JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Coup d'œil sur la théorie des séries trigonométriques les plus usuelles, et sur une raison naturelle de leur convergence, applicable aux autres développements de fonctions arbitraires employés en Physique mathématique

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 147-160.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7__147_0>

Coup d'œil sur la théorie des séries trigonométriques les plus usuelles, et sur une raison naturelle de leur convergence, applicable aux autres développements de fonctions arbitraires employés en Physique mathématique;

Par M. J. BOUSSINESQ.

---

§ I. — *Démonstration de la série trigonométrique principale.*

1. Soit $f(x)$ une fonction finie et périodique de x pouvant, dans l'intervalle d'une période $2a$, de $x=-a$ à $x=+a$ par exemple, recevoir des valeurs quelconques et présenter même un nombre fini de discontinuités : toutefois, dans ce dernier cas, on convient, pour que la fonction $f(x)$ ne cesse pas d'être déterminée, de lui attribuer une valeur égale à la moyenne arithmétique de sa valeur précédente et de la suivante, moyenne représentée par $\frac{f(x-\varepsilon)+f(x+\varepsilon)}{2}$, où ε désigne un infiniment petit positif. Il est naturel de chercher à exprimer cette fonction $f(x)$ au moyen des fonctions les plus simples qui admettent la même période $2a$, c'est-à-dire au moyen des fonctions $A_i \cos\frac{i\pi x}{a}+B_i\sin\frac{i\pi x}{a}$, i désignant un entier quelconque (qu'on peut supposer positif), et A_i, B_i deux coefficients constants. Proposons-nous donc de développer $f(x)$ en une série de la forme

$$(1)\qquad f(x)=\sum_{i=0}^{i=\infty}\left(A_i\cos\frac{i\pi x}{a}+B_i\sin\frac{i\pi x}{a}\right).$$

A cet effet, nous admettrons d'abord que le développement soit possible, ou que la fonction $f(x)$ égale bien la somme limite d'une série convergente ordonnée suivant les cosinus et sinus des multiples de $\frac{\pi x}{a}$, et nous déterminerons, dans cette hypothèse, les coefficients A_i, B_i. Puis, une fois que nous connaîtrons la forme précise de la série, nous démontrerons qu'elle convient pour toute fonction périodique $f(x)$.

Le calcul de A_i, B_i se fait par la méthode de Fourier (ou d'Euler), bien connue. On multiplie l'équation (1) par $\cos\frac{i\pi x}{a}\,dx$ ou par $\sin\frac{i\pi x}{a}\,dx$, et l'on intègre les deux membres dans toute l'étendue d'une période, de $x=-a$ à $x=+a$, en observant que le second membre de (1) peut être traité comme une somme d'un nombre fini de termes, vu que l'erreur commise sur ce second membre, en l'arrêtant à un terme assez éloigné, est aussi petite qu'on veut et ne donnera, dans le résultat des intégrations, qu'un terme complémentaire inférieur, lui aussi, à toute erreur donnée. D'ailleurs, les produits du terme quelconque

$$A_j\cos\frac{j\pi x}{a}+B_j\sin\frac{j\pi x}{a}$$

du second membre de (1) par $\cos\frac{i\pi x}{a}$ et par $\sin\frac{i\pi x}{a}$ sont, respectivement,

$$\frac{1}{2}A_j\left[\cos\frac{(i+j)\pi x}{a}+\cos\frac{(i-j)\pi x}{a}\right]+\frac{1}{2}B_j\left[\sin\frac{(i+j)\pi x}{a}-\sin\frac{(i-j)\pi x}{a}\right],$$
$$\frac{1}{2}A_j\left[\sin\frac{(i+j)\pi x}{a}+\sin\frac{(i-j)\pi x}{a}\right]+\frac{1}{2}B_j\left[\cos\frac{(i-j)\pi x}{a}-\cos\frac{(i+j)\pi x}{a}\right],$$

et se composent de termes proportionnels soit à des sinus qui ont leurs valeurs moyennes nulles, soit à des cosinus nuls aussi en moyenne, si ce n'est quand ils se réduisent à l'unité ou qu'on a $i\pm j=0$, c'est-à-dire ou $i=j=0$, ou du moins $j=i$. Or il est évident que tous ces termes, multipliés par dx et intégrés dans l'intervalle $2a$, qui comprend une ou plusieurs de leurs périodes, donnent pour résultats les produits de $2a$ par leurs valeurs moyennes. Il vient donc simplement :

