intérieur se réduise ou se resserre de plus en plus, sans que l'autre bord varie, au point même que l'espace considéré embrasse finalement toute l'étendue mesurable comprise au dedans de la courbe extérieure. Alors cependant la courbe fermée intérieure $\alpha = \alpha_0$, réduite à un simple arc qui revient sur lui-même ou qui n'entoure plus aucune surface, continue à jouer en quelque sorte le rôle d'une paroi tant qu'on y suppose vérifiée la condition spéciale (10) qui la concerne; elle rompt généralement la continuité, en ce sens que u et à plus forte raison ses dérivées peuvent recevoir des valeurs très différentes sur les deux côtés de cette ligne. Il faudrait donc, pour qu'une continuité parfaite existât dans tout l'espace qu'entoure la courbe extérieure, remplacer la condition (10) dont il s'agit, relative à la position limite de la ligne $\alpha = \alpha_0$ et qui équivaut à deux conditions (car elle s'applique séparément sur chaque côté de la courbe intérieure), par deux autres exprimant que, le long de cette courbe limite, u et sa dérivée suivant un sens normal à la courbe ont d'égales valeurs des deux côtés.

Passons actuellement au cas où il y a les quatre faces $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_1$. Alors on compose la solution de quatre parties, dans chacune desquelles u ou sa dérivée suivant le sens normal au contour s'annulent sur trois côtés et reçoivent, sur le quatrième, les valeurs données. Par exemple, la première partie, destinée à vérifier la condition concernant le côté $\alpha = \alpha_0$, est de l'une des quatre formes doubles

$$(15)\quad \begin{cases} u = \sum \left(\dfrac{e^{m(\alpha_1-\alpha)} \mp e^{-m(\alpha_1-\alpha)}}{e^{m(\alpha_1-\alpha_0)} \mp e^{-m(\alpha_1-\alpha_0)}} \quad \text{ou} \quad \dfrac{1}{m}\, \dfrac{e^{m(\alpha_1-\alpha)} \mp e^{-m(\alpha_1-\alpha)}}{e^{m(\alpha_1-\alpha_0)} \pm e^{-m(\alpha_1-\alpha_0)}} \right) \\ \qquad\qquad \times \left[c \sin m(\beta-\beta_0) \quad \text{ou} \quad c \cos m(\beta-\beta_0) \right]. \end{cases}$$

On choisit les facteurs $\sin m(\beta - \beta_0)$ ou les facteurs $\cos m(\beta - \beta_0)$, suivant que c'est u ou $\frac{du}{d\beta}$ qui doit s'annuler pour $\beta = \beta_0$; en outre, on prend pour m un multiple de $\frac{\pi}{\beta_1 - \beta_0}$ ou un multiple impair de $\frac{\pi}{2(\beta_1 - \beta_0)}$, selon que la condition relative à $\beta = \beta_1$ est pareille ou non à celle qu'on a déjà vérifiée pour $\beta = \beta_0$. Enfin, des séries trigonométriques bien connues permettent de déterminer les coefficients c, de telle manière, que les expressions (15) de u ou celles de $-\frac{du}{d\alpha}$, réduites, pour $\alpha = \alpha_0$ à

$$\Sigma c[\sin m(\beta - \beta_0) \text{ ou } \cos m(\beta - \beta_0)],$$

égalent alors, entre les limites β_0 et β_1, une fonction arbitraire donnée de β.