JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

SOPHIE GERMAIN

Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 6 (1880), p. S11-S64 (supplément).

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__S11_0>

MÉMOIRE SUR L'EMPLOI DE L'ÉPAISSEUR

DANS LA

THÉORIE DES SURFACES ÉLASTIQUES,

PAR M^LLE SOPHIE GERMAIN.

L'influence de l'étendue plus ou moins grande des surfaces élastiques est parfaitement déterminée; mais les opinions se partagent à l'égard des effets produits par les différences de leur épaisseur. Si on se borne, comme on l'a fait jusqu'à présent, à considérer le cas où l'épaisseur est supposée constante, il s'agit de savoir quelle puissance de cette dimension doit entrer comme facteur dans un certain coefficient, dont un autre facteur dépend de l'élasticité naturelle des surfaces. La marche du calcul n'exige pas absolument alors qu'on connaisse la valeur propre de chacun des facteurs, et c'est probablement à la facilité d'éluder leur séparation qu'il faut attribuer le peu d'importance que les géomètres semblent avoir mis à établir quel exposant il convient de donner à l'épaisseur. Quoi qu'il en soit, la théorie des surfaces élastiques renferme essentiellement celle des effets dus à leur épaisseur; et la connaissance de ces effets devient même indispensable lorsqu'on cesse de supposer l'épaisseur égale dans tous les points de la surface.

Je me propose aujourd'hui d'examiner et de résoudre cette question.

Après avoir présenté quelques considérations générales sur l'emploi de l'épaisseur, discuté l'opinion des auteurs et rappelé les idées théoriques que j'ai déjà publiées, idées qui m'ont conduite au choix d'un exposant différent de ceux qui avaient été adoptés, je prouverai que, par rapport au cas où l'épaisseur est supposée constante, mon exposant fournit la juste mesure des phénomènes.

Envisageant ensuite la question sous un point de vue plus étendu, je chercherai, dans la supposition d'une épaisseur variable, quel doit être l'exposant de cette dimension, non plus seulement pour que les formules représentent, dans leur quantité, les effets dus aux changements possibles de la dimension, mais encore pour que la nature même de ces effets puisse être exprimée par l'analyse. J'arriverai enfin à ce résultat, que le cas d'une épaisseur constante est le seul où l'inconvénient d'un choix différent se réduise à induire en erreur sur la mesure des phénomènes; mais que dans le cas plus général où on supposerait l'épaisseur variant en raison des distances de chacun des points de la surface aux extrémités, alors l'emploi de tout autre exposant mettrait la théorie dans une telle contradiction, que la première exprimerait l'impossibilité des phénomènes observés.

---

1. Lorsqu'on suppose l'épaisseur constante, son introduction dans le calcul n'entraîne aucune difficulté de plus, par rapport aux surfaces élastiques, que par rapport aux simples lames; rien n'empêche donc de choisir ici le cas linéaire pour exemple; il en résultera même ce double avantage, d'éviter la complication des formules et d'avoir sous les yeux l'objet direct des Mémoires qui ont précédé ces derniers temps.

Le coefficient du second terme de l'équation différentielle de la lame élastique est une quantité constante; sa valeur dépend nécessairement du choix de la matière dont se composent les pièces auxquelles on l'applique.

On a coutume de prendre une des extrémités pour origine; l'ordonnée x représente alors la distance à cette extrémité. L'intégrale, quelle que soit sa forme, donne les valeurs de z pour chacun des points de la lame; ces valeurs sont exprimées par une fonction de x. L étant la longueur totale de la lame, les valeurs absolues de x, et par conséquent aussi les valeurs de z, dépendent évidemment de celles de L, dont les premières sont de simples fractions; il s'ensuit que dans la fonction qui exprime les valeurs de z on doit écrire $\frac{x}{L}$. Il n'est pas moins évident que les mêmes valeurs de z dépendent aussi de l'épaisseur e qu'on attribue à la lame élastique; t étant un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire, on peut donc écrire $\frac{e^t x}{L}$ dans l'intégrale.

En supposant toujours l'épaisseur constante, la fonction quatrième de l'intégrale, prise par rapport à x et divisée par dx^4, se trouve multipliée par e^{4t}; il devient indifférent alors d'écrire $\frac{e^t x}{L}$ ou $\frac{x}{L}$ dans l'intégrale, pourvu que, dans ce dernier cas, le coefficient constant du terme $\frac{d^4 z}{dx^4}$ ait la puissance $(4t)^{\text{ième}}$ de l'épaisseur pour facteur; ce facteur se trouvant ainsi confondu avec celui qui dépend de l'élasticité naturelle de la lame, le coefficient constant en exprime l'élasticité absolue. La question a toujours été présentée sous ce dernier point de vue.

Euler a tenté plusieurs fois de déterminer la valeur de l'élasticité absolue. On trouve à la fin du Traité *de maximis minimisve* (1) un Chapitre consacré à la recherche de la courbe élastique (2). L'auteur, après avoir parlé dans un paragraphe précédent de la force des colonnes, cherche, dans le § 40, quels sont les facteurs qui doivent composer la valeur de l'élasticité absolue de la lame élastique. Le premier dépend du choix de la matière, ou, ce qui est la même chose, de l'élasticité naturelle de la pièce; le second est comme sa largeur, et le troisième est le carré de son épaisseur.

On a lieu de s'étonner de ce que cet illustre auteur a cru devoir faire entrer ici la largeur de la lame en considération; peut-être expliquera-t-on cette singularité en pensant que, dans une matière encore nouvelle, on n'avait pas suffisamment distingué le cas des colonnes de celui des simples lames.

---

(1) *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Auctore Leonhardo Eulero. Lausannæ et Genevæ, MDCCXLIV; in-4°.

(2) *Additamentum I : De curvis elasticis*, p. 245 de l'Ouvrage précité.

Dans le Mémoire sur la force des colonnes (Berlin, 1757) [1], Euler paraît être fort indécis à l'égard du choix de la puissance de l'épaisseur qu'il convient de faire entrer dans l'expression du moment de roideur; car il termine ainsi le § V consacré à cette recherche :

« Pour celle-ci (la largeur) il est assez évident que ce moment (de la roideur) lui est proportionnel; mais pour l'épaisseur, puisqu'elle s'oppose davantage à l'inflexion, il semble que le moment de la roideur en suive la raison *doublée* ou même *triplée;* d'où l'on pourrait conclure que, si la colonne est un cylindre, son moment de roideur sera proportionnel au *cube* ou peut-être au *carré-carré* du diamètre de la base. »

Plus loin, § LIII du même Mémoire, on lit le passage suivant :

« .... la matière étant la même, tant la théorie que quelques expériences faites sur la roideur des corps, nous assurent que le moment de la roideur en chaque endroit est assez exactement proportionnel au *carré-carré du diamètre de l'épaisseur,* ou au carré de la section faite au même endroit. »

La force des colonnes n'est pas l'objet direct des recherches que je me suis proposées; cependant je ne puis me dispenser de faire remarquer qu'il faut distinguer deux cas essentiellement différents, selon que la colonne est dans une position verticale ou horizontale. Par rapport au premier, l'effort est égal suivant la direction de chacun des diamètres; il n'y a donc aucune raison de croire que l'épaisseur s'oppose plus à l'inflexion que la largeur. Le second est le seul qui présente de l'analogie avec la question des lames élastiques; mais, si l'on admet, t étant un nombre quelconque, que le moment de la roideur soit proportionnel à la puissance $t^{\text{ième}}$ du diamètre, je ne vois pas comment on en conclurait que le même moment doive être proportionnel à la puissance $(t-1)^{\text{ième}}$ de l'épaisseur proprement dite. En effet, puisqu'il s'agit ici d'un cylindre dont un des diamètres représente la largeur, tandis que le diamètre perpendiculaire au premier est pris pour l'épaisseur, on voit que les différentes parties de la largeur correspondent à des épaisseurs

(1) *Sur la force des colonnes,* par M. Euler, p. 252 de l'*Histoire de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres,* année MDCCLVII. Berlin, 1759; in-4°.

différentes. Les tranches d'égale largeur dans lesquelles on peut concevoir que la colonne soit divisée ne peuvent donc être douées de forces égales; cependant cette condition semble nécessaire pour que, en regardant la force due à l'épaisseur comme proportionnelle à la puissance $(t-1)^{\text{ième}}$ du diamètre, la force totale de la colonne soit proportionnelle à la puissance $t^{\text{ième}}$ du même diamètre.

Quoi qu'il en soit, la seule conclusion qu'on puisse tirer des passages que je viens de rapporter est que l'auteur n'était pas encore parvenu à fixer son opinion sur la question qui nous occupe.

En suivant l'ordre des dates, j'ai consulté le Mémoire de Lagrange sur les ressorts pliés (Berlin, 1769) (1). L'auteur emploie le coefficient dépendant de l'élasticité absolue de la lame, sans s'arrêter à l'examen des facteurs qui le composent (*voir* § II); plus loin, § VI, il renvoie, à la vérité, au Mémoire d'Euler dont nous venons de parler; mais cette citation est entièrement étrangère à la question des facteurs qui entrent dans la valeur de l'élasticité absolue.

La *Mécanique analytique* (2) ne contient non plus aucune détermination à cet égard.

Euler est encore revenu sur le même sujet dans le beau Mémoire où il examine les différents cas de vibration dont la lame élastique est susceptible (*Acta*. P. 1779) (3). On peut voir (p. 107, § IV) que l'auteur y regarde l'élasticité de la lame comme proportionnelle au carré de son épaisseur. Par une singularité remarquable, cette dimension y est représentée, comme dans la suite du Mémoire, par la double lettre *cc*. Si l'on rapproche cette notation de l'expression *carré-carré du diamètre de l'épaisseur*, employée par le même auteur dans un des passages qu'on vient de lire, on sera porté à croire que le mot *épaisseur* n'a pas toujours désigné, dans ses recherches, une quantité linéaire.

On trouve, dans le Recueil des Mémoires de la Société italienne pour

---

(1) *Sur la force des ressorts pliés*, par M. de la Grange, p. 167 de l'*Histoire de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres*, année MDCCLXIX. Berlin, 1771; in-4°.

(2) *Mécanique analytique*, par J.-L. Lagrange. Nouvelle édition, revue et augmentée par l'auteur. Paris, Mme Ve Courcier, 1811-1815; 2 vol. in-4°.

(3) *Investigatio motuum, quibus laminæ et virgæ elasticæ contremiscunt*, auctore L. Eulero, p. 103 de *Acta Academiæ Scientiarum imperialis Petropolitanæ pro anno MDCCLXXIX*. Pars prior, Petropoli, 1782; in-4°.

l'année 1782, un mémoire de Giordano Ricati, intitulé *Delle vibrazioni sonore dei cilindri* ([1]); l'auteur, en comparant entre eux deux cylindres différents, établit la proportion directe de leur longueur et inverse de leur rigidité naturelle multipliée par le carré de leur diamètre. Ce Mémoire semble avoir été inspiré par la lecture de celui d'Euler, dont il développe toutes les conséquences avec une exactitude scrupuleuse; cependant la proportion dont on vient de parler ne serait pas d'accord avec le sens d'Euler si on regardait l'épaisseur cc comme une quantité linéaire.

M. Chladni, dans son Traité d'Acoustique ([2]) (p. 99, § 75) a cru se conformer au véritable sens d'Euler en adoptant, pour les formules qui expriment les sons, les conséquences de la supposition de la proportionnalité de l'élasticité absolue au carré de l'épaisseur de la lame élastique.

J'avais d'abord admis moi-même cette supposition; elle m'avait paru conforme à l'opinion d'Euler, et je pensais alors que l'assentiment général l'avait confirmée.

Dans le § 22 de son Mémoire sur les surfaces élastiques ([3]), M. Poisson a soin de remarquer que le coefficient n^2, qui n'est autre chose que la quantité nommée précédemment *élasticité absolue*, est proportionnelle à l'épaisseur de la surface. Une telle détermination de l'exposant dont il est question résulte en effet des suppositions admises par cet habile géomètre.

Dans la suite, lorsque j'ai cherché à démontrer l'hypothèse qui, pour la première fois, a conduit à trouver l'équation des surfaces élastiques ([4]), j'ai reconnu, comme je le dirai plus bas, que ce n'est ni la première ni la seconde, mais plutôt la quatrième puissance de l'épaisseur, qui doit entrer dans la valeur du coefficient constant.

([1]) *Delle vibrazioni sonore dei cilindri* del sig. conte Giordano Riccati, p. 444 de *Memorie di Matematica e Fisica della Società italiana*. Tomo I. Verona, MDCCLXXXII; pet. in-fol.

([2]) *Traité d'Acoustique*, par E.-F.-F. Chladni. Paris, chez Courcier, 1809; in-8°.

([3]) *Mémoire sur les surfaces élastiques*, par M. Poisson, p. 167 des *Mémoires de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, année 1812, IIe Partie. Paris, F. Didot, MDCCCXVI; in-4°.

([4]) *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*, par Mlle Sophie Germain. Paris, Mme Ve Courcier, 1821; in-4°.

Vers la même époque, M. Navier choisissait, dans son Mémoire sur la flexion des plans élastiques (¹), la troisième puissance de l'épaisseur. Les *Bulletins de la Société philomathique* (livraisons de juin et juillet 1823) contiennent l'extrait d'un Mémoire de ce savant auteur sur le même sujet (²); il y persiste dans le choix de la puissance troisième. L'extrait est terminé par l'observation suivante :

« Les personnes qui se sont occupées de cette matière ne s'accordent pas toutes sur la puissance de l'épaisseur qui entre comme facteur dans le dernier terme de l'équation différentielle. Mais le résultat obtenu ici est conforme à ceux qui ont été admis par Euler et Lagrange dans leurs recherches sur la flexion des lames élastiques et des colonnes, etc. »

(¹) *Mémoire sur la flexion des plans élastiques.*

Ce Mémoire, lu par Navier à l'Académie des Sciences, dans la séance du lundi 14 août 1820, fut renvoyé à l'examen d'une Commission composée de MM. de Prony, Poisson, Fourier, Cauchy. Navier y ajouta ensuite une Note explicative, manuscrite, qu'il remit, quelques mois après, aux commissaires.

Le Mémoire de Navier n'a été l'objet d'aucun Rapport.

Navier distribua quelques copies lithographiées de son Mémoire; Fourier en reçut un exemplaire et en donna connaissance à M^lle Sophie Germain, ainsi que le montre la Lettre suivante :

« Mardi soir [15 *août* 1820].

» J'ai l'honneur d'adresser à M^lle Germain le dernier numéro des *Annales de Physique* où se trouve le Mémoire de M. Savart sur les vibrations des lames élastiques (¹). J'ai pensé que la lecture de cet écrit pourrait l'intéresser. J'espère lui envoyer demain un Mémoire qui est présenté à l'Académie par M. Navier, et qui a pour objet l'analyse des flexions des plans élastiques. L'auteur a fait copier ce manuscrit par les presses lithographiques et m'en a remis un exemplaire.

» Je prie M^lle Germain d'agréer l'hommage de mon respect et de vouloir bien l'offrir de ma part à madame sa mère. » FOURIER (²). »

(²) *Extrait des recherches sur la flexion des plans élastiques; par M. Navier*, p. 92 du *Bulletin des Sciences*, par la Société philomathique de Paris. Année 1823. Paris, in-4°.