1° Pour les valeurs de i qui diffèrent de zéro,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{i\pi x}{a}\,dx = a\,A_i, \quad \int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{i\pi x}{a}\,dx = a\,B_i;$$

2° Pour $i = 0$ $\left(\text{ce qui annule le terme } A_i \sin\frac{i\pi x}{a}\right)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2a A_0.$$

Afin d'éviter plus tard toute confusion, appelons ξ, dans ces formules, la variable d'intégration, et posons, en conséquence,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(\xi)\,d\xi, \\ A_i &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(\xi)\cos\frac{i\pi\xi}{a}\,d\xi, \\ B_i &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(\xi)\sin\frac{i\pi\xi}{a}\,d\xi. \end{aligned}\right.$$

La relation (1) deviendra celle qu'on se proposait d'établir :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(\xi)\,d\xi \\ & + \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{i=\infty}\left[\cos\frac{i\pi x}{a}\int_{-a}^{a} f(\xi)\cos\frac{i\pi\xi}{a}\,d\xi + \sin\frac{i\pi x}{a}\int_{-a}^{a} f(\xi)\sin\frac{i\pi\xi}{a}\,d\xi\right]. \end{aligned}\right.$$

2. On peut, dans cette formule (3), en n'y faisant varier d'abord, au second membre, i que depuis 1 jusqu'à un entier très grand n, transporter les facteurs $\cos\frac{i\pi x}{a}$, $\sin\frac{i\pi x}{a}$ sous les signes d'intégration $\int_{-a}^{a}$ et réduire ensuite une somme d'intégrales à l'intégrale d'une somme. La formule (3) revient donc à poser

$$(4)\quad f(x) = \lim \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(\xi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{i=n}\cos\frac{i\pi(x-\xi)}{a}\right]d\xi \quad (\text{pour } n \text{ infini}).$$

Mais il est possible de simplifier encore celle-ci, au moyen de la formule qui donne la somme des cosinus des multiples successifs d'un arc quelconque α, et qui se déduit de la relation

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos i\alpha = \sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(i-\frac{1}{2}\right)\alpha,$$

en y faisant successivement $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, puis ajoutant tous les résultats. Il vient ainsi

$$\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{i=1}^{i=n}\cos i\alpha = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\frac{\alpha}{2},$$

ou bien

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{i=n}\cos i\alpha = \frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

La formule (4) équivaut donc encore à celle-ci :

$$(5)\quad f(x) = \lim \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} \frac{f(\xi)}{2\sin\frac{\pi(x-\xi)}{2a}} \sin\frac{(2n+1)\pi(x-\xi)}{2a}\, d\xi \quad \text{(pour } n \text{ infini).}$$

Changeant enfin de variable d'intégration, posons

$$x - \xi = u \quad \text{ou} \quad \xi = x - u, \quad d\xi = -du,$$

et il vient

$$(6)\quad f(x) = \lim \frac{1}{a}\int_{x-a}^{x+a} \frac{f(x-u)}{2\sin\frac{\pi u}{2a}} \sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}\, du \quad \text{(pour } n \text{ infini).}$$

3. Démontrons maintenant que ces formules (3), (4), (5), (6) conviennent, quelle que soit la fonction périodique $f(x)$. Il suffit, pour cela, de faire voir que le second membre de (6), ou plutôt l'expression

$$(7)\quad \frac{1}{a}\int_{x-a}^{x+a} \frac{f(x-u)}{2\sin\frac{\pi u}{2a}} \sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}\, du,$$

