JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE WEST

Digression sur les séries

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 111-128.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7__111_0>

Digression sur les séries;

PAR M. ÉMILE WEST.

Il nous a été fait quelques observations au sujet d'une méthode de Wronski dont nous avons commencé l'exposition; elles se résument en ceci :

Pourquoi n'avoir pas donné la démonstration de la formule (3)?

Que veut dire : transformation d'une série divergente en série convergente?

Nous devons donner d'abord des explications à cet égard. On a toujours reproché à Wronski, avec raison, de n'avoir jamais donné d'exemples pour éclaircir et même prouver par des faits la réalité des découvertes qu'il avait annoncées. Pénétré de cette idée, nous nous sommes proposé de présenter d'abord un des résultats les plus importants, celui de la résolution ou de l'intégration d'équations quelconques; nous laissons provisoirement de côté tout ce qui se rattache trop particulièrement aux questions de principe ou de théorie, nous réservant de reprendre ces questions, qui forment notre principal travail, dès que nous aurons présenté quelques exemples d'intégration.

La démonstration de la formule (3) exige la connaissance de la théorie des séries de Wronski, théorie que nous exposerons plus tard. Nous ne pouvions donc, sans faire une digression qui nous eût écarté de notre véritable sujet, donner la démonstration de la formule (3). Nous avons pensé que, la formule (2) étant connue depuis longtemps, il suffisait pour l'instant de la présenter, ainsi que la formule (3), en indiquant bien que la quantité w, considérée jusqu'à présent comme un nombre arbitraire, doit encore être prise comme une fonction arbitraire. C'est là le point essentiel, que nous demandons au lecteur de vouloir bien admettre provisoirement.

Pour ce qui concerne la deuxième observation, nous aurions dû expliquer le sens dans lequel nous employons l'expression de *transformation de série divergente en série convergente;* mais cela nous eût encore fait retomber sur la théorie des séries. Sans entrer dans les détails et en nous tenant pour l'instant aux exemples, voici ce que nous dirons :

Il existe des transformations de séries connues depuis fort longtemps. M. Bertrand dans son *Traité de Calcul différentiel* (p. 255), dit, à propos d'une formule de transformation due à Euler : « La transformation d'une série divergente, lors même qu'elle donne naissance à une série convergente, doit être considérée comme insignifiante, à moins qu'une nouvelle démonstration ne vienne lui donner un sens ; cette démonstration peut quelquefois être faite, parce que la série transformée et la série primitive, étant démontrées égales lorsque toutes deux sont convergentes, fournissent deux développements de la même fonction. S'il arrive ensuite que l'une d'elles devienne divergente pour une certaine hypothèse, l'autre, demeurant convergente, représentera encore la fonction, justifiant en apparence ceux qui prétendraient que l'autre série la représente encore après être devenue divergente, et qui se trouveraient dans le vrai pour avoir commis la double erreur d'accepter une transformation qui n'est plus légitime et une série qui, étant divergente, ne représente plus rien. » M. Bertrand considère ensuite, à titre d'exemple, la série qui donne $l(1-2x)$. Nous reprendrons tout à l'heure l'exemple de séries logarithmiques.

Ainsi il est connu que l'on peut transformer des séries divergentes en séries convergentes, pourvu que l'on prenne certaines précautions, et quand les développements sont ceux d'une même fonction.

Cette citation suffirait, il nous semble, pour justifier ce que nous avons dit, d'autant plus que nous n'avons parlé que de séries provenant de développements de fonctions.

Pour ce qui concerne Wronski, il faut observer qu'il n'envisage absolument que les séries définies de cette manière ; quant aux séries qui ne se présentent pas immédiatement comme développements de fonctions, par exemple les séries numériques, il les ramène au cas précédent, soit d'après les conditions mêmes de la question, quand cela est possible, soit par une supposition purement arbitraire. Une série quelconque étant alors supposée remplir une première condition reconnue nécessaire, il est permis de chercher un autre développement de la fonction que représente la série. Or la substitution d'une série à une autre est généralement possible, car Wronski démontre, c'est là encore un point essentiel, qu'un développement ne peut représenter à la fois deux fonctions différentes; il en résulte que deux développements d'une même fonction, sans même considérer leur état de convergence ou de divergence, sont bien *équivalents*. Cette équivalence peut se traduire par certaines relations entre les termes correspondants, lesquelles ne sont autres que les formules de transformation.