(¹) Mémoire sur la Communication des mouvements vibratoires entre les corps solides, par M. Félix Savart, docteur en Médecine, etc. (Lu à l'Académie des Sciences le 15 novembre 1819); page 113 des *Annales de Chimie et de Physique*, par MM. Gay-Lussac et Arago (2e série), t. XIV, 1820, in-8°.

(²) L'original de cette Lettre se trouve à la Bibliothèque nationale, dans le Manuscrit français nouveau 4073 (Libri). Elle a été publiée par M. C. Henry dans le numéro de décembre 1879 de la *Revue philosophique* dirigée par Th. Ribot.

Ainsi la première, la seconde, la troisième et enfin la quatrième puissance de l'épaisseur ont été successivement proposées comme facteur de l'élasticité absolue des surfaces.

Il résulte de l'examen auquel nous venons de nous livrer qu'il n'existe encore aucune doctrine solidement établie relativement à l'influence de l'épaisseur sur les phénomènes qui appartiennent aux surfaces élastiques; si je ne me fais illusion, celle que je vais exposer sera désormais à l'abri de toute objection.

2. En appliquant au cas des surfaces les principes émis par Jacques Bernoulli à l'égard des lames élastiques, j'ai eu occasion de remarquer que le carré de leur épaisseur entre dans l'expression de la puissance qui détermine leur changement de figure. J'ai vu en même temps que la force élastique, qui a pour mesure le même changement de figure qu'elle tend à détruire, introduit nécessairement aussi le carré de l'épaisseur dans l'équation différentielle. J'en ai conclu que les termes qui expriment l'action de la force élastique doivent, dans le cas où l'épaisseur est supposée constante, être multipliés par la quatrième puissance de la même dimension.

Cette remarque a été développée dans le § 8 de mon Mémoire sur la théorie des surfaces élastiques (1); je me contenterai de rappeler ici le procédé qui introduit le carré de l'épaisseur dans l'expression du changement de figure de la lame élastique.

Un tel changement ne peut s'effectuer sans qu'il en résulte à la fois une dilatation et une contraction dans les forces opposées de chacun des éléments de la lame. Ces deux effets sont égaux entre eux, et ils peuvent également fournir la mesure de la force qui les a produits.

Pour plus de simplicité, bornons-nous à considérer l'effet de la dilatation d'une lame droite.

L'épaisseur et la longueur de l'élément de cette lame sont les côtés du parallélogramme que présente sa figure naturelle. La lame a acquis un certain degré de courbure, lorsque, par l'action d'une force quelconque, l'élément a été dilaté dans sa partie supérieure; les deux rayons de courbure qui appartiennent aux extrémités de l'élément se

(1) *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*, § 8, p. 13.

rencontrent alors, et l'angle qu'ils comprennent appartient au triangle dont les mêmes rayons et la longueur de l'élément dilaté sont les côtés. En même temps, l'un des rayons de courbure, pénétrant dans l'épaisseur de la lame, coupe, au milieu de cette épaisseur, la ligne qui lui sert de mesure; il en résulte un second triangle, semblable au premier; deux de ses côtés sont la demi-épaisseur et la quantité linéaire dont la partie supérieure de l'élément a été dilatée. On conclut, de la proportion établie entre les côtés des triangles semblables, que la valeur de la quantité linéaire dont on vient de parler a la demi-épaisseur pour facteur.

Nous avons dit que l'action de la force qui a déterminé le changement de figure de la lame est proportionnelle à la dilatation qu'a éprouvée la partie supérieure de l'élément de cette lame. Il est évident que cette dilatation elle-même est représentée par la surface du petit triangle compris dans la demi-épaisseur de la lame. Pour avoir cette surface, il faut multiplier celui des côtés du triangle qui, suivant ce qu'on vient de voir, a la demi-épaisseur pour facteur, par le second côté du même triangle, qui n'est autre chose que la demi-épaisseur elle-même : la surface du triangle et par conséquent aussi la dilatation de la lame sont donc proportionnelles au carré de l'épaisseur de cette lame.

Pour arriver à conclure que l'action de la force d'élasticité est proportionnelle à la quatrième puissance de l'épaisseur de la lame élastique, il suffit à présent de rappeler que la force d'élasticité est proportionnelle à l'effet qu'elle tend à produire, c'est-à-dire à la dilatation de l'élément de la lame qu'elle tend à ramener à sa figure naturelle, et que son action a pour mesure le produit de la force elle-même par la quantité sur laquelle elle agit.

Ce qu'on vient de dire relativement à la mesure de l'action des forces d'élasticité est indépendant de la supposition particulière d'une épaisseur constante; car cette mesure appartient à chacun des éléments de la lame considérés isolément; seulement, lorsque l'épaisseur varie d'un point à l'autre des surfaces, elle ne doit plus fournir de facteur au coefficient constant qui multiplie les termes de l'équation différentielle relatifs à l'action de la force élastique.

3. Le cas d'une épaisseur constante est le seul dont on se soit

occupé jusqu'à présent; après avoir montré quelles sont, dans cette supposition, les conséquences du choix de l'exposant, je les comparerai aux données de l'expérience.

Selon qu'on fait entrer les puissances première, seconde, troisième ou quatrième de l'épaisseur dans le coefficient n^2 des termes $\frac{d^4 z}{dx^4} + 2\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4}$ de l'équation des plaques élastiques, on trouve que les sons doivent être en raison directe des puissances $\left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ième}}$, première, $\left(\frac{3}{2}\right)^{\text{ième}}$ ou seconde de la même épaisseur. En général, e représentant la valeur de cette dimension par rapport à la surface, si e^{4t} est facteur de n^2, les sons seront proportionnels à e^{2t}; on sait d'ailleurs, en prenant pour exemple la plaque carrée dont le côté est L, que les mêmes sons doivent être proportionnels à $\frac{1}{L^2}$: l'expérience peut donc nous faire connaître quelle est la valeur de t dans la formule $\frac{e^{2t}}{L^2}$.

La manière la plus simple de procéder est de comparer des pièces qui, différentes par leur épaisseur, sont, sous tout autre rapport, semblables entre elles. Il est facile de remplir cette condition à l'égard de la forme et de l'étendue des surfaces; mais on a toujours à craindre l'influence des différences d'élasticité naturelle de la matière employée.

Dans la vue d'écarter, autant que possible, cette cause d'erreur, j'ai voulu que les plaques comparées fussent coupées dans un même morceau de verre, mais à des distances assez grandes pour que l'épaisseur, quoique sensiblement égale dans l'étendue de chacune des surfaces, fût pourtant notablement différente de l'une à l'autre.

J'ai successivement employé plusieurs moyens pour mesurer ces épaisseurs. J'avais d'abord eu recours à l'application, sur la tranche des surfaces, d'un tissu dont je comptais les fils, et j'avais déjà obtenu des résultats favorables à la théorie que je veux établir; cependant, malgré la précaution que j'avais prise de répéter les mêmes opérations et de varier les tissus dont je me servais, j'ai craint que le plus ou le moins de tension dont ils étaient susceptibles ne pût occasionner quelque erreur dans des mesures aussi délicates.

Afin d'obtenir une exactitude plus grande, j'ai fait exécuter en cuivre des rapporteurs de 1°, 2°,... et 10°. Lorsque les épaisseurs de deux surfaces étaient exactement recouvertes par les cordes de deux angles appartenant au même rayon, j'obtenais immédiatement le rapport cherché. Je le vérifiais ensuite en appliquant, sur les mêmes épaisseurs, les cordes d'un même angle dont le rayon variait en raison des différences de ces épaisseurs. Les rayons étaient mesurés en millimètres et présentaient une sorte de multiplication des différences qu'ils servaient à faire reconnaître. Ce dernier moyen a été employé seul dans les cas où les épaisseurs étaient peu différentes; mais je me suis alors servi successivement de différents angles, de manière qu'il ne me restât plus aucun doute sur l'exactitude des mesures que je soumettais au calcul.

J'ai fait un assez grand nombre d'épreuves; comme elles ont toutes fourni des résultats analogues, je me contenterai d'en rapporter quelques-unes.

Nous avons vu plus haut que le son est proportionnel à la quantité $\frac{e^{2t}}{L^2}$; par conséquent, si l'on compare deux pièces égales d'ailleurs, dont les épaisseurs soient représentées par e et e', la formule $\left(\frac{e}{e'}\right)^{2t}$ exprimera la différence des sons correspondant, dans chacune d'elles, aux mêmes cas de vibration. Suivant la théorie que je cherche à établir, il faut prendre $t = 1$; il s'agit donc de vérifier la formule $\left(\frac{e}{e'}\right)^{2t}$.

Deux pièces pour lesquelles on avait $e : e' :: 7 : 6$, et par conséquent $\left(\frac{e}{e'}\right)^2 = \frac{49}{36}$, ont donné l'intervalle d'*ut* à *fa* égal à $\frac{4}{3}$ La différence entre $\frac{49}{36}$ et $\frac{4}{3}$ est $\frac{49}{48}$, quantité inappréciable.

Deux autres pièces pour lesquelles on avait $e : e' :: 6 : 5$, et par conséquent $\left(\frac{e}{e'}\right)^2 = \frac{36}{25}$, ont donné l'intervalle de *mi* à *si*♭, qui ne diffère de $\frac{36}{25}$ que de la distance entre un demi-ton majeur et un demi-ton mineur.

Cinq pièces de même forme et de même grandeur, taillées dans le même morceau de verre, ont donné, toujours pour le même cas de vibration, les sons suivants : *ut*, *ut**, *fa*, *fa** et *sol**. Dans la première et la dernière, on ne reconnaissait pas la moindre différence d'épaisseur entre les différents points du contour. On avait, pour ces deux pièces, $e : e' :: 5 : 4$, et par conséquent $\left(\frac{e}{e'}\right)^2 = \frac{25}{16}$. L'intervalle d'*ut* à *sol** est, en effet, très exactement représenté par la fraction $\frac{25}{16}$.

A l'égard des autres pièces, l'épaisseur était moyenne entre celles dont on vient de parler, et elle n'était pas la même pour leurs différents côtés. C'est ce qui explique, comme nous le verrons plus bas, la différence observée entre les sons.

Les expériences dont on vient de rendre compte prouvent évidemment, ainsi que je l'ai supposé, qu'on doit prendre $t = 1$ dans la formule $\left(\frac{e}{e'}\right)^{2t}$.

On peut encore soumettre la théorie à un autre genre d'épreuve : on peut comparer les sons de deux pièces de même forme dont à la fois la grandeur et l'épaisseur soient différentes. En continuant de désigner les deux épaisseurs par e et e', et en représentant par L et L' les longueurs des côtés homologues, on aura à vérifier la formule $\left(\frac{e\,L'}{e'\,L}\right)^2$, qui exprime alors l'intervalle entre les sons correspondant aux mêmes cas de vibration des deux surfaces.

Les expériences faites de cette manière ont offert des résultats également satisfaisants; je prendrai pour exemple la plus simple d'entre elles.

S'il s'agit de deux pièces dont l'épaisseur et la grandeur des côtés homologues soient proportionnelles, par exemple si l'une d'elles est en même temps deux fois plus épaisse et deux fois plus longue que l'autre, la formule $\left(\frac{e\,L'}{e'\,L}\right)^2$ deviendra $\left(\frac{e\,2\,L}{2\,e\,L}\right)^2$; par conséquent elle se réduira à l'unité; or l'unité représente l'unisson : les deux pièces devront donc, dans les mêmes cas de vibration, faire entendre les mêmes sons.

L'impossibilité de tirer d'un même morceau de verre deux surfaces de même étendue dont les épaisseurs différassent dans la proportion de 1 à 2 m'a forcée d'avoir recours à l'emploi de pièces de cuivre. J'ai mis tous mes soins à obtenir, autant que possible, le même degré d'élasticité naturelle.

Deux plaques carrées dont les côtés et les épaisseurs étaient également dans le rapport de 2 à 1 ont été comparées, et, pour les différents cas de vibration dont les pièces étaient susceptibles, on a en effet toujours obtenu l'unisson.

Peut-être me serait-il permis de regarder déjà comme suffisamment justifié le choix de l'exposant que j'ai adopté. Les paragraphes suivants seront consacrés à l'examen du cas plus général où l'épaisseur est supposée varier d'un point à l'autre de la surface élastique; j'aurai occasion de faire remarquer qu'il en résulte une nouvelle confirmation de la théorie qui vient d'être exposée.

4. Afin d'arriver à connaître les effets de la variabilité de l'épaisseur, nous choisirons d'abord pour exemple le cas où l'épaisseur d'une lame droite, différente à ses deux extrémités, varie d'un point à l'autre en raison des distances aux mêmes extrémités. Nous commencerons par déterminer, dans cette supposition, l'épaisseur pour chacun des points de la lame et les épaisseurs moyennes des différentes parties comprises entre les mêmes points. Après avoir introduit ces quantités dans les formules, nous comparerons leurs résultats à ceux le l'expérience.

Des opérations du même genre, mais nécessairement beaucoup plus compliquées, nous feront connaître, dans des suppositions analogues, l'épaisseur pour chacun des points d'une plaque carrée et les épaisseurs moyennes des parties comprises entre les mêmes points. Les formules qui en résulteront seront également comparées à l'expérience. Si l'on supposait toute autre forme à la surface inégalement épaisse, on parviendrait sans doute à connaître et l'épaisseur dans chacun de ses points et l'épaisseur moyenne des espaces circonscrits, pris sur la même surface; mais on se trouverait alors forcé de faire entrer en considération un plus grand nombre de conditions, dépendantes toutes des distances aux points dont les épaisseurs seraient regardées comme données; il en résulterait une multiplicité de formules qui rendrait peut-être la théorie plus difficile à saisir. Les deux exemples auxquels j'ai cru devoir me borner sont certainement les plus simples qu'on puisse choisir; ils m'ont paru suffisants pour mettre la question dans tout son jour et pour faire pressentir les applications dont elle est susceptible.

5. Représentons par m et n les épaisseurs aux deux extrémités d'une lame droite dont la longueur est L; prenons pour origine le point auquel appartient l'épaisseur m, et supposons que l'épaisseur, dans tous les points dont se compose la lame, dépende uniquement de leurs distances à chacune des extrémités, en sorte que ces épaisseurs soient proportionnelles aux mêmes distances.

Les différentes valeurs que l'ordonnée s peut recevoir expriment les distances à l'origine des points auxquels elles appartiennent. Soient s et s' deux de ces valeurs, les formules $\frac{m(\mathrm{L}-s)+ns}{\mathrm{L}}$ et $\frac{m(\mathrm{L}-s')+ns'}{\mathrm{L}}$ donneront les épaisseurs correspondantes. Dans les mêmes suppositions, la formule $\frac{m(2\mathrm{L}-s-s')+n(s+s')}{2\mathrm{L}}$ représentera l'épaisseur moyenne de partie comprise entre les deux points. Ces diverses formules sont évidentes d'elles-mêmes, et les conséquences qu'on en peut tirer ne le sont pas moins.