s'approche indéfiniment de $f(x)$ quand n y grandit sans limite. Considérons donc cette expression où, pour fixer les idées, nous supposerons x compris entre $-a$ et $+a$. Sans la présence, sous le signe $\int$, du facteur $\frac{f(x-u)}{2\sin\frac{\pi u}{2a}}$, elle égalerait l'aire comprise entre un axe des abscisses u et les $2n+1$ arceaux que présenterait, de $u=x-a$ à $u=x+a$, la sinusoïde ayant pour ordonnée $\frac{1}{a}\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}$. L'aire partielle limitée par chaque arceau est, en valeur absolue, comparable au produit de la très petite base $\frac{2a}{2n+1}$ de l'arceau par l'ordonnée maximum $\frac{1}{a}$; en sorte que la somme de toutes ces aires serait finie, comparable à 2, si on les prenait en valeur absolue. Mais, comme deux arceaux consécutifs ont leurs ordonnées égales chacune à chacune, également espacées et de signes contraires, ces aires, en très grand nombre, s'entre-détruisent deux à deux et ont leur somme algébrique incomparablement plus faible que leur somme absolue, c'est-à-dire infiniment petite à la limite $n=\infty$. Voyons actuellement en quoi le facteur $\frac{f(x-u)}{2\sin\frac{\pi u}{2a}}$ modifie le résultat. Ce facteur, où $f(x-u)$ est toujours fini, ne peut devenir infini que pour $u=0$, car l'arc $\frac{\pi u}{2a}$ ne varie que de $\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}-1\right)$ à $\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+1\right)$, c'est-à-dire dans une partie de l'intervalle compris entre $-\pi$ et $+\pi$ (puisque x est supposé moindre que a en valeur absolue).

Faisons d'abord abstraction des valeurs de u qui sont très voisines de zéro. Pour toutes les autres, le facteur $\frac{f(x-u)}{2\sin\frac{\pi u}{2a}}$ reste fini, et il varie graduellement dans des intervalles qui comprennent un grand nombre d'arceaux de la sinusoïde. Les produits des ordonnées de celle-ci par $\frac{f(x-u)}{2\sin\frac{\pi u}{2a}}$ y sont donc finis et sensiblement les mêmes (en valeur absolue) pour deux arceaux consécutifs, de sorte que les aires de ces arceaux continuent à s'entre-détruire sensiblement et leur somme algébrique à être incomparablement moindre que leur somme arithmétique, c'est-à-dire nulle à la limite.

Quant aux éléments de l'intégrale (7), pour lesquels u est très petit et compris, par exemple, entre deux limites fort rapprochées $\pm\mu$, le facteur $\dfrac{f(x-u)}{2\sin\dfrac{\pi u}{2a}}$ s'y réduit sensiblement à

$$\frac{a}{\pi u}f(x-u),$$

ou, si ε désigne un infiniment petit positif, à $\dfrac{a}{\pi u}f(x+\varepsilon)$ pour les valeurs négatives de u, à $\dfrac{a}{\pi u}f(x-\varepsilon)$ pour les valeurs positives de u. Ces éléments valent donc, en tout,

$$\frac{f(x+\varepsilon)}{\pi}\int_{-\mu}^{0}\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}\frac{du}{u}+\frac{f(x-\varepsilon)}{\pi}\int_{0}^{\mu}\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}\frac{du}{u},$$

ou bien, vu que la fonction multipliant du sous les signes $\int$ est paire et que $f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)$ égale toujours $2f(x)$,

$$(8)\qquad \frac{2f(x)}{\pi}\int_{0}^{\mu}\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}\frac{du}{u}.$$

Mais, quand n devient très grand, on peut remplacer la limite supérieure μ par ∞. En effet, on n'ajoute ainsi à l'intégrale (8) que des aires d'arceaux de sinusoïde analogues à ceux dont il vient d'être parlé, aires très petites et alternativement positives et négatives, qui seront ici lentement décroissantes d'un arceau au suivant, à cause du dénominateur u de plus en plus considérable, et dont, par conséquent, la somme, moindre que la première d'entre elles, sera négligeable.

La valeur limite de l'expression (8) est donc la même que celle de

$$(9)\qquad \frac{2f(x)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}\frac{du}{u}.$$

Or on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ku}{u}du$, où k est une constante positive quelconque, peut s'écrire $\int_0^\infty \frac{\sin ku}{ku} d(ku) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, et qu'elle a pour valeur $\frac{\pi}{2}$. Donc l'expression (9), limite de (7), n'est autre que $f(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

§ II. — *Formules dérivées.*

4. La formule (3) en comprend quatre autres, qui sont souvent utiles. Les deux premières s'obtiennent en concevant que la fonction $f(x)$ soit ou impaire ou paire, c'est-à-dire telle qu'on ait

$$f(-x) = \mp f(x),$$

ce qui n'empêche pas de lui attribuer des valeurs quelconques entre les limites $x = 0$ et $x = a$.