Pour la transformation des séries numériques, les diverses suppositions que l'on peut faire, d'après Wronski, dans la recherche de la fonction hypothétique, conduiront quelquefois à un résultat unique, et quelquefois à des résultats différents, comme on peut le prévoir; nous en donnerons bientôt un exemple.

On peut dire par abréviation qu'une série, convergente ou non, a généralement une *valeur*, qui est celle de la fonction qu'elle représente, tandis que, en laissant au mot *somme* son sens ordinaire, la *somme d'une série* ne se dira que d'une série convergente.

Revenons à la définition des séries. La manière dont Wronski les envisage permet d'éviter les difficultés que l'on rencontre ordinairement dans l'usage de cet algorithme, et ensuite de pouvoir, comme conséquence éminemment pratique, substituer en général à un développement quelconque donné un développement plus convergent.

Examinons donc ce qui caractérise, d'une part, la définition ordinaire des séries et, d'autre part, celle de Wronski.

On donne habituellement la définition suivante :

Une série est une suite illimitée de termes formés d'après une loi déterminée; elle est *convergente* quand la somme d'un nombre de termes de plus en plus grand, pris dans l'ordre même de la série, tend vers une limite déterminée. Une série est *divergente* quand cette condition n'est pas remplie.

Cette définition est insuffisante, car elle ne remplit pas les conditions que toute définition doit remplir; elle n'apprend rien sur la propriété fondamentale des séries, ou, si l'on veut, sur l'origine même des séries; elle n'implique à proprement parler qu'une *règle de formation des séries*. Aussi n'est-il ordinairement donné que des *règles de convergence*, et les propriétés générales que l'on connaît sont déduites de principes étrangers à la définition précédente des séries.

La définition de Wronski est au contraire une véritable définition; elle contient en elle-même le principe fondamental des séries, celui de représenter une fonction; par suite, ce géomètre déduit de ce seul principe leurs propriétés générales, celles qui sont relatives à leur convergence et à leur transformation.

Nous devons d'abord dire quelques mots sur les développements des fonctions considérés dans toute leur généralité, et nous prévenons expressément que nous ne donnons ce qui suit qu'à seul titre d'indication. Les propositions que nous allons énoncer sont loin d'être évidentes; nous y reviendrons plus tard; en attendant, on pourra consulter la seconde Section de la Technie.

Wronski considère deux sortes de développements des fonctions. Le premier offre une généralité telle, que les séries proprement dites n'en forment plus qu'un cas particulier, comme on va le voir.

Ce premier développement est

$$(\alpha) \qquad F(x) = A_0 + A_1\Omega_1(x) + A_2\Omega_2(x) + A_3\Omega_3(x) + \ldots;$$

$F(x)$ est la fonction donnée, et $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, ... sont des fonctions généralement *arbitraires*. Pour effectuer leur détermination il faut avoir égard aux conditions du problème, mais celles-ci sont insuffisantes; il faut alors recourir à d'autres conditions qui dépendent du but en vue duquel la question est traitée.

A_0, A_1, A_2, ... sont des coefficients qui dépendent des fonctions susdites. Il suit de là une conséquence importante : une fonction comporte en général un nombre indéfini de formes différentes, autrement dit de développements différents.

Les relations qui existent entre les coefficients A_0, A_1, A_2, ... et les fonctions F, Ω_1, Ω_2, ... constituent ce que Wronski appelle la *loi* *suprême;* les déterminations des fonctions Ω_1, Ω_2, Ω_3, ... les mieux appropriées à la nature de la question constituent la *méthode suprême.*

D'après le même géomètre, les développements en séries ne sont que des cas particuliers du développement précédent (α); si $F(x)$ est la fonction à développer, en effectuant les opérations suivantes

$$(\beta)\qquad \begin{cases} F(x) = A_0 + F_1(x), \\ F_1(x) = \varphi_1(x)[A_1 + F_2(x)], \\ F_2(x) = \varphi_2(x)[A_2 + F_3(x)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

ainsi de suite indéfiniment, on obtient le développement que Wronski appelle *série générale :*

$$(\gamma)\quad F(x) = A_0 + A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_1(x)\varphi_2(x) + A_3\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x) + \ldots.$$