En effet, si on prend $s=\frac{1}{2}\mathrm{L}$, la première devient $\frac{m+n}{2}$, et telle est réellement, dans les suppositions présentes, l'épaisseur du milieu de la lame. Si on fait dans la dernière $s'=\mathrm{L}-s$, elle représente l'épaisseur moyenne d'une partie, de longueur $\mathrm{L}-2s$, prise à égale distance des deux extrémités de la même lame, et elle se réduit encore à $\frac{m+n}{2}$. Il est facile de voir la raison de cette identité : quelle que soit la distance aux extrémités d'une portion de la lame située au milieu de cette lame, son épaisseur moyenne doit toujours être égale à l'épaisseur moyenne de la lame entière; l'épaisseur dans le point de milieu correspond au cas où on prendrait à la fois $s'=\mathrm{L}-s$ et $s=\frac{1}{2}\mathrm{L}$, et alors la portion dont la formule exprimerait l'épaisseur moyenne se réduirait, comme on le voit, à un seul point.

En prenant $s=0$, la même formule, qui devient $\frac{m(2\mathrm{L}-s)+ns}{2\mathrm{L}}$, donne l'épaisseur moyenne de la portion de la lame comprise entre l'origine et le point auquel l'ordonnée s appartient.

6. Avant d'entrer dans la discussion des effets dus à la variabilité de l'épaisseur, nous pourrions établir, d'après l'expérience, la propo-

sition suivante : *Deux lames élastiques d'ailleurs semblables, dont l'épaisseur moyenne, égale de part et d'autre, est variable dans l'une et constante dans l'autre, donnent l'unisson pour tous les cas de vibration dont elles sont susceptibles*. En remontant plus haut, nous allons voir qu'une lame élastique dont l'épaisseur varierait suivant la loi que nous venons d'établir ne serait susceptible d'aucune vibration régulière, si la variabilité supposée avait sur les sons que cette lame peut rendre une influence propre, c'est-à-dire qui ne dépendît pas uniquement de l'épaisseur moyenne des différentes parties dans lesquelles on peut concevoir que la même lame soit divisée.

L'Analyse montre, comme j'ai eu occasion de le dire ailleurs, que, dans tous les cas de vibration qui appartiennent à la lame élastique, il existe un ou plusieurs points de limite qui permettent de séparer la même lame en plusieurs portions, sans que le son et la figure dont chacune de ces portions sont susceptibles cessent d'être les mêmes que lorsqu'elles faisaient partie de la lame entière.

Cela posé, afin de rendre notre raisonnement plus simple, considérons le cas où il n'y aurait, sur la lame d'épaisseur variable, qu'un seul point de limite analytique, et fixons la position de ce point d'après la supposition que les parties d'inégales épaisseurs qu'il sépare sont équivalentes à des parties de même étendue et d'épaisseurs constantes égales aux épaisseurs moyennes des mêmes parties. En admettant ensuite que l'inégalité d'épaisseur entre les divers points de la lame détermine le déplacement du point de limite, nous arriverons à ce résultat contradictoire que, entre deux portions de la même lame assujetties à rendre le même son, la variabilité d'épaisseur exigera d'un côté une diminution et de l'autre une augmentation d'étendue dans les parties vibrantes.

7. Cherchons maintenant quel rôle l'épaisseur considérée comme variable doit jouer dans les formules relatives à la lame élastique. Nous avons remarqué (§ 1) qu'en supposant l'épaisseur constante il est indifférent d'écrire, dans la fonction de x qui donne les valeurs de l'ordonnée z, ou $\frac{e^t x}{\mathrm{L}}$, ou simplement $\frac{x}{\mathrm{L}}$, pourvu que, dans ce dernier cas, on prenne e^{4t} pour facteur du coefficient constant qui appartient au dernier terme de l'équation différentielle.

Quand l'épaisseur varie d'un point à l'autre, il faut considérer isolément chacun des points de la lame, et la première manière d'envisager la question est la seule qui convienne. z et s étant les coordonnées d'un point donné, on doit multiplier, dans la fonction qui donne la valeur de z, la puissance $t^{\text{ième}}$ de l'épaisseur par la différentielle de s. Suivant les formules données § 5, le produit de cette multiplication est $\left[\frac{m(\mathrm{L}-s)-ns}{\mathrm{L}}\right]^t ds$.

Si l'on mettait dans l'intégrale, au lieu de $e^t x$, comme lorsqu'il est question d'une lame d'épaisseur constante, la quantité différentielle que nous venons de trouver, alors la fonction qui exprime les valeurs de z ne serait applicable qu'à un seul point; pour étendre cette fonction à tous les points qui composent la lame, on doit donc écrire

$$\int\left[\frac{m(\mathrm{L}-s)+ns}{\mathrm{L}}\right]^t ds.$$

Nous avons vu (§ 6) que le point de limite qui existe dans tous les cas de vibrations régulières est placé, sur la lame d'épaisseur variable, en raison des épaisseurs moyennes des parties qu'il sépare; la valeur correspondante de l'ordonnée z est donc la même que si la lame était formée de la réunion de deux parties d'épaisseurs constantes, respectivement égales aux épaisseurs moyennes des parties de même longueur, prises sur la lame d'épaisseur variable. Prenons toujours pour exemple le cas où il n'existe qu'un seul point de limite analytique sur la lame vibrante, et ne considérons, pour plus de simplicité, que la partie d'épaisseur variable comprise entre l'origine et le point de limite. L'ordonnée z qui appartient à ce point aura la même valeur que s'il était pris au milieu d'une lame d'épaisseur constante égale à l'épaisseur moyenne de la partie dont il s'agit, et d'une longueur double de celle de cette partie. Une telle compensation entre l'épaisseur variable et l'épaisseur moyenne ne peut avoir lieu pour un des points de la lame sans qu'il existe des compensations semblables par rapport à tous les autres points de la même lame. Et, en effet, quel que soit le point de la lame qu'on veuille considérer, si s représente la distance à l'origine, la valeur correspondante de l'ordonnée z sera égale à celle qui appartiendrait au point semblablement situé sur une lame d'épaisseur constante égale à l'épaisseur moyenne de la partie dont il s'agit.

Il est sans doute inutile de dire que l'épaisseur et la longueur de la lame d'épaisseur constante qui entre ici en comparaison sont différentes relativement à chacune des valeurs de s.

Suivant ce que l'on vient de lire, l'épaisseur moyenne de la partie comprise entre l'origine et le point auquel appartient l'ordonnée s étant $\frac{m(2\mathrm{L}-s)+ns}{\mathrm{L}}$, on obtiendra les mêmes valeurs de z, soit qu'on écrive, dans l'intégrale, ou $\int\left[\frac{m(\mathrm{L}-s)+ns}{\mathrm{L}}\right]^t ds$, ou $\left[\frac{m(2\mathrm{L}-s)+ns}{2\mathrm{L}}\right]^t s$. Par conséquent, ces deux formules doivent être regardées comme deux expressions différentes d'une seule et même quantité. Elles doivent donc satisfaire à l'équation suivante :

$$\int\left[\frac{m(\mathrm{L}-s)+ns}{\mathrm{L}}\right]^t ds=\left[\frac{m(2\mathrm{L}-s)+ns}{2\mathrm{L}}\right]^t s.$$

La différentiation donne

$$\begin{aligned}&\left[\frac{m(\mathrm{L}-s)+ns}{\mathrm{L}}\right]^t ds\\ &\quad=\frac{t(n-m)}{2\mathrm{L}}\left[\frac{m(2\mathrm{L}-s)+ns}{2\mathrm{L}}\right]^{t-1} ds+\left[\frac{m(2\mathrm{L}-s)+ns}{2\mathrm{L}}\right]^t ds.\end{aligned}$$

Après avoir multiplié par $(2\,\mathrm{L})^t$ et divisé par ds, cette dernière équation se réduit à

$$\begin{aligned}&\{2[m(\mathrm{L}-s)+ns]\}^t\\ &\quad=[m(2\mathrm{L}-s)+ns]^{t-1}\{[m(2\mathrm{L}-(t+1)s]+n(t+1)s\}.\end{aligned}$$

Si on effectue alors les développements et les réductions convenables, on trouve

$$\left.\begin{aligned}&(2m\mathrm{L})^t+t(2m\mathrm{L})^{t-1}.2[s(n-m)]\\ &\quad+\frac{t(t-1)}{2}.(2m\mathrm{L})^{t-2}.2^2[s(n-m)]^2\\ &\quad+\frac{t(t-1)(t-2)}{2.3}.(2m\mathrm{L})^{t-3}.2^3.[s(n-m)]^3\\ &\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad+\frac{t(t-1)(t-2)\ldots[t-(\mathrm{V}-1)]}{2.3\ldots\mathrm{V}}.(2m\mathrm{L})^{t-\mathrm{V}}.2^{\mathrm{V}}.[s(n-m)]^{\mathrm{V}}\end{aligned}\right\}=\left\{\begin{aligned}&(2m\mathrm{L})^t+2.t(2m\mathrm{L})^{t-1}[s(n-m)]\\ &\quad+3.\frac{t(t-1)}{2}.(2m\mathrm{L})^{t-2}.[s(n-m)]^2\\ &\quad+4.\frac{t(t-1)(t-2)}{2.3}.(2m\mathrm{L})^{t-3}.[s(n-m)]^3\\ &\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad+(\mathrm{V}+1)\frac{t(t-1)(t-2)\ldots[t-(\mathrm{V}-1)]}{2.3\ldots\mathrm{V}}.(2m\mathrm{L})^{t-\mathrm{V}}.[s(n-m)]^{\mathrm{V}}.\end{aligned}\right.$$

Cette équation doit avoir lieu pour toutes les valeurs possibles de l'ordonnée s; chacun des termes du premier membre est donc respectivement égal à celui qui, dans le second, contient la même puissance de cette ordonnée. Prenons pour exemple les $(V+1)^{\text{ièmes}}$ termes des mêmes développements; toutes les fois qu'on ne fera pas $n-m=0$, c'est-à-dire toutes les fois qu'on ne reviendra pas à supposer l'épaisseur constante, l'équation $2^V=V+1$ devra être satisfaite. Cette équation ne peut se vérifier que pour deux valeurs de V, savoir zéro et l'unité. Les développements entre lesquels s'établit notre équation ne peuvent donc avoir que deux termes, et, par conséquent, l'unité est la seule valeur qui puisse être attribuée à l'exposant t.

Pour trouver cette valeur de l'exposant, il n'était pas même indispensable d'étendre l'équivalence entre les épaisseurs variables et les épaisseurs moyennes à toutes les parties comprises entre l'origine et chacun des points de la lame vibrante; il aurait pu suffire de remarquer que les développements de l'un et l'autre membre de l'équation ci-dessus sont composés d'un égal nombre de termes, et que chacun ne diffère de son correspondant que par le changement de 2^V en $V+1$. L'équation $2^V=V+1$ résulterait alors de l'existence de l'équation entre les mêmes développements pour une seule des valeurs de l'ordonnée s; et, d'après ce que nous avons dit plus haut, cette existence, par rapport aux points de limite analytiques, a été reconnue nécessaire afin que la lame puisse exécuter des mouvements réguliers.

En prenant $t=1$, on a

$$2[m(L-s)+ns]=m[2L-(1+1)s]+n(1+1)s,$$

équation identique. Ainsi, les conditions nécessaires à l'existence des vibrations régulières de la lame élastique d'épaisseur variable auront lieu d'elles-mêmes, si on attribue à l'exposant de l'épaisseur la valeur que la simple considération de la nature des forces d'élasticité nous a fait connaître d'avance (*voir* § 2).

Chacune des valeurs de z relative à la lame d'épaisseur variable est, suivant ce qu'on vient de lire, égale à la valeur correspondante de la même ordonnée prise par rapport à une lame dont l'épaisseur constante serait représentée par la formule $\frac{m(2L-s)+ns}{2L}$.

Si L′ est la longueur de cette lame fictive, différente pour chacune des valeurs de s, on devra mettre dans l'intégrale, au lieu de $\frac{ex}{L}$, qui se rapporterait au cas où la lame de longueur L aurait une épaisseur constante, la quantité $\left[\frac{m(2L-s)+ns}{2L}\right]\cdot\frac{s}{L'}$, qui lui est, comme on le voit, entièrement analogue.

8. Nous avons déjà eu occasion de faire observer (§ 3), en examinant les conséquences du choix de la puissance de l'épaisseur qui doit entrer comme facteur dans le coefficient du second terme de l'équation de la lame élastique d'épaisseur constante, que, si e^{2t} représente cette puissance et que L soit la longueur de la lame, les sons correspondant aux différents genres de vibrations seront proportionnels à la quantité $\frac{e^{2t}}{L^2}$.

En faisant, comme on le doit, $t=1$, cette quantité devient $\frac{e^2}{L^2}$; ainsi, dans tous les cas de vibration, deux lames dont les épaisseurs e et e', aussi bien que les longueurs respectives L et L′, satisferont à l'équation $\frac{e^2}{L^2}=\frac{e'^2}{L'^2}$, devront faire entendre les mêmes sons.

La proportion $\frac{m+n}{2}:\frac{m(2L-s)+ns}{2L}::L:L'$ exprime, conformément à ce que nous avons déjà établi, que les longueurs de nos lames fictives sont entre elles comme les épaisseurs correspondantes; il en résulte que l'équation $\frac{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2}{L^2}=\frac{\left[\frac{m(2L-s)+ns}{2L}\right]^2}{L'^2}$ a lieu pour chacune d'elles.

Dans tous les cas de vibration, ces différentes lames rendent donc les mêmes sons que la lame d'épaisseur constante $\frac{m+n}{2}$ et de longueur L. Remarquons à présent que les sons donnés par les divers points d'un corps sonore doivent être semblables entre eux et que, à défaut de cette condition, le corps dont il s'agit ne pourrait faire entendre qu'un bruit confus; nous en conclurons que, chacun des points d'une lame d'épaisseur variable dont l'épaisseur moyenne est exprimée par $\frac{m+n}{2}$ et dont la longueur est L ayant, durant le mouvement, ces deux coordonnées égales à celles d'un point pris, sur une des lames fictives que nous avons considérées, et ne pouvant, par conséquent, donner un son différent de celui qui convient à la même lame, la lame entière d'épaisseur variable rendra les mêmes sons qu'une autre lame de même longueur dont l'épaisseur constante serait égale à l'épaisseur moyenne de la première.

9. S'il ne s'agissait que de justifier le choix du coefficient que nous avons adopté, le seul fait à établir, par rapport aux lames d'inégale épaisseur, serait l'existence des vibrations régulières. En effet, nous venons de voir qu'en admettant tout autre coefficient l'analyse exprimerait l'impossibilité de semblables phénomènes; mais, les conséquences de cette régularité de mouvements dans les lames élastiques d'épaisseur variable nous ayant fait connaître jusqu'aux moindres circonstances des mêmes mouvements, nous nous proposons aussi de comparer, avec quelques détails, les résultats de la théorie à ceux de l'expérience.

Les premiers sont, en adoptant l'exposant convenable, que la lame élastique d'épaisseur variable est susceptible de tous les genres de vibrations qui appartiennent à la lame d'épaisseur constante; que l'inégalité d'épaisseur entre les différents points de la lame vibrante donne lieu au changement de la figure que cette lame affecte durant son mouvement; en sorte que, par rapport à tous les cas de vibrations, la figure dont il s'agit ne peut appartenir à aucune lame uniformément épaisse, quelle que soit d'ailleurs l'épaisseur qu'on veuille lui attribuer. Une telle conclusion paraîtra évidente si l'on se rappelle qu'aucune des lames fictives à la considération desquelles on a eu recours ne peut avoir deux valeurs de l'ordonnée z égales à celles qui, sur la lame d'épaisseur variable, se rapportent à deux points consécutifs. Enfin la théorie annonce encore que l'inégale répartition d'une même épaisseur variable entre les différents points de la lame élastique n'a aucune influence sur les sons correspondant à chaque cas de vibration. Ainsi, tandis que les différences d'épaisseurs moyennes, constantes ou variables, déterminent le changement des sons, sans que les figures correspondantes éprouvent la moindre altération, au contraire, selon qu'on répartit entre les points de la lame une épaisseur moyenne donnée, il arrive que la production d'un son identique se trouve accompagnée de figures différentes.