Si $f(-x) = -f(x)$, les expressions (2) de A_0 et de A_i sont nulles, vu que sous les signes $\int$ les éléments correspondant à deux valeurs égales et contraires de ξ se détruisent. Quant aux éléments analogues de l'expression de B_i, ils sont égaux et s'ajoutent. Il vient donc

$$f(x) = \frac{2}{a}\sum_{i=1}^{i=\infty} \sin\frac{i\pi x}{a}\int_0^a f(\xi)\sin\frac{i\pi\xi}{a}\,d\xi. \tag{10}$$

Si, au contraire, $f(-x) = f(x)$, c'est l'expression (2) de B_i qui s'annule, et ce sont celles de A_0 et A_i qu'on peut ne prendre qu'entre les limites 0 et a, sauf à doubler les résultats. On trouve

$$f(x) = \frac{1}{a}\int_0^a f(\xi)\,d\xi + \frac{2}{a}\sum_{i=1}^{i=\infty}\cos\frac{i\pi x}{a}\int_0^a f(\xi)\cos\frac{i\pi\xi}{a}\,d\xi. \tag{11}$$

Les deux dernières formules cherchées se déduisent de (10) et (11), en supposant que la fonction $f(x)$ reçoive, à égale distance des deux limites zéro et a, des valeurs égales et de même signe dans la formule (10), égales et de signes contraires dans la formule (11), c'est-à-dire en posant respectivement $f(a-x) = \pm f(x)$. Alors, aux seconds membres de (10) et (11), les termes pour lesquels i est pair s'annulent, vu que les éléments respectifs d'intégrale $f(\xi)\sin\frac{i\pi\xi}{a}d\xi$, $f(\xi)\cos\frac{i\pi\xi}{a}d\xi$, qui correspondent à deux valeurs de ξ également distantes de zéro et a se détruisent. Au contraire, ces deux éléments s'ajouteraient et seraient égaux pour i impair. Si, afin d'abréger, l'on appelle b la moitié de a, la fonction $f(x)$, complètement arbitraire depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{a}{2}=b$, comportera ainsi, entre ces limites, les deux expressions

$$(12)\qquad f(x)=\frac{2}{b}\sum_{i=0}^{i=\infty}\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2b}\int_0^b f(\xi)\sin\frac{(2i+1)\pi\xi}{2b}d\xi,$$

$$(13)\qquad f(x)=\frac{2}{b}\sum_{i=0}^{i=\infty}\cos\frac{(2i+1)\pi x}{2b}\int_0^b f(\xi)\cos\frac{(2i+1)\pi\xi}{2b}d\xi.$$

On passerait d'ailleurs de l'une de ces formules à l'autre par les changements de x en $b-x$ et de $f(b-x)$ en $f(x)$.

5. Enfin, la relation (4) conduit à la formule classique de Fourier, en y faisant grandir indéfiniment la période $2a$, ce qui revient à supposer la fonction $f(x)$ donnée arbitrairement de $x=-\infty$ à $x=+\infty$. Alors, quand on passe d'un terme de la série Σ au terme suivant, l'expression $\frac{i\pi}{a}$, qu'on peut appeler α, croît de la très petite quantité $\Delta\alpha=\frac{\pi}{a}$, qui devient, à la limite, une différentielle $d\alpha$; en sorte qu'il semble permis de remplacer, dans (4), le facteur $\frac{1}{a}$ par $\frac{d\alpha}{\pi}$, puis de faire passer $d\alpha$ sous le signe Σ et de transformer la somme Σ en une intégrale prise de $\alpha=0$ à $\alpha=\frac{n\pi}{a}$. Il vient donc

$$(14)\quad f(x)=\lim\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,d\xi\int_0^{\alpha}\cos\alpha(x-\xi)\,d\alpha\quad(\text{pour } \alpha \text{ infini}).$$

ou bien,

$$(15)\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\alpha(x-\xi)\,d\xi.$$

Arrêtons-nous un instant à cette relation, qui, toute importante qu'elle soit dans bien des cas, n'a plus la même netteté que la formule (4), par suite de l'hypothèse $a=\infty$. Effectuons, dans le second membre de (14), l'intégration par rapport à α, en n'y supposant pas encore infinie la limite supérieure α. Ce second membre devient