A_0, A_1, A_2, A_3, ... sont des constantes, et $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... des fonctions arbitraires de la variable x, qui néanmoins doivent satisfaire à la condition que les rapports

$$(\delta)\qquad \frac{F_1(x)}{\varphi_1(x)},\quad \frac{F_2(x)}{\varphi_2(x)},\quad \frac{F_3(x)}{\varphi_3(x)},\quad \ldots$$

ne soient pas infinis pour les valeurs qui annulent les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... Les fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... déterminées par les fonctions $F(x)$ et $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... sont d'ailleurs éliminées. Si l'on s'arrête dans la série (γ) après le terme $A_3\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\varphi_3(x)$, par exemple, la *quantité complémentaire* est

$$F_3(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\varphi_3(x),$$

et la partie essentielle de ce reste, $F_3(x)$, est une fonction qui dépend nécessairement de $F(x)$; ainsi la considération de la fonction $F_3(x)$ n'est d'aucune utilité au point de vue théorique, puisqu'en cherchant à l'évaluer on ne peut que retomber sur la question même.

Les relations qui existent entre les coefficients A et les fonctions F et φ constituent la *loi des séries;* ainsi qu'on le verra plus tard, ces coefficients contiennent les différences ou les différentielles de tous les ordres des fonctions F et φ; par suite, la série, étant supposée représenter la fonction $F(x)$, doit contenir les différences ou les différentielles de tous les ordres de la fonction proposée; c'est pour cette raison que l'on ne peut substituer à une série qui contient un nombre indéfini de termes un nombre fini de termes accompagnés d'une quantité complémentaire, autrement dit un polynôme algébrique suivi d'une autre fonction.

Par là même que les termes d'une série sont des fonctions déterminées des dérivées des fonctions F et φ, on ne peut en principe changer l'ordre des termes de la série sans la modifier entièrement; il est évident que cette remarque s'étend aussi aux séries numériques.

Sous la forme donnée (γ), les coefficients A_0, A_1, A_2, ... deviennent indéterminés quand les fonctions φ_1, φ_2, φ_3, ... deviennent identiques; c'est pourquoi Wronski substitue à (γ) la forme suivante, qui n'offre pas cet inconvénient:

$$(\varepsilon)\qquad \left\{\begin{aligned} F(x) = A_0 &+ A_1\,\varphi(x, a, b, \ldots) + A_2\,\varphi(x, a, b\ \ldots)^{2|\xi, \alpha, \beta, \ldots} \\ &+ A_3\,\varphi(x, a, b, \ldots)^{3|\xi, \alpha, \beta, \ldots} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Nous employons ici la notation des *facultés algorithmiques*, qui sont définies par la relation

$$(\varepsilon)'\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x, a, b, \ldots)^{m|\xi, \alpha, \beta, \ldots} \\ &\quad = \varphi(x, a, b, \ldots)\,\varphi(x+\xi, a+\alpha, b+\beta, \ldots) \\ &\qquad \times \varphi(x+2\xi, a+2\alpha, b+2\beta, \ldots)\ldots \\ &\qquad \times \varphi[x+(n-1)\xi, a+(n-1)\alpha, b+(n-1)\beta, \ldots]. \end{aligned}\right.$$

Il ne reste plus qu'une fonction arbitraire φ, que Wronski nomme *mesure* de la série, mais il entre dans cette fonction un nombre indéfini de paramètres arbitraires a, b, ..., ainsi que leurs accroissements α, β, ...

Maintenant considérons le cas particulier dans lequel les paramètres restent constants :

$$(\zeta)\qquad F(x) = A_0 + A_1\,\varphi(x) + A_2\,\varphi(x)^{2|\xi} + A_3\,\varphi(x)^{3|\xi} + \ldots,$$

et même celui-ci

$$(\eta)\qquad F(x) = A_0 + A_1\,\varphi(x) + A_2\,\varphi(x)^2 + A_2\,\varphi(x)^3 + \ldots,$$

dans lequel l'accroissement fini ξ devient indéfiniment petit dx.

Quand la série contient des facultés algorithmiques, la loi de la série contient les différences des fonctions F et φ; quand les facultés se réduisent à de simples puissances, comme pour la série (η), les différences deviennent des différentielles.

Il ne faut pas confondre le développement (α) avec la série (γ), comme Lacroix avait cru pouvoir le faire; la série (γ) est un cas particulier du développement (α).

Le principe de la convergence des séries de Wronski dérive de leur définition; ce principe s'exprime algébriquement par la condition que les rapports (δ) tendent vers des quantités constantes.