Voyons maintenant quels sont les faits observés.

Les divers cas de vibrations que présente la lame élastique d'épaisseur constante ont également lieu sur la lame d'épaisseur variable. De part et d'autre, l'intervalle des sons est le même, et chacun d'eux se trouve accompagné de figures nodales composées d'un égal nombre de points de repos. Si, dans chaque cas de vibration, on compare la position des nœuds sur la lame d'épaisseur constante à celle des mêmes nœuds sur la lame d'épaisseur variable, on observe des différences d'intervalles d'autant plus sensibles que celle des épaisseurs extrêmes est plus considérable.

La disposition des lignes de repos sur les pièces dont l'épaisseur varie d'un point à l'autre avait depuis longtemps fixé mon attention; elle m'avait donné lieu de remarquer (*voir* la note, p. 35 de mes *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*) que l'exposant attribué jusqu'à présent à l'épaisseur ne semblait pas devoir fournir, à cet égard, une explication suffisante. J'étais loin de soupçonner alors que le choix de cet exposant dût entraîner d'autres conséquences qu'une inégalité de compensation entre des changements d'épaisseurs moyennes, proportionnels à ceux des longueurs respectives. J'ai fait un grand nombre d'expériences pour vérifier la parfaite égalité de cette compensation, et j'ai mis d'autant plus de soin à mesurer, sur les lames d'épaisseur variable, les distances des lignes nodales, qu'elles étaient d'abord le seul moyen de vérification que j'eusse imaginé.

L'accord le plus satisfaisant entre la théorie et l'expérience s'est constamment manifesté. En effet, les lignes nodales étaient toujours plus distantes de l'extrémité où l'épaisseur était plus considérable que de l'autre extrémité, et dans une telle proportion qu'elle aurait pu suffire pour faire rejeter tout autre exposant que celui que j'avais déjà adopté. Il est sans doute inutile d'ajouter que la position du point de limite, dont l'existence nécessaire nous a conduits à la connaissance des effets de la variabilité de l'épaisseur, était aussi plus distante de celle des extrémités où l'épaisseur se trouvait la plus grande. Plusieurs lames de verre ont été coupées en ce point; les parties séparées ont continué de rendre les mêmes sons, et elles se sont prêtées à tous les cas de vibration qui ont lieu dans les deux moitiés d'une lame d'épaisseur constante.

Non seulement les lames d'épaisseur variable se prêtent à tous les cas de vibration qui appartiennent proprement à la lame d'épaisseur constante, mais aussi, lorsqu'elles ont une largeur suffisante, elles sont susceptibles, comme ces dernières, de vibrer à la manière des plaques. Alors les figures nodales présentent, de part et d'autre, une ligne longitudinale au milieu de sa largeur et un nombre de lignes transversales plus ou moins grand, suivant que les sons correspondants sont plus ou moins aigus. Dans ce genre de vibrations, la position des lignes nodales sur la lame d'épaisseur constante est facile à reconnaître, car l'intervalle entre deux de ces lignes est toujours exactement double de celui qu'on observe entre une des extrémités de la ligne la plus voisine. Dans les autres cas de vibration, la disposition des nœuds est sans doute conforme à la théorie, mais on ne pourrait plus s'en assurer sans recourir à la discussion des formules. Je me suis convaincue qu'à l'aide d'une analyse semblable à celle qui détermine alors la position des lignes nodales sur la lame d'épaisseur constante, on obtiendrait en effet la mesure du déplacement des mêmes lignes sur la lame d'épaisseur variable. Afin d'éviter des longueurs inutiles, je me bornerai à rapporter un seul exemple. Je choisirai l'expérience où, en même temps que la figure nodale composée du plus petit nombre possible de lignes offrait, sur la lame d'épaisseur constante, une disposition dont le moindre dérangement fût devenu sensible, la différence entre les épaisseurs extrêmes donnait lieu, sur la lame d'épaisseur variable, à un déplacement considérable.

Une lame de cuivre, dont la longueur était de $0^{m},245$ et la largeur de $0^{m},028$, les épaisseurs extrêmes comme 1 et 2, a présenté la figure composée d'une ligne longitudinale et de deux lignes transversales; les distances entre les lignes voisines des extrémités et les mêmes extrémités étaient de $0^{m},045$ et $0^{m},075$; l'intervalle entre les deux lignes s'est donc trouvé sensiblement égal à ce qu'il eût été sur la lame d'épaisseur constante.

Il est donc facile de se rendre compte de cette dernière circonstance, car nous avons vu (§ 5) que, quelle que soit l'étendue d'une partie prise au milieu de notre lame, son épaisseur moyenne est toujours égale à celle de la lame entière; il en résulte que la longueur des parties vibrantes ainsi situées doit être la même que sur la lame d'épaisseur constante. A la vérité, ce résultat exigerait, pour être parfaitement exact, que le milieu de la partie vibrante fût en même temps celui de la lame; mais, sous l'influence des causes d'erreur impossibles à éviter, il est difficile que des différences aussi petites deviennent sensibles.

Pour expliquer la position de nos deux lignes nodales par rapport aux extrémités voisines respectives, nous ne pouvons éviter l'emploi des formules. Suivant ce qu'on a vu § 5, la quantité $\frac{m(2L-s)+ns}{2L}$ est l'épaisseur moyenne d'une partie de longueur s, comprise entre l'extrémité d'épaisseur m, d'une lame dont la longueur totale est L, et le point dont s est l'ordonnée, l'épaisseur de l'autre extrémité étant n. Nous avons ici $m = 2$, $n = 1$, $L = 245$, $s = 75$: l'épaisseur moyenne devient donc $\frac{2(490-75)+75}{490} = \frac{905}{490}$. Afin d'appliquer la même formule à l'intervalle compris entre l'autre extrémité de la ligne nodale voisine, nous changerons m en n, et réciproquement, et nous mettrons 45 à la place de 75. Nous aurons ainsi $\frac{490-45+2.45}{490} = \frac{535}{490}$ pour l'épaisseur moyenne correspondante.

Les épaisseurs moyennes des deux parties que nous avons à comparer sont donc entre elles comme 905 est à 535 ou comme 181 est à 107. Suivant la théorie, les épaisseurs doivent être proportionnelles aux longueurs respectives; il en résulterait ici la proportion $181:107::75:45::5:3$; et l'on serait conduit à la condition $535 = 543$. La différence entre les deux membres de cette équation paraîtra bien petite si l'on tient compte de toutes les causes d'erreur inévitables dans de telles expériences. En effet, le moindre changement dans la loi de la variation d'épaisseur influe sur les distances des lignes voisines, et, pour que des différences d'élasticité naturelle viennent compliquer les effets dus à la variation de l'épaisseur, il peut même suffire qu'un des points de la lame ait reçu un coup de marteau plus fort que ceux qui auraient frappé les points voisins.

Dans les nombreuses expériences que j'ai faites, les différences que j'ai observées se sont trouvées tantôt en plus, tantôt en moins; en sorte que, à défaut de l'exactitude parfaite que l'expérience ne peut toujours atteindre, et dont cependant j'ai remarqué quelques exemples, ces différences mêmes peuvent servir à confirmer la théorie. Au surplus, la même chose a lieu par rapport à la position des lignes nodales sur les lames d'épaisseur constante, et les petites irrégularités qu'on aperçoit alors sont du même ordre que celles que nous trouvons ici.

Lorsque, à l'exemple de M. Wheatstone, on fait vibrer une lame couverte d'eau, les ondes dont l'amplitude est égale sur la lame d'épaisseur constante manifestent, sur la lame d'épaisseur variable, l'inégalité que nous avons reconnue entre les différentes valeurs de l'ordonnée z. Deux ondes voisines sont sensiblement égales ; mais on remarque une dégradation évidente lorsqu'on observe, comparativement, les plus proches et les plus éloignées de l'extrémité où l'épaisseur est la plus grande. Ainsi que je l'ai expliqué ailleurs [1], les expériences de ce genre doivent être regardées comme une contre-épreuve de celles de M. Chladni ; elles prouvent également que la figure d'aucune lame vibrante d'épaisseur constante ne peut être semblable à celle qui appartient, dans les mêmes circonstances, à la lame d'épaisseur variable.

Il nous reste à faire connaître les résultats de l'expérience à l'égard de l'influence qu'a sur les sons l'inégale répartition de l'épaisseur entre les différents points de la lame vibrante.

Un grand nombre de faits analogues m'ont prouvé que l'épaisseur moyenne détermine, seule, l'inégalité des sons entre deux lames égales d'ailleurs : je n'ai jamais remarqué la plus petite exception à cette loi. Pour rendre l'expérience plus concluante, je me suis procuré une lame de cuivre fabriquée en même temps que celle dont j'ai parlé plus haut et avec les plus grands soins pour que la différence de ces deux pièces fût uniquement, d'une part, l'égalité d'épaisseur et, de l'autre, la variation de la même épaisseur dans la proportion de 1 à 2, pour les points extrêmes.

Dans tous les cas possibles de vibration, la différence des sons s'est trouvée au-dessous d'un demi-ton : elle était, par conséquent, au-dessous de la limite des erreurs qui ont été regardées comme inévitables, dans les cas même où la possibilité d'employer des pièces de verre

---

[1] Voir la Note A, à la fin du Mémoire.

prises dans le même morceau permet d'écarter l'influence des différences d'élasticité naturelle.

Je ferai observer que ce dernier résultat suffirait seul pour justifier la théorie qui vient d'être exposée, qu'il ne saurait exister dans toute autre supposition et qu'il est une conséquence immédiate de la considération des épaisseurs moyennes.

Nous verrons, dans les paragraphes suivants, qu'une théorie semblable s'applique également aux surfaces d'épaisseur variable.

10. Par rapport aux surfaces, le cas le plus simple qu'on puisse imaginer est celui d'une plaque carrée dont l'épaisseur varierait d'un point à l'autre en raison des distances aux quatre angles de la même plaque, qui présenteraient tous des épaisseurs différentes.

Nous commencerons par déterminer, dans cette hypothèse, l'épaisseur pour chacun des points de la plaque et les épaisseurs moyennes des espaces carrés dont quatre des mêmes points termineraient les angles.

Désignons à la fois par les lettres m, m', n et n' les quatre épaisseurs extrêmes et les angles auxquels elles appartiennent. Soit A la grandeur du côté de la plaque; prenons le point m pour origine; la position des différents points de la surface sera déterminée par leur distance aux deux côtés adjacents mn et mm', qui seront les axes des coordonnées; désignons-les par les lettres s et r.

En opérant ici comme nous l'avons fait § 5, à l'occasion de la lame d'épaisseur variable, les formules $\frac{m(A-s)+ns}{A}$, $\frac{m'(A-s)+ns}{A}$ représenteront les épaisseurs de la plaque dans deux points; le premier placé sur l'axe des s à la distance s de l'origine, le second appartenant au côté parallèle $m'n'$ et distant de la quantité s de l'angle m'.

Quelle que soit la position d'un point pris sur la surface, on peut toujours trouver une valeur de s telle que le point dont on cherche l'épaisseur appartienne à la ligne qui joint les deux points dont les formules précédentes font connaître les épaisseurs.

Supposons qu'il s'agisse d'un point placé aux distances r et s des côtés mn et mm'; l'épaisseur correspondante sera donnée par la formule $\frac{\left[\frac{m(A-s)+ns}{A}\right](A-r)+\left[\frac{m'(A-s)+n's}{A}\right]r}{A}$.

On voit en effet que les épaisseurs extrêmes de la ligne à laquelle appartient le point dont il est question sont employées ici de la même manière que l'ont été les quantités analogues dans les formules précédentes.

En effectuant les développements convenables, nous aurons

$$\frac{\left[\frac{m(A-s)+ns}{A}\right](A-r)+\left[\frac{m'(A-s)+n's}{A}\right]r}{A}$$
$$=\frac{mA^2-mAr-mAs+msr+nAs-nsr+m'Ar-m'sr+n'sr}{A^2}$$
$$=\frac{mA^2-mA(r+s)+A(ns+m'r)+(m-n-m'+n')rs}{A^2}$$

Supposons ensuite que l'épaisseur

$$\frac{mA^2-mA(r+s)+A(ns+m'r)+(m-n-m'+n')rs}{A^2}$$

appartienne au point de la surface situé à l'un des angles d'un espace carré pris sur la même surface; si t est le côté de ce carré, les épaisseurs correspondantes aux trois autres angles seront

$$\frac{mA^2-mA(r+s+t)+A[n(s+t)+m'r]+(m-n-m'+n')(s+t)r}{A^2},$$
$$\frac{mA^2-mA(r+t+s)+A[ns+m'(r+t)]+(m-n-m'+n')s(r+t)}{A^2}$$

et

$$\frac{mA^2-mA(r+t+s+t)+A[n(s+t)+m'(r+t)]+(m-n-m'+n')(s+t)(r+t)}{A^2}.$$

Cherchons à présent quelle est l'épaisseur moyenne de l'espace carré terminé par les lignes qui joignent les quatre angles.

Soit qu'il s'agisse d'une ligne ou d'une surface matérielle d'épaisseur variable, il est clair qu'on trouverait l'épaisseur moyenne convenable à chaque cas si, après avoir pris la somme des épaisseurs de tous les points qui appartiennent soit à la lame, soit à la surface, on divisait cette somme par le nombre des mêmes points.

A l'égard de la lame, les épaisseurs des différents points qu'on parcourt en allant d'une extrémité à l'autre étant en progression arithmétique, si l'on prend la somme des épaisseurs de deux d'entre eux, semblablement placés par rapport aux extrémités respectives, cette somme, divisée par 2, donnera également l'épaisseur moyenne de la ligne entière, et c'est ce que nous avons pratiqué § 5. On voit, au reste, que la première opération n'est autre chose que la somme de celles qu'on peut lui substituer; car on épuiserait toute la ligne en prenant successivement, deux à deux, tous les points qui la composent.

Des remarques semblables peuvent s'appliquer à la plaque carrée d'épaisseur variable. Conformément à ce que nous avons établi plus haut, les épaisseurs des différents points qu'on parcourt en allant d'une extrémité à l'autre des côtés sont en progression arithmétique, et les épaisseurs extrêmes appartiennent aux quatre angles. Il en résulte qu'on aura l'épaisseur moyenne de la plaque entière si, après avoir pris la somme des épaisseurs qui conviennent à quatre points placés semblablement par rapport aux quatre angles, on divise cette somme par 4. La même opération, répétée successivement à toutes les distances possibles des angles, prises sur les côtés, épuisera les lignes matérielles qui appartiennent au contour. La surface restante sera terminée par de nouveaux côtés plus petits que les premiers; on n'aura plus qu'à continuer des opérations du même genre pour arriver enfin au centre de la plaque, et l'épaisseur en ce point sera aussi exprimée par la même formule.