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\frac{\sin\alpha(x-\xi)}{x-\xi}\,d\xi,$$

ou bien, si nous posons $x-\xi=u$ comme aux n^{os} **2** et **3**,

$$(16)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-u)}{u}\sin\alpha u\,du.$$

Le nombre α étant très grand, on peut appliquer à cette expression (16) la discussion faite au n° **3** sur l'expression (7), à cela près qu'ici le facteur $\frac{f(x-u)}{\pi u}$ remplace le facteur plus complexe $\frac{f(x-u)}{2a\sin\frac{\pi u}{2a}}$. On reconnaît de la sorte que les éléments de l'intégrale correspondant aux très petites valeurs absolues de u rendent à eux seuls, pour α infini, l'expression (16) égale à $f(x)$. Comme d'ailleurs, d'après ce qu'on a vu au n° **3**, les autres éléments de la même intégrale qui correspondent à des valeurs de u comprises dans tout intervalle fini ne donnent qu'un total nul à la limite, il faudra et il suffira, pour que la formule (14) soit applicable, que les éléments de l'intégrale (16) correspondant aux très grandes valeurs absolues de u soient eux-mêmes négligeables. C'est ce qui arrivera, par exemple, si la fonction $f(x-u)$ est continue pour les très grandes valeurs absolues de sa variable, et si, à mesure que u y tend vers $\pm\infty$, elle décroît, ou du moins grandit assez peu pour que l'expression $\frac{f(x-u)}{u}$ s'approche de plus en plus de zéro. Alors, en effet, les éléments considérés de l'intégrale (16) se trouvent groupés de manière à représenter des aires alternativement positives et négatives, toutes fort petites et qui décroissent quand on passe de l'une à l'autre, à mesure que u tend soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$. La somme algébrique de ces aires est donc moindre que la première d'entre elles, laquelle s'annule pour α infini, et la formule (14) est bien exacte.

Mais il importe d'observer que la série ainsi exprimée par (14) ou (16) peut devoir en partie sa convergence, sa valeur finie et déterminée, à l'ordre dans lequel se succèdent ses éléments, et non toujours à leur seule petitesse absolue; de sorte qu'il faudra ne la transformer qu'avec de minutieuses précautions et en vérifiant, dans chaque cas, si l'on n'altère pas sa valeur. Même le passage de la formule (14) à la formule (15) donne matière à discussion, soit à cause du mode de groupement des éléments, qui n'est plus le même, soit parce que la variable $x - \xi = u$ devient alors infinie avant qu'on effectue l'intégration par rapport à α $\left[\text{et non après, circonstance qui avait, dans (16), réduit à } \pi u \text{ le dénominateur plus complexe } 2\alpha \sin \frac{\pi u}{2\alpha}\right]$. Il en serait autrement, et l'ordre des intégrations deviendrait arbitraire, si la fonction $f(x)$ s'annulait identiquement en dehors de deux limites données $x = p$, $x = q$; car, alors, dans le second membre de (14), où α est supposé très grand mais non encore infini, l'intégration par rapport à ξ pourrait ne se faire que de $\xi = p$ à $\xi = q$, et ce second membre serait une intégrale double ordinaire, ayant sa fonction sous les signes $\int$ finie et ses limites, également finies, bien déterminées.

§ III. — *Sur une raison générale, propre à justifier synthétiquement l'emploi des divers développements de fonctions arbitraires usités en Physique mathématique.*

6. Ce qui précède est une théorie purement analytique du développement d'une fonction arbitraire (donnée dans un certain intervalle) en séries procédant suivant les sinus et cosinus des multiples naturels ou impairs d'un arc proportionnel à la variable. Mais on sait que les géomètres ont été conduits à l'étude de ces séries par des problèmes de Physique, savoir, ceux où, le temps t, par exemple, étant la variable indépendante principale, x une autre variable, caractéristique des différentes parties d'un corps, u la fonction inconnue de x et t qui représente un état physique considéré (température, déplacement vibratoire, etc.), et enfin $f(x)$ la fonction arbitraire de x qui exprime les valeurs initiales de u, la nature des équations du problème montre qu'avec un état initial de la forme $\mathrm{A}\cos mx + \mathrm{B}\sin mx$, et certaines valeurs de m, la fonction cherchée u se réduit à ce qu'on appelle une *solution simple*, c'est-à-dire à une expression, relativement facile à obtenir, ne dépendant de t que par un facteur, le même pour tout le corps ; de sorte que, vu d'ailleurs la forme linéaire des équations et la possibilité de superposer simplement les effets d'un nombre quelconque d'états initiaux, il ne s'agit plus, pour avoir l'expression générale de u, que de décomposer $f(x)$ en termes de cette forme