Seconde conséquence importante : la fonction $F(x)$ se trouve complètement déterminée par l'ensemble des coefficients du développement, car aucune autre fonction, dans le procédé indiqué, ne saurait donner la même suite de coefficients et la même loi de leur génération. Ainsi, quel que soit l'état de convergence ou de divergence de la série, la loi des coefficients donne la détermination rigoureuse de la série, sans addition d'aucune quantité complémentaire.

Wronski résume ce qui précède dans la proposition suivante :

Les séries prises dans leur généralité comme convergentes ou non convergentes ont par elles-mêmes, dans le nombre indéfini de leurs termes, et sans le secours d'aucune quantité complémentaire, une signification (valeur) déterminée.

Wronski ajoute que la démonstration mathématique de cette proposition se réduit à montrer que l'on peut généralement substituer une série convergente à une série divergente.

Si l'on considère maintenant une série numérique, elle provient ou d'une série contenant une variable (ou plusieurs) à laquelle on donne une valeur particulière, ou bien elle est formée directement par une suite de nombres donnés par une certaine loi.

Dans ce dernier cas, si la série est divergente, c'est-à-dire si l'on ne peut faire la sommation des termes, il n'y a rien à en tirer sans une supposition particulière. Si l'on admet alors qu'une telle suite puisse provenir d'une série contenant une variable, il se présente la question de rechercher quelle est la fonction qu'elle peut représenter; il y a quelquefois utilité à le faire; on peut alors, d'après l'hypothèse, substituer à une série numérique une autre qui lui sera équivalente.

Il nous reste donc à examiner comment on peut passer d'une série à une autre équivalente. Soit donnée la série

$$(\vartheta) \qquad F(x) = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 f(x) + \mathfrak{A}_2 f(x)^{2|\xi} + \mathfrak{A}_3 f(x)^{3|\xi} + \ldots.$$

Wronski trouve que dans la série par hypothèse équivalente

$$(\vartheta)' \qquad F(x) = A_0 + A_1\,\varphi(x) + A_2\,\varphi(x)^{2|\xi} + A_3\,\varphi(x)^{3|\xi} + \ldots$$

la fonction arbitraire $\varphi(x)$ peut se ramener à quatre types différents, qu'il nomme *schémas de convergence*. Le plus usuel est de la forme

$$\frac{x}{n+x} - \frac{a}{n+a} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{n+a}\left(\frac{x-a}{n+x}\right),$$

n et a étant des constantes arbitraires. Prenons pour exemple le cas le plus simple, celui où la série (θ) se réduit à la série de Taylor, savoir

$$(\iota) \quad F(x) = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1(x-a) + \mathfrak{A}_2(x-a)^2 + \mathfrak{A}_3(x-a)^3 + \ldots;$$

la série équivalente sera, en faisant $\varphi(x) = \dfrac{x-a}{n+x}$,

$$(\iota)' \quad F(x) = A_0 + A_1\frac{x-a}{n+x} + A_2\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^2 + A_3\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^3 + \cdots;$$

les relations entre les coefficients $\mathfrak{A}$ et A seront

$$(\iota)'' \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A}_0 &= A_0, \\ \mathfrak{A}_1(n+a) &= A_1, \\ \mathfrak{A}_2(n+a)^2 &= A_2 - A_1, \\ \mathfrak{A}_3(n+a)^3 &= A_3 - 2A_2 + A_1, \\ \ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathfrak{A}_\mu(n+a)^\mu &= A_\mu - \frac{\mu-1}{1}A_{\mu-1} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}A_{\mu-2} \\ &\quad - \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3}A_{\mu-3} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Il peut être utile de connaître directement le coefficient général de la seconde série (ι) : on a, d'après la première $(\iota)'$

$$\mathfrak{A}_\mu = \frac{1}{1.2.3\ldots\mu}\frac{d^\mu F(a)}{da^\mu},$$

puis, en résolvant le système des équations $(\iota)''$,

$$(\varkappa) \quad \left\{ \begin{aligned} A_\mu = (n+a)\mathfrak{A}_1 &+ \frac{\mu-1}{1}(n+a)^2\mathfrak{A}_2 \\ &+ \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}(n+a)^3\mathfrak{A}_3 + \ldots \end{aligned} \right.$$

La série de Taylor (ι) pouvant en général représenter toute fonction, Wronski énonce encore la proposition suivante :

Toute fonction algorithmique $F(x)$ *peut, avec une mesure généralement* FINIE $(x-a)$, *être engendrée moyennant une série convergente.*