Ce qu'on vient de lire est également applicable à tout espace de même forme pris sur la plaque carrée. Il est évident en effet, d'après la loi de variation à laquelle sont assujettis les différents points de cette surface, qu'il est permis de la diviser par un nombre égal de lignes parallèles à chacun des côtés sans que les résultats précédents reçoivent la moindre modification.

Nous venons de voir que chacune des opérations indiquées conduirait à la même formule et que cette formule exprimerait l'épaisseur moyenne de la surface carrée. On peut en conclure que les différents espaces de même forme, dont le centre se confond avec celui de la plaque et dont les côtés sont plus ou moins distants de ce point, ont tous la même épaisseur moyenne, et que cette épaisseur est égale à celle du centre même qui sert ici de limite.

Observons que cette conclusion est parfaitement analogue à ce que nous avons trouvé § 5, relativement à la lame d'épaisseur variable.

L'expression de l'épaisseur moyenne soit de la plaque entière, soit d'une de ses parties carrées, se présentera sous la forme la plus simple qu'elle puisse recevoir si les quatre épaisseurs qui doivent y entrer sont prises aux angles mêmes de la surface.

En faisant usage des formules ci-dessus, nous aurons ainsi, pour l'épaisseur moyenne de la petite surface carrée dont le côté est t,

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\left\{\begin{array}{l} 4m\mathrm{A}^2 - m\mathrm{A}[r+s+2(r+s+t)+r+s+2t] \\ \quad + \mathrm{A}(n\{2s+2(s+t)+m'[2r+2(r+t)]\}) + (m-n-m'+n')[st+(s+t)r+(r+t)s+(s+t)(r+t)] \end{array}\right\}}{4\mathrm{A}^2} \\ &= \frac{4m\mathrm{A}^2 - 2m\mathrm{A}(2r+t+2s+t) + 2\mathrm{A}[n(2s+t)+m'(2r+t)] + (m-n-m'+n')(2r+t)(2s+t)}{4\mathrm{A}^2}. \end{aligned}\right.$$

Si la surface dont nous parlons a un angle commun avec la plaque entière, la formule (A) deviendra elle-même beaucoup plus simple. En effet, quand on prend successivement $r = 0$, $s = 0$; $r = 0$, $s = \mathrm{A}$; $r = \mathrm{A}$, $s = 0$, et $r = \mathrm{A}$, $s = \mathrm{A}$, en ayant toutefois soin d'écrire $2\mathrm{A} - t$ au lieu de $2\mathrm{A} + t$, pour satisfaire aux changements supposés dans les situations relatives à l'origine, cette formule donne, après les réductions convenables,

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{4m\mathrm{A}^2 - 4m\mathrm{A}t + 2\mathrm{A}(nt+m't) + (m-n-m'+n')t^2}{4\mathrm{A}^2}, \\ &\frac{4n\mathrm{A}^2 - 4n\mathrm{A}t + 2\mathrm{A}(mt+n't) + (n-m-n'+m')t^2}{4\mathrm{A}^2}, \\ &\frac{4m'\mathrm{A}^2 - 4m'\mathrm{A}t + 2\mathrm{A}(mt+n't) + (m'-n'-m+n)t^2}{4\mathrm{A}^2}, \\ &\frac{4n'\mathrm{A}^2 - 4n'\mathrm{A}t + 2\mathrm{A}(nt+m't) + (m-n-m'+n')t^2}{4\mathrm{A}^2}. \end{aligned}\right.$$

Les formules (B) expriment les épaisseurs moyennes de quatre espaces carrés de grandeurs égales, pris aux angles de la surface.

Lorsque l'on fait $t = \mathrm{A}$, les quatre petites surfaces se réduisent à une seule, qui n'est autre chose que celle de la plaque entière. Les formules (B) deviennent alors identiques, et elles donnent $\frac{m+m'+n+n'}{4}$ pour l'expression de l'épaisseur moyenne de cette surface. Indépendamment de toute supposition particulière sur la valeur de t, on arriverait, comme il est facile de le voir, au même résultat en prenant la somme des quatre formules (B) et en divisant cette formule par 4.

Pour se rendre raison de cette identité de résultats, il suffira, après ce que nous avons vu plus haut, de remarquer que les quatre espaces dont les épaisseurs moyennes servent en dernier lieu à trouver celle de la plaque entière sont occupés par autant de groupes composés d'un égal nombre de points matériels semblablement placés par rapport aux angles respectifs de cette surface.

Les épaisseurs moyennes de deux côtés opposés étant $\frac{m+n}{2}$ et $\frac{m'+n'}{2}$, leur somme, divisée par 2, donnera aussi la même formule : ces deux côtés peuvent en effet être considérés aussi comme deux groupes composés d'un égal nombre de points matériels également situés par rapport au centre de la plaque. Cette dernière opération, comparée à celles qui nous ont donné les épaisseurs moyennes des simples lignes matérielles, montrent que les côtés remplacent ici les points extrêmes relatifs au cas linéaire. La même opération peut donc être regardée comme la somme de celles qui seraient pratiquées sur toutes les lignes matérielles perpendiculaires aux côtés dont il s'agit.

Sous ce point de vue, il devient clair que le rapport entre la grandeur des côtés et leur distance ne peut entraîner aucun changement dans le procédé qui doit faire connaître l'épaisseur moyenne du parallélogramme auquel ils appartiennent.

Il ne l'est pas moins que les épaisseurs aux quatre angles entrent toutes également dans la formule qu'on obtient. Nous en conclurons que, quel que soit le rapport entre les différents côtés d'un espace parallélogramme pris sur notre surface carrée, des formules analogues aux précédentes nous feront connaître les épaisseurs moyennes correspondantes.

Soient t et t' les grandeurs des côtés adjacents à l'angle du parallélogramme dont les coordonnées sont r et s; les épaisseurs aux quatre angles seront exprimées par les formules suivantes :

$$(\mathrm{C})\left\{\begin{aligned}
&\frac{mA^2 - mA(r+s) + A(ns+m'r) + (m-n-m'+n')rs}{A^2},\\
&\frac{mA^2 - mA(r+s+t) + A[n(s+t)+m'r] + (m-n-m'+n')(s+t)r}{A^2},\\
&\frac{mA^2 - mA(r+t'+s) + A[ns+m'(r+t)] + (m-n-m'+n')(r+t')s}{A^2},\\
&\frac{mA^2 - mA(r+t'+s+t) + A[n(s+t)+m'(r+t)] + (m-n-m'+n')(r+t')(s+t)}{A^2}.
\end{aligned}\right.$$

Leur somme, divisée par 4, se réduit à

$$\left\{\frac{4mA^2-2mA(2r+t'+2s+t)+2A[n(2s+t)+m'(2r+t')]+(m-n-m'+n')(2r+t')(2s+t)}{4A^2}.\right.$$

Cette formule représente l'épaisseur moyenne dans l'espace parallélogramme, et, pour la rendre identique à la formule (B), il suffira de faire $t=t'$.

Lorsqu'on prend successivement $r=0$, $s=0$; $r=A$, $s=0$; $r=0$, $s=A$ et $r=A$, $s=A$, en ayant soin d'écrire $2A-t$, $2A-t'$ au lieu de $2A+t$, $2A+t'$, cette formule donne, après les réductions convenables,

$$(E)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{4mA^2-2mA(t+t')+2A(nt+m't)+(m-n-m'+n')tt'}{4A^2},\\
&\frac{4nA^2-2nA(t+t')+2A(mt'+n't)+(n-m-n'+m')tt'}{4A^2},\\
&\frac{4m'A^2-2m'A(t+t')+2A(mt'+n't)+(m'-n'-m+n)tt'}{4A^2},\\
&\frac{4n'A^2-2n'A(t+t')+2A(nt+m't')+(n'-m'-n+m)tt'}{4A^2}.
\end{aligned}\right.$$

Celles-ci expriment les épaisseurs moyennes de quatre surfaces parallélogrammes, prises aux angles de la plaque et égales entre elles.

Si l'on voulait avoir les épaisseurs moyennes des deux diagonales du parallélogramme à l'un des angles duquel appartiennent les coordonnées r et s, il faudrait prendre les sommes de celles des formules (D) qui se rapportent aux angles opposés et les diviser par 2; il en résulterait les formules suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{2mA^2-mA(2r+t'+2s+t)+A[n(2s+t)+m'(2r+t')]+(m-n-m'+n')[rs+(r+t')(s+t)]}{2A^2},\\
&\frac{2mA^2-mA(2r+t'+2s+t)+A[n(2s+t)+m'(2r+t')]+(m-n-m'+n')[r(s+t)+s(r+t')]}{2A^2}.
\end{aligned}\right.$$

Il existe un cas fort remarquable dans lequel les différentes formules auxquelles on vient d'être conduit reçoivent une grande simplification ; c'est celui où les épaisseurs extrêmes m, n, m' et n' sont en progression arithmétique. En prenant alors $m = d + 3\delta$, $n = d + 2\delta$, $m' = d + \delta$ et $n' = d$, il est visible que les termes dont $m - n - m' + n'$ est facteur disparaissent d'eux-mêmes. Les deux formules (F) sont donc semblables entre elles, et la formule (D) leur est identique. Dans les suppositions présentes, les épaisseurs moyennes des deux lignes matérielles diagonales d'un parallélogramme quelconque pris sur la surface carrée sont, par conséquent, égales entre elles, et elles sont aussi égales à l'épaisseur moyenne du même parallélogramme.

Si l'épaisseur variait dans un seul sens, c'est-à-dire si l'on avait $m = m'$, $n = n'$, le facteur $m - n - m' + n'$ se réduirait encore à zéro; et, par conséquent, les épaisseurs moyennes des deux diagonales et du parallélogramme auquel elles appartiennent seraient aussi égales entre elles.

Les formules précédentes vont nous servir à trouver les conditions du mouvement régulier par rapport à la plaque élastique d'épaisseur variable.

11. En traitant du cas linéaire, nous avons déterminé, par la considération des conditions nécessaires à l'existence des mouvements réguliers, l'exposant de la puissance de l'épaisseur qui multiplie la variable dans l'intégrale. Il serait facile de suivre ici la même marche, mais elle entraînerait de longs calculs; il sera plus simple de regarder d'abord l'exposant de l'épaisseur comme étant connu et de montrer ensuite que les résultats obtenus ne pourraient avoir lieu dans aucune autre supposition. Observons que cette manière de procéder est d'autant plus naturelle, qu'on ne saurait admettre que la puissance de l'épaisseur soit différente par rapport aux surfaces de ce qu'on l'a trouvée par rapport aux simples lames.

Lorsqu'il s'agit d'une surface d'épaisseur constante, l'intégrale qui fournit les différentes valeurs de l'ordonnée z est fonction des deux autres coordonnées x et y.

Par rapport à la plaque carrée dont le côté et l'épaisseur sont A et e, on peut indifféremment écrire, dans l'intégrale, ou $\frac{ex}{A}$, $\frac{ey}{A}$ ou $\frac{x}{A}$, $\frac{y}{A}$, pourvu que, dans ce dernier cas, la quantité e^2 se retrouve comme facteur dans le coefficient des derniers termes de l'équation différentielle. Lorsque l'épaisseur varie d'un point à l'autre de la surface, cette dernière manière d'envisager la question cesse d'être applicable. Nous allons chercher quelles sont alors les formules qui doivent remplacer les quantités $\frac{ex}{A}$, $\frac{ey}{A}$ dans la fonction qui exprime les différentes valeurs de z.

Il règne la plus grande analogie entre le cas présent et celui que nous avons déjà examiné. Quand il était question d'une simple lame, l'épaisseur variait d'un point à l'autre, en raison seulement des changements des distances aux extrémités linéaires.

Par rapport à un point donné, il a suffi de multiplier, sous le signe intégral, la différentielle de l'ordonnée qui mesurait la distance de ce point à l'extrémité prise pour origine, par l'épaisseur de la lame au même point. En prenant ensuite la somme de ce produit, on a obtenu une formule applicable à tous les points de la lame, formule parfaitement analogue à celle qu'on peut employer lorsque l'épaisseur est supposée constante.

Nous allons nous occuper, non plus seulement d'une ligne matérielle élastique, mais d'une surface carrée. Chacun des points qui la composent appartient également aux deux lignes matérielles parallèles aux côtés, qui se croisent au même point, et l'épaisseur varie en raison des distances aux deux axes des coordonnées, axes que nous avons déjà désignés par les lettres s et r, pour les distinguer de ceux qui appartiennent à la plaque d'épaisseur constante.

Si e' représente l'épaisseur d'un des points, en le considérant d'abord comme appartenant à une ligne parallèle à l'axe des r, on aura la formule $\int e'dr$, semblable à celle qui convient au cas linéaire. Le même point appartient en même temps à une ligne parallèle à l'axe des s; en le prenant isolément, on doit multiplier l'épaisseur qui lui convient par la différentielle de s. Observons que la formule $\int e'dr$ remplace ici le produit ey de l'épaisseur par l'ordonnée et que ce produit, divisé par y, donne l'épaisseur e : nous verrons alors que la formule $\int e'dr$, divisée par r, donnera l'épaisseur du point dont il s'agit, en tant qu'il est regardé comme appartenant déjà à la ligne parallèle à l'axe des r, que la formule $\frac{\int e'\,dr}{r}\,ds$ conviendra au même point et que la somme $\int\left(\frac{\int e'\,dr}{r}\right)ds$, applicable à tous les points de la plaque d'épaisseur variable, remplacera la quantité ex, qui convient à la plaque d'épaisseur constante.

Par des raisonnements semblables on trouvera que, dans l'intégrale relative à la plaque d'épaisseur variable, la formule $\int\left(\frac{\int e'\,ds}{s}\right)dr$ doit remplacer la quantité ey, qui appartient au cas où l'épaisseur de la surface est supposée constante.

Le point auquel nous avons attribué l'épaisseur e' est celui dont les coordonnées sont r et s; par conséquent, les formules (C) donnent

$$e' = \frac{mA^2 - mA(r+s) + A(ns+m'r) + (m-n-m'+n')rs}{A^2}.$$

On en conclut

$$\frac{\int e'\,dr}{r} = \frac{mA^2 - mA(\frac{1}{2}r+s) + A(ns+m'\frac{1}{2}r) + (m-n-m'+n')\frac{1}{2}rs}{A^2}$$
$$= \frac{2mA^2 - mA(r+2s) + A(2ns+m'r) + (m-n-m'+n')rs}{2A^2},$$
$$\int\left(\frac{\int e'\,dr}{r}\right)ds = \frac{2mA^2 - mA(r+s) + A(ns+m'r) + (m-n-m'+n')\frac{rs}{2}}{2A^2}s$$
$$= \frac{4mA^2 - 2mA(r+s) + 2A(ns+m'r) + (m-n-m'+n')rs}{4A^2}s.$$

On conclut également de la même valeur de e'

$$\frac{\int e'\,ds}{s} = \frac{2mA^2 - mA(2r+s) + A(ns+2m'r) + (m-n-m'+n')rs}{2A^2},$$
$$\int\left(\frac{\int e'\,ds}{s}\right)dr = \frac{4mA^2 - 2mA(r+s) + 2A(ns+m'r) + (m-n-m'+n')rs}{4A^2}r.$$

Suivant les formules (E), la valeur qu'on vient de trouver pour les deux quantités $\int\left(\frac{\int e'\,dr}{r}\right)ds$, $\int\left(\frac{\int e'\,ds}{s}\right)dr$, divisées respectivement par s et par r, exprime l'épaisseur moyenne de l'espace parallélogramme dont un des angles est commun avec l'angle m de la surface et dont les côtés s et r sont les coordonnées de l'angle opposé au premier.

Il est clair qu'à chaque nouvelle valeur de r et de s correspond un parallélogramme différent, et par conséquent aussi une épaisseur moyenne différente. En continuant de désigner par e et A l'épaisseur et le côté de la plaque carrée dont l'épaisseur constante est égale à l'épaisseur moyenne de la surface qui fait l'objet de nos recherches, nous nommerons E l'épaisseur moyenne correspondant à une valeur donnée de s et r; la longueur A′, qui sera le quatrième terme de la proportion $e : A :: E : A'$; appartiendra au côté d'une plaque carrée dont l'épaisseur constante serait E.

Dans la fonction qui donne les valeurs de z relatives à la plaque d'épaisseur variable, on devra écrire $\frac{Es}{A'}$, $\frac{Er}{A'}$. Chacune de ces valeurs appartiendra en même temps à autant de plaques fictives dont les côtés et les épaisseurs seront A′ et E.

De ce que nous avons dit plus haut il résulte que les sons correspondant à chacun des cas de vibration dont une plaque carrée est susceptible sont en raison directe de l'épaisseur et en raison inverse du carré du côté de la même plaque.

La proportion $e : A :: E : A'$ donne lieu à l'équation $\frac{e^2}{A^2} = \frac{e'^2}{A'^2}$; dans tous les cas de vibration, les sons rendus par chacune des plaques fictives dont nous venons de parler sont donc les mêmes que ceux qui appartiennent, sous les mêmes conditions, à la plaque carrée dont l'épaisseur et le côté sont e et A.

Lorsqu'un corps sonore est susceptible de vibrations régulières, le son rendu par chacun de ses points ne saurait être différent de celui que fait entendre le corps entier; chacun des points de la plaque d'épaisseur variable qui exécute les mêmes mouvements que s'il appartenait à une de nos plaques fictives doit donc rendre les mêmes sons que ces plaques, et par conséquent aussi les mêmes sons que la plaque dont l'épaisseur constante et le côté sont e et A. Il s'ensuit que deux plaques carrées dont les côtés sont égaux et dont les épaisseurs moyennes sont égales aussi donnent, dans les mêmes cas de vibration, des sons semblables, quoique l'épaisseur soit constante dans l'une et variable dans l'autre.

De ce qu'on vient de voir on peut encore conclure que, si l'inégale distribution de l'épaisseur entre les différents points d'une plaque carrée ne donne lieu à aucun changement par rapport aux phénomènes sonores, elle change au contraire tellement les figures que la surface affecte durant ses divers mouvements, qu'aucune plaque d'épaisseur constante ne pourrait se ployer aux mêmes figures.

12. En se bornant à la loi de variation qui sert de base aux recherches précédentes, les résultats que nous venons d'exposer renferment la théorie de la plaque d'épaisseur variable.

Dans les formules $\int\left(\frac{\int e'\,dr}{r}\right)ds$, $\int\left(\frac{\int e'\,ds}{s}\right)dr$, nous avons pris, comme on le doit, $t = 1$, et cette valeur, dont l'exactitude nous était déjà connue, nous a conduits à la considération des épaisseurs moyennes.

Ainsi que nous avons déjà eu occasion de le dire, la compensation qui s'établit, durant le mouvement de la plaque d'épaisseur variable, entre les épaisseurs moyennes des parties qui la composent et l'étendue des mêmes parties, aurait pu être présentée comme une condition indispensable de la possibilité des mouvements réguliers de la surface, et nous serions également parvenus à en conclure la nécessité de l'équation $t = 1$.

En effet, l'existence des lignes de limite, dans tous les cas de vibrations régulières, aurait servi à prouver la compensation entre l'épaisseur moyenne et l'étendue des parties que ces lignes séparent.

Si on eût voulu remonter plus haut, il eût été facile de se passer de la considération des lignes de limite : il eût suffi d'admettre qu'un même cas de vibration, considéré dans deux surfaces d'épaisseur et d'étendue différentes, donne lieu à l'existence du même nombre de valeurs homologues de l'ordonnée z; chacune de ces valeurs aurait pu alors être employée avec autant d'avantage que les lignes de limite pour déterminer, dans le cas d'une épaisseur variable, quel est le point de la surface auquel elles appartiennent, et la compensation que nous avons en vue n'aurait pas semblé moins nécessaire.

Remarquons que les expériences imaginées par M. Wheatstone rendent sensible l'existence des valeurs homologues de l'ordonnée z. Le nombre des ondes qui se manifestent dépend de celui de ces valeurs, et l'amplitude des mêmes ondes fait connaître la distance des points auxquels elles appartiennent.

Cette manière d'envisager la question est donc appuyée sur la nature intime des mouvements de vibration, et, en ayant recours à la considération des lignes de limites, on ne fait autre chose que de choisir pour exemple des valeurs particulières de l'ordonnée z.

Les compensations nécessaires à l'existence des mouvements réguliers de la plaque d'épaisseur variable une fois admises conduiraient ensuite à déterminer la valeur de t dans les formules $\int\left(\frac{\int e^t dr}{r}\right) ds$, $\int\left(\frac{\int e^t ds}{s}\right) dr$.

En se contentant même d'observer que de telles compensations exigent qu'on puisse satisfaire aux équations suivantes,

$$\int\left\{\frac{\int\left[\frac{mA^2 - mA(r+s) + A(ns + m'r) + (m - n - m' + n')rs}{A^2}\right]^t dr}{r}\right\} ds$$
$$= \frac{[4mA^2 - 2mA(r+s) + 2A(ns + m'r) + (m - n - m + n)rs]^t}{4A^2} s,$$
$$\int\left\{\frac{\int\left[\frac{mA^2 - mA(r+s) + A(ns + m'r) + (m - n - m' + n')rs}{A^2}\right]^t ds}{s}\right\} dr$$
$$= \frac{[4mA^2 - 2mA(r+s) + 2A(ns + m'r) + (m - n - m' + n')rs]^t}{4A^2} r,$$

on verra clairement que l'unité est la seule valeur qui puisse être attribuée à l'exposant t. On conclura donc ici, comme on l'a fait dans le cas linéaire, que, en adoptant toute autre valeur, l'analyse exprimerait, à l'égard des plaques d'épaisseur variable, l'impossibilité des phénomènes sonores.

Quand l'épaisseur varie seulement dans le sens d'un des axes, c'est-à-dire quand on a à la fois $m = m'$, $n = n'$, les formules qui sont propres à la surface deviennent applicables soit à la lame d'épaisseur constante, soit à la lame d'épaisseur variable, selon qu'on regarde comme constante l'une ou l'autre des ordonnées s et r. Ce qui arrive alors est entièrement analogue à ce qui a lieu entre les plaques et les lames d'épaisseur constante. Aucun rapport semblable ne saurait exister entre les formules qui appartiennent à la surface dont l'épaisseur varie en raison des distances de chacun de ses points aux quatre angles supposés d'épaisseurs différentes et celles des lames auxquelles la même surface se trouverait réduite si l'on faisait abstraction d'une de ses dimensions. En effet, la loi de la variation suppose alors l'existence des quatre angles de la surface; il y aurait donc une contradiction manifeste si l'on voulait ensuite faire abstraction de deux d'entre eux.

Les conséquences de la théorie que nous venons d'établir sont :

Que les plaques d'épaisseur variable doivent être susceptibles de tous les genres de vibrations qui appartiennent aux plaques d'épaisseur constante;

Que deux plaques, d'ailleurs semblables, dont l'épaisseur moyenne, égale de part et d'autre, est constante dans l'une et variable dans l'autre, doivent, dans les mêmes cas de vibration, faire entendre les mêmes sons;

Enfin que les figures correspondantes qu'affectent les deux surfaces, et par conséquent aussi les figures nodales qui servent à faire distinguer les premières, doivent présenter des différences propres à faire reconnaître la compensation qui s'établit, pendant le mouvement, entre les épaisseurs moyennes des différentes parties de la plaque d'épaisseur variable et l'étendue des mêmes parties.

Il reste à rendre compte des résultats de l'expérience.

13. Il m'a été très difficile de me procurer des plaques où l'épaisseur fût répartie selon la loi qui fait l'objet de mes recherches; et, quoique j'aie borné ma demande au cas le plus simple qui y est compris, l'exécution en paraissait impossible. Je dois à l'obligeance de M. d'Arcet [1]

---

[1] D'Arcet était très lié avec la famille de Sophie Germain. Il nous a semblé à propos de reproduire ici la Lettre suivante :

A Monsieur d'Arcet, à la Monnaie, Paris.

« Monsieur,

» J'ai lu avec intérêt le petit Mémoire que vous avez joint au joli échantillon que vous avez eu la bonté de m'envoyer [1]. J'admire toujours avec quelle sagacité vous faites servir vos nombreuses connaissances à tous les genres d'utilités. Combien sont rares et précieux les hommes qui savent faire de leur talent un bienfait pour la société!

» Je prends la liberté de vous adresser un exemplaire de mon petit Mémoire. Je n'espère guère qu'il puisse vous intéresser; aussi trouverai-je fort bon que vous le mettiez derrière le feu s'il vous embarrasse.

» J'aurai peut-être recours à votre complaisance pour savoir si je pourrais trouver quelque ouvrier qui sût donner au verre les différentes courbures qui seraient nécessaires aux expériences que je veux faire. J'ai dépensé 100[fr] l'année dernière sans pou-

[1] Il s'agit du Mémoire de MM. d'Arcet et Thenard, intitulé *De l'emploi des corps gras comme hydrofuge dans la peinture sur pierre et sur plâtre et dans l'assainissement des lieux bas et humides.* Ce Mémoire, publié pour la première fois dans les *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXXII. p. 24 (1826), a depuis été réimprimé plusieurs fois.

de m'avoir fait connaître un mécanicien habile, M. Moulfarine, qui a bien voulu se charger de ce travail.

Après une attente de trois mois, j'ai obtenu dix pièces dans lesquelles la même épaisseur moyenne était répartie de trois manières différentes. Dans les premières l'épaisseur aux quatre angles était comme 4, 2, 2 et 1; l'épaisseur moyenne était donc comme $\frac{9}{4}$. Dans les secondes, l'épaisseur aux quatre angles était comme 2, 2, 1 et 1. Enfin, dans les troisièmes, l'épaisseur constante était aussi comme $\frac{9}{4}$.

Toutes ces pièces ont été usées à la lime, pour être amenées aux épaisseurs exigées. Malgré l'exactitude sur laquelle je comptais, j'avais prévu l'impossibilité de reconnaître, par rapport aux points intérieurs, si la loi était scrupuleusement observée, et, comme je ne doutais pas que les moindres différences n'amenassent des distorsions dans les figures nodales, j'ai désiré avoir un nombre plus grand de plaques d'épaisseur constante que de plaques d'épaisseur variable.

Par cette précaution, les chances d'imperfection étant égales entre toutes les surfaces, soit d'épaisseur constante, soit d'épaisseur variable, j'ai acquis le moyen de distinguer les effets dus à la loi qui est l'objet de nos expériences de ceux que pouvait produire le défaut des pièces.

Dans les dix plaques, la grandeur du côté était très exactement de $0^{m},100$; je n'ai remarqué que de faibles différences entre leurs poids, et les épaisseurs aux quatre angles étaient aussi telles que je les avais demandées.

Les expériences dont je vais rendre compte ont été faites sur trois pièces dont les poids étaient parfaitement égaux et où les épaisseurs étaient réparties suivant les trois modes que je viens d'appliquer. Ainsi, dans la première, l'épaisseur variait suivant deux directions; dans la seconde, suivant une seule; et dans la troisième ce genre de variation était nul. Ces pièces seront désignées à l'avenir par les trois lettres W, V et C.

---

voir obtenir autre chose que des fragments informes et d'un verre tellement recuit, qu'il était devenu impossible de le couper au diamant sans le casser en d'autres endroits.

» Agréez, Monsieur, mes remercîments et mes très humbles compliments.

» S. GERMAIN.

» Ce 19 juillet. »

La théorie veut que les plaques d'épaisseur variable soient susceptibles de tous les genres de vibrations qui appartiennent aux plaques d'épaisseur constante.

L'expérience n'a présenté aucune exception à ce fait; les intervalles entre les sons correspondant à chaque cas de vibration des plaques d'épaisseur variable ont toujours été les mêmes qu'avec les plaques d'épaisseur constante, et, si les figures nodales ont montré des distorsions sur les premières, des distorsions analogues ont été observées sur les secondes.

Non seulement les plaques d'épaisseur variable doivent se prêter aux différents genres de vibrations qui ont lieu par rapport à celles dont l'épaisseur est constante, mais même, toutes les fois que l'épaisseur moyenne est égale de part et d'autre, les sons produits par ces vibrations doivent être les mêmes.

Cette indication de la théorie a été également confirmée par l'expérience.

Dans tous les cas de vibration auxquels elles se sont prêtées, les plaques W et C ont fait entendre exactement les mêmes sons. Il n'y a eu qu'une seule exception correspondant à la *fig.* 67 de Chladni : alors le son rendu par la plaque W était d'un demi-ton plus bas que celui qui appartenait aux deux autres plaques. Dans les deux premiers cas de vibration, la plaque V, comparée aux précédentes, a donné un ton et demi et un ton d'intervalle; ces deux sons étaient alors plus élevés qu'avec les pièces W et C. Dans les cas suivants, les trois pièces étaient à l'unisson.

J'ai comparé sous le même rapport trois plaques d'épaisseur constante, choisies parmi celles qui avaient exactement le même poids. Deux de ces pièces ont donné, dans le premier cas de vibration, l'intervalle d'un demi-ton; la troisième a présenté, toujours dans les deux premiers cas de vibration, la différence de deux tons et demi et deux tons. Dans les cas suivants, les sons se sont rapprochés; mais j'ai observé plusieurs fois des différences qui n'avaient pas eu lieu avec les pièces où l'épaisseur était diversement répartie. A la vérité, l'inspection des figures nodales m'a donné lieu de penser que, parmi les pièces qui étaient à ma disposition, celles que j'ai désignées par les lettres W, V et C étaient les plus parfaites.

Malgré cette raison de préférence, ces pièces ont encore montré, dans presque tous les cas de vibration, des distorsions très sensibles; aussi n'espérais-je pas d'abord obtenir des résultats aussi satisfaisants par leur constance et par leur exactitude.

Après avoir prouvé que l'inégale répartition de l'épaisseur n'a aucune influence sur les sons, il nous reste à examiner si, conformément à la théorie, les figures nodales qui accompagnent les mêmes sons sur la plaque d'épaisseur variable et sur celle d'épaisseur constante présentent en effet des différences propres à faire reconnaître la compensation qui s'établit, pendant le mouvement, entre les épaisseurs moyennes des différentes parties de la plaque d'épaisseur variable et l'étendue des mêmes parties.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que les valeurs des coordonnées z, s et r et les sons correspondants, considérés sur la plaque d'épaisseur variable dont l'épaisseur moyenne et le côté sont e et A, se trouvent nécessairement les mêmes que s'ils appartenaient à une plaque fictive dont l'épaisseur constante et le côté seraient E et A.

Il s'ensuit que les grandeurs réelles de deux valeurs homologues, l'une de x et l'autre de s, sont entre elles comme celles des côtés A et A'.