Revenons aux séries formées par une suite de nombres arbitraires : soit

$$(\lambda) \qquad \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots$$

une pareille série; nous avons dit que nous supposions une série proprement dite, dont la valeur générale corresponde à une fonction hypothétique $F(x)$, par exemple la série formant le second membre de (ι); il faut observer que la supposition ne saurait avoir lieu effectivement qu'autant qu'il existe une autre fonction $\varphi(x)$ qui puisse donner réellement une suite $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$ correspondant à une série convergente telle que le second membre de $(\iota)'$. Si cela n'a pas lieu, les quantités A seront ou infinies ou indéterminées, ou bien elles pourront donner lieu à des absurdités. D'où cette proposition :

Une série (λ), *formée arbitrairement* [1], *n'a pas toujours une valeur générale* $F(x)$ *correspondant à toutes les valeurs de la variable* x.

Wronski donne un exemple d'une série telle que (λ), dont les termes sont formés d'après une loi qui n'admet pas une série générale de la forme (θ); cela suffit pour prouver la dernière proposition.

Premier exemple. — Pour bien faire comprendre ce que nous venons de dire, prenons un exemple connu, le développement du logarithme naturel de x, ou

$$(\mu) \qquad (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots.$$

Cette série n'est convergente qu'entre 0 et 2; mais, d'après ce que nous avons dit, elle représentera *dans tous les cas* la fonction $L(x)$, parce qu'aucune autre fonction ne peut donner le même développement. Quand cette série est divergente, elle ne peut être évidemment d'aucune utilité pour calculer un logarithme : c'est dans ce cas que les formules $(\iota)''$ ou $(\varkappa)$ permettent d'y substituer immédiatement une série convergente; on a, d'après $(\varkappa)$, en comparant la série (μ) à la série (ι) et faisant $n = 1$,

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 2, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 2\,\frac{1}{3}, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = 2\,\frac{1}{5}, \quad \ldots,$$

ce qui donne pour la série $(\iota)'$

$$(\mu)' \qquad 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right],$$

[1] *Formée arbitrairement* signifie : formée d'après une loi arbitraire.

série bien connue qui est convergente pour toutes les valeurs positives de x.

Pour les valeurs négatives de x, la série proposée et cette dernière sont divergentes; les formules ($\varkappa$), telles que nous venons de les appliquer, ne pourraient conduire à des séries convergentes, parce que le logarithme d'un nombre négatif, étant imaginaire, ne pourrait être donné par une série dont la valeur serait réelle; il faudrait, pour obtenir un résultat, introduire des quantités imaginaires, lesquelles donneraient lieu à deux séries convergentes A et B, permettant de former la quantité cherchée $A + B\sqrt{-1}$. Nous allons examiner cette transformation sur un autre exemple.

La série proposée (μ), pour $x = 0$, donne la série harmonique

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right),$$

dont la somme des termes entre parenthèses est plus grande que toute quantité donnée; la série $(\mu)'$ conduit à un résultat pareil. Or cette quantité infinie est bien à la fois la somme de la série et la valeur de $L(0)$; on ne peut donc pas dire que la série harmonique soit ici divergente, ou bien, si l'on dit que cette série est divergente, il faut reconnaître que cette divergence n'est pas de même nature que celle de la série qui donne, par exemple, le logarithme de 11,

$$(\nu) \qquad 10 - \frac{1}{2}\cdot 10^2 + \frac{1}{3}\cdot 10^3 - \frac{1}{4}\cdot 10^4 + \cdots,$$

puisque cette série ne peut donner par elle-même la valeur du logarithme. La série numérique (ν), en vertu de sa liaison avec la fonction Lx, est équivalente à la série convergente

$$(\nu)' \qquad 2\left(\frac{10}{12} + \frac{1000}{3.1728} + \frac{100000}{5.248832} + \cdots\right),$$

donnée par la série $(\mu)'$.