Cela posé, l'épaisseur en un point de la plaque d'épaisseur variable pouvant être considérée comme constante, rien n'empêche de déterminer toutes les circonstances du mouvement de ce point en lui appliquant les formules qui conviennent à la plaque fictive dont l'épaisseur constante et le côté sont E et A.

Prenons pour exemple les figures nodales qui appartiennent aux premiers cas de vibration contenus dans les formules

$$z = \cos\frac{p.\pi x}{\mathrm{A}}\cos\frac{q.\pi y}{\mathrm{A}},$$

$$z = \cos\frac{p.\pi s}{\mathrm{A}'}\cos\frac{q.\pi r}{\mathrm{A}'}.$$

En faisant $p = 1$, $q = 1$, les figures se réduisent à deux lignes nodales perpendiculaires entre elles et parallèles aux côtés.

Sur la plaque d'épaisseur constante, les deux lignes se croisent au centre de la surface, et chacune d'elles est terminée, aux côtés de la même surface, à égale distance des deux angles opposés.

Afin d'éviter l'emploi des formules plus compliquées, nous nous contenterons, dans ce premier exemple, de déterminer, par la considération des points qui appartiennent aux côtés de la même plaque, la position des deux lignes nodales sur la plaque d'épaisseur variable.

Les valeurs homologues de s et x sont entre elles comme les côtés des plaques auxquelles ces valeurs se rapportent. On a donc la proportion $x : s :: e : \mathrm{E}$.

Sur la plaque d'épaisseur constante, la valeur de x est $\frac{\mathrm{A}}{2} = 0^{\mathrm{m}},050$; l'épaisseur moyenne du côté qui joint sur la plaque W les angles 4 et 2 est comme 3; et l'épaisseur E est donnée ici par la formule linéaire

$$\frac{m(2\mathrm{A}-s)+ns}{2\mathrm{A}} = \frac{4.200-2s}{200}.$$

On a donc

$$50 : s :: 3 : \frac{400-s}{100}, \quad 3s = \frac{400-s}{2}, \quad s = \frac{400}{7} = 57 + \frac{1}{7}.$$

Par conséquent, la ligne qui se termine au côté de la plaque W, dont les angles 4 et 2 sont les points extrêmes, doit être à la distance de $0^{\mathrm{m}},057$ de l'angle 4 et de $0^{\mathrm{m}},043$ de l'angle 2.

Cette figure a été très irrégulière sur la plaque W et sur presque toutes les autres pièces tant d'épaisseur constante que d'épaisseur variable; cependant une seconde plaque, dont les épaisseurs extrêmes étaient comme sur la plaque W, a montré des distorsions moins grandes; les lignes nodales se sont formées à $0^{\mathrm{m}},055$ de l'angle 4, sur les deux côtés 4, 2.

La différence qu'on remarque ici entre la position indiquée par l'expérience et celle qui a été observée doit, quoique peu considérable, être attribuée à l'imperfection des pièces. Pour s'en convaincre, il suffit d'appliquer la même analyse au cas déjà pris pour exemple à l'occasion de la simple lame

On avait

$$\mathrm{A} = 245, \quad x = \frac{245}{4}, \quad m = 2, \quad n = 1, \quad e = \frac{3}{2},$$
$$\frac{m(2\mathrm{A}-s)+ns}{2\mathrm{A}} = \frac{2(2.245-s)+s}{2.245} = \frac{980-s}{2.245};$$

la proportion

$$\frac{245}{4} : s :: \frac{3}{2} : \frac{980 - s}{2.245}$$

aurait donné

$$3s = \frac{980 - s}{4}, \quad s = \frac{980}{13} = 0^{\mathrm{m}},075 + \frac{5}{13}.$$

En changeant m en n et réciproquement dans la formule

$$\frac{m(2A - s) + ns}{2A},$$

cette formule aurait servi à faire connaître la position de la ligne voisine de l'extrémité dont l'épaisseur est comme 1; elle serait devenue

$$\frac{2.245 - s + 2s}{2.245}.$$

On aurait donc eu la proportion

$$\frac{245}{4} : s :: \frac{2}{3} : \frac{490 + s}{2.245},$$

d'où résulte

$$3s = \frac{490 + s}{4}, \quad s = \frac{490}{11} = 0^{\mathrm{m}},044 + \frac{6}{11}.$$

On peut voir, § 9, que la position des deux lignes nodales s'est trouvée exactement conforme à celles que les formules viennent de nous indiquer.

Observons qu'on peut employer, dans les expériences relatives aux simples lames, des pièces dont la longueur est plus grande que le côté des plaques qui rendent des sons perceptibles et que, par conséquent, le fait dont il s'agit est plus propre qu'aucun autre à mettre la théorie à l'épreuve. Le procédé qu'on vient d'employer est plus rigoureux que celui dont on a fait usage dans le paragraphe cité, aussi rend-il plus frappant l'accord de l'expérience.

Pour le second cas de vibration renfermé dans les formules

$$z = \cos\frac{p.\pi x}{A}\cos\frac{q.\pi y}{A},$$

$$z = \cos\frac{p.\pi s}{A'}\cos\frac{q.\pi y}{A'},$$

on a $p = 1$, $q = 2$; par conséquent, la figure nodale est composée d'une seule ligne parallèle à deux des côtés de la plaque et de deux autres lignes perpendiculaires à la première.

Sur la plaque d'épaisseur constante, la distance des lignes parallèles entre elles devant être double de celle qui sépare de l'extrémité voisine chacune de ces lignes, elles se forment à $0^m,025$ des mêmes extrémités, c'est-à-dire à $0^m,025$ et $0^m,075$ de celle des extrémités qui a été prise pour origine.

Les proportions

$$25 : s :: 3 : \frac{4(2.100 - s) + 2s}{200},$$
$$75 : s :: 3 : \frac{4(2.100 - s) + 2s}{200},$$

d'où l'on tire $3s = \frac{400 - s}{4}$, $s = \frac{400}{13} = 0^m,030 + \frac{10}{13}$ d'une part et $s = \frac{400 - s}{4}$, $s = \frac{400}{5} = 0^m,080$ de l'autre, nous apprennent que, sur la plaque W, les deux lignes nodales parallèles entre elles doivent se former aux distances de $0^m,030 + \frac{10}{13}$ et de $0^m,020$ des côtés voisins.

La position de la ligne perpendiculaire à celles-ci est la même que dans le premier cas de vibration; par conséquent, elle doit être placée, sur la plaque W, à $0^m,057 + \frac{1}{7}$ et $0^m,043 - \frac{1}{7}$ des côtés 4, 2 et 2, 1 de la même plaque.

Par un hasard heureux, cette figure, qui a présenté des distorsions considérables sur presque toutes mes plaques, a été moins irrégulière sur la plaque W. La ligne du milieu était fort peu oblique; la distance entre elle et le côté 4, 2 s'est trouvée de $0^m,058$ à l'extrémité et de $0^m,057$ dans les points intérieurs. La ligne perpendiculaire à celle-ci et voisine du côté 4, 2 n'était qu'à $0^m,028$, au lieu de $0^m,030 + \frac{10}{13}$; mais la distance entre la seconde ligne et le côté 2, 1 était très exactement de $0^m,020$.

L'inspection d'un grand nombre de figures nodales m'a porté à croire que, dans toutes les pièces fabriquées de la même manière, l'épaisseur ou l'élasticité naturelle était proportionnellement trop forte vers les points du milieu. Pour expliquer cette dernière cause d'irrégularité, il suffirait de supposer que la main de l'ouvrier ait pesé plus fortement au centre que dans le voisinage des angles; au reste, sur les trois lignes dont se compose notre figure, une seule s'est écartée de la position que les formules lui assignent, et je puis assurer que, dans le nombre de mes plaques, plusieurs dont l'épaisseur était constante ont présenté des figures nodales moins conformes à la théorie.

Le troisième cas de vibration contenu dans les formules qui ont fourni les deux premiers exemples a lieu lorsqu'on prend à la fois $p = 2$, $q = 2$. La figure nodale correspondante est composée de quatre lignes nodales dont deux sont parallèles à chacun des côtés de la surface.

Sur la plaque d'épaisseur constante, ces lignes se coupent à $0^m,025$ de chacun des angles, et leurs parties intérieures, en deçà des points d'intersection, forment les côtés d'un espace carré égal en étendue aux quatre espaces pareillement carrés situés aux angles de la plaque.

La disposition des mêmes lignes sur la plaque W est déterminée d'avance par les formules relatives au second cas de vibration que nous venons d'examiner. En effet, la seule différence qui ait lieu entre les figures nodales correspondant aux valeurs $p = 1, q = 2$ et $p = 2, q = 2$ est que la ligne perpendiculaire, dans le premier cas de vibration, aux lignes parallèles entre elles, situées aux distances de $0^m,030 + \frac{10}{13}$ et de $0^m,020$ des côtés voisins de chacune des mêmes lignes, est remplacée, dans le second cas, par deux autres lignes semblables aux premières et également distantes des côtés voisins de $0^m,030 + \frac{10}{13}$ et de $0^m,020$.

La figure se trouve ainsi composée de deux espaces carrés situés aux angles 4 et 2 et dont les côtés sont de $0^m,030 + \frac{10}{13}$ et de $0^m,020$: tandis que deux parallélogrammes de $0^m,030 + \frac{10}{30}$ sur $0^m,020$ occupent, sur la même surface, les espaces compris entre les deux angles 2 et le point d'intersection des deux lignes nodales qui se terminent de part et d'autre des mêmes angles.

Afin de donner un exemple de l'emploi des formules qui appartiennent spécialement aux surfaces, nous allons chercher directement la position, sur la plaque W, du point d'intersection des deux lignes nodales situées de part et d'autre de l'angle 4.

La première des formules (B) donne l'épaisseur moyenne de l'espace carré qui a un de ses angles commun avec l'angle m de la surface. Quelles que soient les valeurs particulières des épaisseurs m, n, m', n' et e, on parviendra donc à connaître la valeur t du côté de la petite surface carrée, et par conséquent aussi la position de celui des angles de cette surface qui est opposé à l'angle m, en faisant usage de la proportion suivante :

$$x^2 : t^2 :: e^2 : \frac{4m\mathrm{A}^2 - 4m\mathrm{A}t + 2\mathrm{A}t(m'+n) + (m-n-m'+n')t^2}{4\mathrm{A}^2}.$$

Nous avons ici $x^2 = (25)^2 e = \frac{9}{4}$:

$$\frac{4m\mathrm{A}^2 - 4m\mathrm{A}t + 2\mathrm{A}t(m'+n) + (m-n-m'+n')t^2}{4\mathrm{A}^2}$$
$$= \frac{4.4(100)^2 - 4.4.100t + 2.100t.4 + t^2}{4(100)^2} = \frac{16(100)^2 - 8.100t + t^2}{4(100)^2}.$$

La proportion devient

$$(25)^2 : t^2 :: \frac{9}{4} : \frac{(400-t)^2}{4(100)^2};$$

elle donne

$$9t^2 = \frac{(400-t)^2}{4^2},$$

d'où l'on tire

$$13t = 400, \quad t = 30 + \frac{10}{13}.$$

Cette valeur de t est celle que nous avons trouvée, dans le second exemple, en nous servant des simples formules linéaires; elle mène, par conséquent, à conclure que le point de rencontre des lignes nodales situées de part et d'autre de l'angle 4 est en effet placé à $0^{\mathrm{m}},030 + \frac{10}{13}$ des côtés auxquels elles se terminent.

Il est évident que ce résultat suppose la parfaite régularité de la pièce; car, si l'épaisseur moyenne de la petite surface carrée dont le côté est t se trouvait plus ou moins grande que la quantité $\frac{400-t}{200}$, les figures nodales cesseraient de se rencontrer dans le point que nous venons de fixer, et il y aurait distorsion dans la figure nodale.

En général, si l'imperfection de la plaque se trouve dans le voisinage des points qui devraient appartenir aux lignes de repos, il ne peut manquer d'exister de l'irrégularité dans la figure nodale; si le défaut correspond à un point assez éloigné pour que ce défaut puisse être compensé par un autre égal dans un point placé en sens inverse par rapport à la ligne nodale, le défaut supposé ne nuira pas toujours à la régularité de la figure.

Cette remarque explique comment il a pu arriver que des pièces où de certaines figures étaient à peu près régulières ont pourtant montré, dans d'autres cas de vibration, de fortes distorsions; pourquoi l'irrégularité n'existait pas sur toutes les plaques dans les figures analogues; et comment les distorsions se sont multipliées en raison de l'augmentation du nombre des lignes de repos.

La figure qui est l'objet de notre troisième exemple n'a été régulière sur aucune des dix pièces; mais la plaque W a montré des distorsions moins grandes que celles qui ont été observées sur plusieurs des plaques d'épaisseur constante.

Les lignes qui devaient se croiser dans le voisinage de l'angle t s'écartaient au contraire l'une de l'autre; mais elles se terminaient, comme la théorie l'exige, à $0^{m},020$ de part et d'autre du même angle. Les côtés des deux parallélogrammes situés aux deux angles 2 devaient être de $0^{m},030 + \frac{10}{13}$ et de $0^{m},020$; ils se sont trouvés l'un de $0^{m},029$ et de $0^{m},020$, l'autre de $0^{m},028$ et de $0^{m},021$.

Enfin le côté du carré voisin de l'angle 4 devait être de $0^{m},030 + \frac{10}{13}$. Vers le point où devait exister l'angle commun au carré dont nous parlons et au parallélogramme intérieur, la figure a montré une distorsion considérable : le parallélogramme s'est terminé par un angle arrondi; au delà de cet angle les points de repos ont disparu, et les lignes qui devaient se terminer de part et d'autre de l'angle 4, aux côtés 4, 2, ont été remplacés par une ligne courbe, qui a atteint les mêmes côtés à $0^{m},028$ de l'angle 4.

La même figure, observée sur une autre pièce qui devait être semblable à la plaque W, était tellement contournée, qu'il était difficile de la reconnaitre. Les plaques d'épaisseur constante m'ont fourni l'occasion d'observer des changements entièrement analogues : l'une d'entre elles a montré la singulière distorsion dont je viens de parler avec les seules différences que la théorie aurait pu prévoir.

J'ai constamment remarqué que, lorsqu'une simple ligne courbe remplaçait les deux lignes nodales qui devaient se terminer de part et d'autre d'un des angles de la surface, l'intervalle entre les extrémités de la ligne courbe et l'angle dont il s'agit était plus petit que lorsque la figure était régulière. Ainsi, dans le cas de vibration qui nous occupe, quand sur les plaques d'épaisseur constante on a observé une semblable irrégularité, la ligne courbe était terminée à $0^m,022$, tandis que les lignes droites montraient l'intervalle de $0^m,025$ exigé par la théorie. Or la différence de $0^m,022$ à $0^m,025$ est égale à celle de $0^m,028$ à $0^m,030 + \frac{13}{10}$ que nous avons notée par rapport à la plaque W.

Les exemples qui ont été choisis appartiennent tous au cas où l'épaisseur varie à la fois suivant deux directions; chacun d'eux renferme donc une épreuve double.

A l'égard des expériences faites sur les surfaces où l'épaisseur varie suivant une seule direction, des faits analogues ayant été mentionnés par rapport au cas linéaire, je me contenterai d'ajouter que les observations faites en dernier lieu ont été également favorables à la théorie.

Malgré les irrégularités et les distorsions dont j'ai fait mention, nous conclurons que la dernière des conditions relatives à la vérification de la théorie n'est pas moins remplie que les précédentes, c'est-à-dire que les différences entre les figures nodales observées comparativement sur les plaques d'épaisseur constante et sur les plaques d'épaisseur variable peuvent servir à faire reconnaître l'égale compensation qui s'établit, pendant le mouvement, entre les épaisseurs moyennes des différentes parties de la plaque d'épaisseur variable et l'étendue des mêmes parties.

Le choix du coefficient, déjà justifié par les faits relatifs aux surfaces d'épaisseur constante, se trouve donc encore appuyé par l'existence même des phénomènes qui appartiennent aux surfaces planes d'épaisseur variable; et l'observation des circonstances qui accompagnent les mêmes phénomènes prouve l'exactitude des mesures qu'en donne la théorie.

La doctrine que je soumets au jugement de l'Académie semble devoir se prêter à plusieurs applications importantes. En expliquant l'influence propre de l'épaisseur sur les faits des surfaces élastiques, elle permet d'apprécier séparément les changements dus, et aux différences relatives à cette dimension, et aux différences qui appartiennent spécialement à l'élasticité naturelle. Sous ce rapport elle ne sera peut-être pas moins utile à l'art des constructions qu'à celui de la fabrication des instruments.

La détermination des circonstances du mouvement des plaques d'épaisseur variable, assimilées aux plaques fictives d'épaisseur constante, montre que les valeurs de l'ordonnée z, et par conséquent aussi celle de la flèche dans les plans élastiques, dépend des épaisseurs moyennes des parties comprises entre les points d'appui et celui qu'on veut considérer. Sans vouloir entrer dans une théorie qui n'est pas de mon ressort, je ferai cependant observer qu'une conséquence des effets produits par les épaisseurs moyennes serait la possibilité, en établissant un surcroît d'épaisseur dans une partie seulement d'un plan élastique, d'augmenter, par rapport à tous les points qui composent ce plan, la résistance dont il est susceptible. Les formules feraient connaître alors, pour tous les points qui appartiennent à ce plan, la quantité de cette augmentation. Le savant auteur qui a consacré ses recherches aux questions de ce genre appréciera, mieux que je ne pourrais le faire, la justesse plus ou moins grande de cette observation.

Dans l'emploi des lames et des plaques élastiques envisagées comme corps sonores, on sera désormais en état de prévoir les différences que devront amener les changements d'épaisseur.

Deux surfaces élastiques où la longueur des côtés et les épaisseurs sont proportionnelles donnent, il est vrai, les mêmes tons; mais la qualité du son peut y être fort différente. Toutes conditions égales d'ailleurs, les sons seront d'autant plus beaux que les pièces auront à la fois plus d'étendue et plus d'épaisseur. Si on se rappelle qu'il existe nécessairement des lignes de limite sur tous ces corps sonores, on concevra la possibilité d'obtenir de la lame d'épaisseur variable un son plus plein que lorsque l'épaisseur de cette lame est constante. La qualité du son serait alors déterminée par la partie de la lame prise du côté où l'épaisseur moyenne se montrerait la plus grande; cette partie se trouverait comprise entre l'extrémité et la ligne de limite la plus voisine. Le son, beaucoup plus faible, de la partie restante ne pourrait avoir d'autre effet que de renforcer le premier.

La doctrine des épaisseurs moyennes explique au moins comment il est possible d'obtenir des sons purs dans les cas où les figures nodales accusent des inégalités d'épaisseur entre les différents points du corps sonore.

A la vérité, toute cette théorie n'est démontrée que par rapport aux suppositions qui servent de fondement à nos formules ; mais néanmoins la similitude des sons, qui ne cesse pas de se manifester malgré le défaut des pièces, donne lieu de penser que les compensations que nous avons établies sont indépendantes de la loi de distribution qui nous a servi à les reconnaître.

NOTE A.

(*Voir* p. S. 34.)

Sophie Germain fait ici allusion à une Lettre dans laquelle elle avait exposé ses observations relatives aux expériences de M. Wheatstone, en les comparant aux expériences de Chladni. Cette Lettre avait été lue à l'Académie des Sciences dans la séance du 1er septembre 1823. Le procès-verbal en fait la mention suivante :

« On donne lecture d'une Lettre de Mlle Sophie Germain, concernant les expériences de M. Wheatstone sur les vibrations des plaques métalliques.

» MM. Fourier et Arago prendront une connaissance spéciale de l'objet de cette Lettre et en rendront compte à l'Académie. »

La Lettre de Sophie Germain n'est pas aux Archives de l'Institut. Il est vraisemblable qu'elle a été adressée à Fourier; après la lecture, elle a dû être remise à Arago, qui l'aura gardée.

Quoi qu'il en soit, nous la reproduisons ici d'après la minute qui se trouve à la bibliothèque du British Museum, à Londres (Imprimés, Press mark 8534, *ee*) :

[1823].

MONSIEUR,

Je vous prierai, si vous le jugez convenable, de communiquer à l'Académie les observations suivantes : elles sont relatives aux expériences de M. Wheatstone, dont M. Arago a rendu compte dans la dernière séance de juin et dont je lis pour la première fois l'exposé dans le numéro des *Annales de Chimie* qui vient de paraître [1]. L'article le plus important concerne ce que le savant

---

[1] *Nouvelles expériences sur le son*, par M. Wheatstone, p. 313 du Tome XXIII (2e série, 1823) des *Annales de Chimie et de Physique*, par MM. Gay-Lussac et Arago.

anglais nomme *vibrations moléculaires des corps*. Les expériences par lesquelles il est parvenu à rendre ces petits mouvements sensibles sont sans doute fort ingénieuses; cependant je vois avec étonnement que les physiciens semblent croire qu'elles révèlent, dans les vibrations sonores, quelques nouvelles propriétés qui n'auraient pu être reconnues par les moyens qu'a employés M. Chladni.

Je crois pouvoir affirmer que non seulement les expériences de cet habile physicien, lorsqu'elles sont faites avec soin, indiquent les principaux faits observés par M. Wheatstone, mais encore que les formules à l'aide desquelles j'ai expliqué la correspondance entre les sons et les figures nodales renferment également l'explication des expériences nouvelles.

L'existence des centres de vibration, l'augmentation de leur nombre et en même temps la diminution de leur amplitude lorsque la pièce, qui rendait d'abord un son donné, fait entendre un son plus aigu, se manifestent dans les expériences de M. Chladni par le mouvement de la poussière dont il recouvre les plaques vibrantes. Avant que cette poussière se soit accumulée sur les lignes de repos, elle est souvent lancée à une distance sensible de la surface. Ce phénomène a lieu dans les points où M. Wheatstone reconnaît l'existence des centres de vibration. J'avais employé depuis longtemps, comme l'a fait M. OErsted, la poussière de lycopode au lieu du sablon dont je me sers plus ordinairement; j'avais également remarqué la tuméfaction de cette poussière, et j'avais vu en même temps que les points où elle est fort apparente sont ceux qui, suivant la théorie, doivent s'éloigner beaucoup, durant le mouvement de la surface, de leur situation initiale.

Les expériences de M. Wheatstone sont plus délicates, et elles ont l'avantage de rendre sensibles des différences fort petites. Je me suis empressée de les répéter; seulement j'ai substitué à l'eau dont ce physicien recouvre les surfaces vibrantes l'eau-de-vie, qui, à cause de sa moindre pesanteur spécifique, se prête plus facilement encore aux mouvements que lui communiquent les différents points des surfaces sur lesquelles elle s'appuie. Toutes les expériences du même genre présentent des phénomènes analogues; je me bornerai donc à décrire et à expliquer une seule d'entre elles.

Si l'on couvre d'eau-de-vie une plaque carrée et qu'on en tire le son correspondant à la formation de deux lignes nodales perpendiculaires entre elles et parallèles aux côtés, le liquide présente aux quatre angles la surface réticulée qu'a observée M. Wheatstone; en même temps, dans les points sensiblement éloignés des angles et suivant la direction des côtés, le même liquide ne présente plus qu'une surface côtelée, comparable à un ruban à graine; les petites proéminences sont perpendiculaires au côté; elles vont en diminuant d'élévation jusqu'aux points sur lesquels se formeraient les lignes nodales si la plaque était recouverte de poussière.

Lorsqu'on tire ensuite de la même plaque le son correspondant à la formation de quatre lignes nodales dont deux seraient parallèles à chacun des côtés, l'apparence réticulée se manifeste non plus seulement aux quatre angles de la surface, mais encore dans quatre espaces semi-circulaires situés au milieu de chacun des côtés et aussi dans un espace circulaire placé au centre de la plaque. La figure que présente alors le liquide est formée, comme dans le cas des figures nodales, de la réunion de quatre figures semblables à celle qui s'est montrée, sur la même plaque, dans la première partie de l'expérience. Ainsi, conformément à l'observation faite par M. Wheatstone à l'occasion d'une expérience analogue à celle que je viens de rapporter, la surface réticulée angulaire occupe un espace quatre fois moindre que quand la plaque rendait un son plus grave.

Pour parvenir à expliquer les faits précédents, je serai forcée d'avoir recours à l'emploi des formules. Celle qui appartient au cas présent se réduit, en supprimant le facteur, inutile ici, à

$$z = \mathcal{A} \sin\left(\frac{\pi m x}{A}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{A}\right).$$

π représente la demi-circonférence, m le nombre des lignes nodales parallèles à chacun des côtés, A la longueur des mêmes côtés, x et y les deux coordonnées horizontales dont l'origine est à un des angles de la surface, et $\mathcal{A}$ une constante arbitraire.

Dans la première partie de l'expérience, on a $m = 1$, $z = \mathcal{A} \sin\frac{\pi x}{A} \sin\frac{\pi y}{A}$. Les plus grandes valeurs de l'ordonnée z, ou, ce qui est la même chose, la plus grande étendue du mouvement vibratoire a donc lieu aux quatre angles de la plaque, pour lesquels les valeurs $x = 0, y = 0$; $x = 0, y = A$; $x = A, y = 0$ et $x = A, y = A$, correspondant à chacun de ces points, donnent également $\cos\frac{\pi x}{A} \cos\frac{\pi y}{A} = 1$. A partir de ces points, les valeurs de $\cos\frac{\pi x}{A}$ et celles de $\cos\frac{\pi y}{A}$ diminuent, et le croisement de ces différentes valeurs donne lieu à l'apparence réticulée du liquide. A une distance sensible des angles, lieu où ne se prolonge pas le double mouvement, et en suivant la direction d'un des côtés de la plaque, les valeurs de l'ordonnée z ne varient plus qu'à raison des changements de valeur d'une seule des ordonnées x et y, car l'une d'elles demeure constante pour tous les points situés dans une ligne parallèle aux côtés; de là l'apparence côtelée qu'affecte le liquide. Enfin ces petites ondes s'abaissent à mesure qu'elles approchent du lieu qu'occuperaient les lignes nodales, et la théorie indique, en effet, qu'elles doivent alors disparaître entièrement.

Ce premier point éclairci, on verra aisément ce qui doit arriver dans la seconde partie de l'expérience, c'est-à-dire quand on a

$$z = \mathcal{A} \cos \frac{2\pi x}{A} \cos \frac{2\pi y}{A}.$$

J'ai prouvé ailleurs (dans le premier Mémoire présenté à l'Académie) [1] qu'il existe alors sur la plaque carrée deux lignes de limite analytiques qui se croisent au centre de cette surface et que, si la même surface était réellement séparée, par des sections opérées suivant les lignes de limite, en quatre plaques carrées plus petites, chacune d'elles continuerait à rendre le même son et à présenter la même figure nodale que lorsqu'elle faisait partie de la plaque entière. Il résulte de là qu'au centre de cette plaque la réunion de quatre centres angulaires de vibration doit donner lieu à la formation de la surface circulaire réticulée qu'on y observe, et qu'au milieu de chacun des côtés de la surface, la réunion de deux centres angulaires de vibration doit présenter, comme elle le présente en effet, un espace semi-circulaire réticulé.

Ce qui me semble le plus curieux dans les expériences de M. Wheatstone est qu'elles peuvent servir à déterminer quelle est la fraction de A, c'est-à-dire de la longueur du côté de la plaque, dont le plus ou le moins influe d'une manière sensible sur la grandeur de l'ordonnée z. Cette fraction représente une quantité d'autant plus petite que l'entier A est lui-même plus petit.

Suivant la manière dont s'exprime le physicien anglais, lorqu'il a réduit la plaque rectangulaire à la moitié de sa longueur, quatre *corpuscules vibrants* occupaient l'espace, qui, sur la plaque entière, était recouvert par un seul. Les cas de vibration que j'ai choisis pour exemple ont l'avantage de montrer la

---

(1) Mémoire sur cette question, proposée par la première Classe de l'Institut (Concours de 1811) :

Donner la théorie mathématique des vibrations des surfaces élastiques, et la comparer à l'expérience.

Ce Mémoire, reçu au secrétariat de l'Institut le 21 septembre 1811, porte pour épigraphe : *Effectuum naturalium ejusdem generis eædem sunt causæ.* (Newton, *Philos. nat. princ. mathem. Regula philosophandi*, regula II).

Il a été le seul présenté à ce Concours.

raison de cette différence, car dans le premier la surface vibrante est composée d'éléments qui dans le second se montrent quatre fois sur la même surface.

Il résulte des remarques précédentes, auxquelles on pourrait ajouter beaucoup d'autres, que les expériences de M. Wheatstone doivent être considérées comme une contre-épreuve de celles de M. Chladni. De part et d'autre on parvient à distinguer sur les surfaces vibrantes les points où s'exécutent les mouvements les plus étendus et ceux où le repos est absolu; mais, tandis que les premières portent particulièrement l'attention sur les points qui, durant le mouvement général, s'écartent davantage de leur situation naturelle, les secondes, au contraire, fixent surtout les yeux sur les points qui, durant le même mouvement, conservent leur position initiale.

J'ose espérer que l'Académie accueillera favorablement les explications dans lesquelles je viens d'entrer, et qui tiennent de bien près à celles qui ont déjà obtenu son approbation (1).

---

(1) Ce document a passé dans une des ventes faites par Libri à Londres.

Dans le *Catalogue of the mathematical, historical, bibliographical and miscellaneous portion of the celebrated Library of M. Guglielmo Libri* (London, 2 parties gr. in-8°, 1861) on lit : « N° 3345. GERMAIN (M^lle^ SOPHIE), *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques, et équation générale de ces surfaces.* Paris, 1826; in-4° : « An important work by this celebrated lady-mathe- » matician, who was crowned by the Institut in 1815 for successfully answering a » question on vibrations, which had been thrice proposed for competition without » obtaining a reply. This copy belonged to the authoress herself, and besides her nu- » merous manuscript additions, contains the draft of a long scientific Letter respecting » M. Wheatstone's experiments on vibrations, entirely in her *autograph*. »

Ce n° 3345 est aujourd'hui au British Museum. A la suite d'un exemplaire des *Remarques*, sur les marges duquel Sophie Germain a écrit des additions, se trouvent, reliés sous la même couverture, d'abord la minute de la Lettre ci-dessus reproduite (6 pages in-4°), puis sept feuillets de notes manuscrites, dont les unes sont des brouillons relatifs à des passages du Mémoire et de la Lettre présentement publiés, et les autres concernent la courbure des surfaces.