Second exemple. — Pour second exemple prenons la série provenant du développement de $(1-2x)^{\frac{1}{2}}$.

$$(\xi) \qquad 1 - x - \frac{1}{2}\frac{1}{1}x^2 - \frac{1}{3}\frac{1.3}{1.2}x^3 - \frac{1}{4}\frac{1.3.5}{1.2.3}x^4 - \dots$$

Pour $x=1$, la valeur de la fonction $(1-2x)^{\frac{1}{2}}$ est $\sqrt{-1}$; de plus, la série est divergente, elle devient

$$(\varpi) \qquad 1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\frac{1.3}{1.2} - \frac{1}{4}\frac{1.3.5}{1.2.3} - \dots$$

Comparons cette série à la série (ι); en faisant $a=0$, les coefficients seront $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ...; puis substituons-y la série $(\iota)'$. Pour cela posons,

$$n = -\frac{1}{2}\sqrt{-1},$$

et, observant que

$$\frac{x}{x-\frac{1}{2}\sqrt{-1}} = \frac{2x(2x+\sqrt{-1})}{4x^2+1},$$

la nouvelle série sera

$$(\xi)' \qquad A_0 + A_1\frac{2x(2x+\sqrt{-1})}{4x^2+1} + A_2\frac{2^2x^2(2x+\sqrt{-1})^2}{(4x^2+1)^2} + \dots$$

On trouverait pour les coefficients

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{2}\sqrt{-1}, \quad A_2 = \frac{1}{2^3}(1+4\sqrt{-1}),$$

$$A_3 = \frac{1}{2^4}(4+7\sqrt{-1}), \quad A_4 = \frac{1}{2^7}(43+40\sqrt{-1}),$$

$$A_5 = \frac{1}{2^8}(88+39\sqrt{-1}), \quad A_6 = \frac{1}{2^{10}}(261+12\sqrt{-1}),$$

$$A_7 = \frac{1}{2^{11}}(188-89\sqrt{-1}), \quad A_8 = \frac{1}{2^{15}}(-2445+1040\sqrt{-1}),$$

et ainsi de suite; la série (ϖ) devient

$$(\varpi)' \quad \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{\sqrt{-1}\,(2+\sqrt{-1})}{5} + \frac{(1+4\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})^2}{2.5^2} \\ & \qquad + \frac{(4+7\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})^3}{2.5^3} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(\varpi)'' \left\{ \begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{5} - \frac{13}{2.5^2} - \frac{69}{2.5^3} - \frac{1261}{2^3.5^4} - \frac{4943}{2^4.5^6} - \frac{54845}{2^4.5^7} + \frac{1637955}{2^7.5^8} + \ldots\right) \\ & + \sqrt{-1}\left(\frac{2}{5} + \frac{16}{2.5^2} + \frac{58}{2.5^3} + \frac{752}{2^3.5^4} + \frac{2126}{2^3.5^5} + \frac{10080}{2^4.5^6} + \frac{19290}{2^4.5^7} + \frac{273440}{2^7.5^8} + \ldots\right). \end{aligned} \right.$$

Ces deux séries sont très peu convergentes; elles oscillent, la première autour de zéro, et la seconde autour de l'unité, en tendant respectivement vers ces valeurs. Wronski donne les valeurs suivantes:

Pour 2 termes	.....	$+\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{-1}$,
3 »	.....	$+\frac{7}{13} + \frac{5}{7}\sqrt{-1}$,
4 »	.....	$+\frac{5}{19} + \frac{20}{21}\sqrt{-1}$,
5 »	.....	$+\frac{1}{85} + \left(1 + \frac{4}{39}\right)\sqrt{-1}$,
6 »	.....	$+\frac{3}{16} + \left(1 + \frac{3}{16}\right)\sqrt{-1}$,
....	....	....
11 »	.....	$-\frac{2}{75} + \left(1 + \frac{31}{123}\right)\sqrt{-1}$,
12 »	.....	$+\frac{7}{76} + \left(1 + \frac{7}{29}\right)\sqrt{-1}$,

Troisième exemple. — Considérons pour dernier exemple la série

$$(\rho) \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots;$$

admettons qu'elle provienne du développement de $\frac{1}{1+x}$

$$(\sigma) \qquad 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$$

pour la valeur $x = 1$. En comparant cette série (σ) à (ι), on pourra, au moyen des formules $(\varkappa)$, y substituer la série équivalente $(\iota)'$, dont les coefficients sont ici

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -n, \quad A_2 = n^2 - n,$$
$$A_3 = -n^3 + 2n^2 - n, \quad A_4 = n^4 - 3n^3 + 3n^2 - n, \ldots;$$

par suite on a la série transformée

$$(\sigma)' \quad 1 - n\frac{x}{n+x} + n(n-1)\frac{x^2}{(n+x)^2} - n(n-1)^2\frac{x^3}{(n+x)^3} + \cdots,$$

série évidemment convergente pour $x = 1$, quelle que soit la valeur positive et finie de n, et dont la valeur est $\frac{1}{2}$:

$$(\rho)' \qquad 1 - \frac{n}{n+1} + \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} - \frac{n(n-1)^2}{(n+1)^3} + \frac{n(n-1)^3}{(n+1)^4} - \cdots$$

ou

$$1 - \frac{n+1}{n}\left[1 - \frac{n-1}{n+1} + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \cdots\right],$$

ou enfin

$$1 - \frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \frac{1}{2},$$

Si $n = 1$, la série $(\sigma)'$ se réduit à

$$1 - \frac{x}{1+x}.$$

Faisons maintenant une seconde hypothèse sur l'origine de la série (ρ); on peut admettre qu'elle provienne du développement de

$\frac{1}{1+x+x^2}$, c'est-à-dire de la série

$$(\tau) \qquad 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + x^9 - x^{10} + \ldots.$$

Il est évident que pour $x = 1$ la série s'identifie avec la série (ρ), tandis que la fonction dont la série (τ) est le développement prend la valeur $\frac{1}{3}$ différente de celle qui précède; de même, si l'on considérait le développement de $\frac{1+x^2}{1+x+x^2}$, c'est-à-dire

$$(\varphi) \qquad 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - \ldots,$$

qui se réduit également à la série (ρ) quand $x = 1$, on aurait encore une valeur différente $\frac{2}{3}$; quant aux formules de transformation, elles donneraient respectivement, en faisant $n = 1$,

$$(\tau)' \quad 1 - \frac{x}{1+x} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^5 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^7 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^8 + \cdots,$$

$$(\varphi)' \quad 1 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^5 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^6 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^8 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^9 + \cdots,$$

séries convergentes pour $x = 1$; elles donnent, en effet,

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^8} + \cdots,$$

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^9} + \cdots.$$

L'exemple des séries (σ), (τ) et (φ), donnant pour $x = 1$ la même suite (ρ) avec des valeurs différentes, est dû à Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XII, p. 428). Wronski donne la transformation de la série (σ) en (σ)' et celle de la série logarithmique qui conduit à la série bien connue (μ)'. Il donne encore l'exemple suivant. La série

$$(\chi) \qquad 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + \ldots$$

peut dériver de

$$(\psi) \qquad 1 + x - x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - x^6 - x^7 + \ldots$$

ou de

$$(\omega) \qquad 1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 - x^{10} + \ldots.$$

Ces deux séries proviennent respectivement du développement de $\frac{1+x}{1+x^2}$ et de celui de $\frac{1+x}{1+x^3}$, expressions dont les valeurs sont l'unité pour $x = 1$. Les séries (ψ) et (ω) donnent pour transformées, en faisant $n = 1$,

$$(\psi)' \quad \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{1+x} - 2\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^3 - 4\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^4 \\ - 4\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^5 + 8\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^7 + \cdots, \end{cases}$$

$$(\omega)' \quad \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{1+x} + \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2 - 3\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^4 \\ - 9\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^5 - 18\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^6 - \cdots, \end{cases}$$

séries convergentes pour $x = 1$; elles se réduisent en effet à l'unité,

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \frac{1}{64} - \cdots,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{3}{2^4} - \frac{3^2}{2^5} - \frac{3^2}{2^5} - \cdots.$$

Nous pensons que ces exemples très simples suffiront pour montrer la possibilité de *substituer* une série convergente à une série divergente, ou de *transformer* les séries, suivant l'expression de Wronski. Ces exemples montrent aussi comment on peut évaluer des séries numériques en les rapportant à une série générale hypothétique.

En terminant ce court exposé, nous ferons observer que les formules $(\varkappa)$ que nous avons données, se rapportant aux deux séries (ι) et $(\iota)'$, ne sont pas les plus générales que l'on puisse admettre; elles peuvent se trouver en défaut dans certains cas; il faut alors recourir à d'autres formules ou même essayer les autres schémas de convergence, parmi lesquels, suivant Wronski, on en trouvera toujours un qui réponde à la question proposée.

Ajoutons encore que les deux quantités arbitraires a et n que renferme la série $(\iota)'$ permettent d'augmenter dans certaines limites la convergence du développement de la fonction $F(x)$; ainsi, en laissant à a la valeur 1 et en faisant $n=0$, on obtient pour le logarithme de 2 un développement moins convergent que le développement $(\mu)'$, où $n=1$. Il est bien entendu qu'il ne faut pas ici considérer le même nombre de termes, mais il faut prendre, dans chaque série, tous les termes qui précèdent ceux d'une même puissance de $\frac{x-a}{n+x}$, à laquelle on s'arrête.

Parmi tous les développements d'une même fonction, il en existe un qui possède le maximum de convergence; ce développement peut même quelquefois être limité. Ainsi, au moyen de la série $(\iota)'$, nous obtenons un nombre infini de développements de la fonction $L(x)$; mais, comme on le sait, on en trouverait encore d'autres; l'expression (α) permet d'obtenir tous ceux que l'on désire. Par exemple, si l'on compare $(\iota)'$ et (α), on a

$$\Omega_1(x)=\frac{x-a}{n+x},\quad \Omega_2(x)=\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^2,\quad \Omega_3(x)=\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^3,\quad \ldots$$

Les fonctions Ω étant toutes arbitraires, nous pouvons admettre que la première quantité n qui entre dans la première fonction Ω_1 soit différente des autres quantités, désignées aussi par n, qui entrent dans les fonctions Ω_2, Ω_3, ...; nous distinguerons la première quantité n par l'indice 1. Cette quantité n_1, complètement arbitraire, peut être généralement une fonction de x; en la déterminant par la condition que $\Omega_1(x)$ représente le mieux possible la fonction $F(x)$, la série complémentaire aura relativement une valeur minima.

D'après cela, il faut satisfaire à la relation

$$d\Omega_1(x)\,d^2F(x)-d^2\Omega_1(x)\,dF(x)=0,$$

ce qui donne

$$(n_1+x)\frac{d^2F(x)}{dx^2}+2\frac{dF(x)}{dx}=0.$$

Ici les coefficients de la série complémentaire diffèrent de ceux de la série $(\iota)'$. On trouverait

$$(\alpha\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) &= F(a) + \frac{dF(a)}{da}\left[1-(x-a)\frac{d^2F(x)}{dx^2}\frac{1}{2\dfrac{dF(x)}{dx}}\right](x-a) \\ &\quad + \Xi_3\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^3 + \Xi_4\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^4 + \cdots, \end{aligned}\right.$$

en faisant

$$(\alpha\beta)\quad \left\{\begin{aligned} \Xi_{\mu+1} &= (n+a)^{\mu+1}\left\{\frac{1}{1^{\mu+1|1}}\frac{d^{\mu+1}F(a)}{da^{\mu+1}} - 2\frac{dF(a)}{da}\frac{d^{\mu-1}}{da^{\mu-1}}\left[\frac{d^2F(a)}{d^2a}\frac{1}{\dfrac{dF(a)}{da}}\right]\right\} \\ &\quad + \frac{\mu}{1}\Xi_\mu - \frac{\mu^{2|-1}}{1^{2|1}}\Xi_{\mu-1} + \frac{\mu^{3|-1}}{1^{3|1}}\Xi_{\mu-2} - \ldots + (-1)^{\mu-1}\frac{\mu^{\mu-2|-1}}{1^{\mu-2|1}}\Xi_3. \end{aligned}\right.$$

En prenant $n = a$, le développement du logarithme de x devient

$$(\alpha\gamma)\quad \left\{\begin{aligned} L(x) &= L(a) + \frac{(x+a)(x-a)}{2ax} \\ &\quad - 4\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^5 + \frac{3}{7}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^7 + \cdots\right]. \end{aligned}\right.$$

Pour l'instant, nous ne pouvons donner plus de détails sur ce sujet, qui se trouve traité dans le Tome I de la *Réforme* ou à la fin du troisième Volume de l'*Encyclopédie de Montferrier*.

Nous pensons que cette digression suffit provisoirement pour répondre aux observations que nous avons reçues et dont nous nous sommes efforcé de tenir compte. Le sujet que nous traitons offre des difficultés toutes particulières, et nous n'ignorons pas que la tâche est difficile; nous sommes persuadé, en l'entreprenant, que nous contribuerons à faire connaître des résultats d'une haute importance et d'un intérêt immédiat; aussi demanderons-nous toute l'indulgence du lecteur. Nous accueillerons avec reconnaissance les observations que l'on voudra bien nous transmettre, s'il nous arrivait encore d'employer, par suite de quelque inadvertance, des expressions dont la signification ne paraîtrait pas suffisamment précise, ou même des expressions incorrectes.