$$\mathrm{A}\cos mx + \mathrm{B}\sin mx.$$

Dans les cas où les valeurs de m sont multiples de l'une d'elles, un tel mode de décomposition peut toujours se faire, d'après les démonstrations directes données aux paragraphes précédents. Mais, dès que certaines conditions, dites *définies*, relatives aux limites entre lesquelles varie x, se compliquent un peu, les valeurs de m cessent d'être les multiples de l'une d'elles, même quand les intégrales simples correspondent encore à un état initial exprimable par un sinus ou un cosinus. De plus, ce dernier cas est lui-même très exceptionnel. Il continue bien à y avoir, toujours, une infinité de solutions *simples* ne dépendant de t que par un facteur où les autres variables x, y, z n'entrent pas, et où t se trouve affecté d'un coefficient k d'autant plus grand que la solution simple varie plus vite en fonction de t, x, y, z ; mais il faut recourir, pour représenter les états initiaux correspondants, qu'on peut appeler aussi des *états initiaux simples*, à des expressions plus compliquées que des cosinus ou des sinus. Or, dans ces divers cas, on tâche encore de former l'intégrale générale par voie d'addition, en dédoublant ou décomposant l'état initial arbitraire donné en états initiaux simples, pris dans l'ordre des valeurs croissantes de k, c'est-à-dire rangés suivant la rapidité relative avec laquelle ils varient d'un point à l'autre, les plus lents à changer étant les premiers ; et l'on sait que le procédé de Fourier, pour la détermination des coefficients ou amplitudes des états initiaux simples, ne cesse pas d'être applicable, du moins dans la théorie de la chaleur et dans celle des petites vibrations ou oscillations.

Il ne reste ainsi de doute que sur la question même de savoir si cette sorte complexe de dédoublement de l'état initial est toujours possible. Malheureusement, une sommation générale et directe des séries qui l'expriment n'a pu encore être effectuée. Il y a donc lieu de chercher, à défaut d'une démonstration analytique, quelque aperçu synthétique, ou, pour ainsi dire, quelque raison de bon sens, propre à justifier ces modes indispensables de développement et à expliquer la convergence qu'on leur a effectivement reconnue quand on en a tenté le calcul numérique.

7. La raison naturelle désirée se trouve dans le double fait qui constitue le caractère commun de toutes les questions de Physique mathématique étudiées jusqu'à présent et sans lequel on ne pourrait pas les traiter par des équations aux dérivées partielles, à savoir, d'une part, dans le nombre immense des points matériels composant toute particule perceptible de matière, et, d'autre part, dans la graduelle variation de l'état physique *moyen local* quand on passe d'une particule à une autre, variation supposée toujours assez peu brusque pour que, même dans les cas où elle est le plus rapide, des milliards de points matériels présentent sensiblement le même état. C'est cette variation très graduelle qui permet de ne tenir aucun compte individuel des molécules en présence, mais d'exprimer simplement, pour chaque petite région, au moyen de dérivées partielles en x, y, z, 1° les différences d'état existant dans le corps suivant les divers sens, 2° les actions mutuelles, fonction de ces différences, exercées entre particules contiguës, et 3° les changements qui en résultent d'un instant à l'autre pour l'état moyen local de chaque particule ou élément de volume. Aussi, quand on introduit de la sorte des équations aux dérivées partielles à la place des équations différentielles simultanées, en nombre immense, qu'on aurait si l'on voulait exprimer les états propres de tous les points du corps, renonce-t-on, par le fait même, à comprendre dans cette analyse simplifiée les phénomènes où il se produit des différences sensibles d'état entre molécules voisines, comme doivent être, par exemple, les vibrations calorifiques des corps, ou comme le seraient des mouvements vibratoires d'une longueur d'onde comparable aux distances intermoléculaires. Eh bien! c'est justement la restriction que l'on s'impose ainsi, en se bornant à des états physiques graduellement variables, qui amène la convergence des développements des intégrales générales en séries de solutions simples rangées dans l'ordre des valeurs croissantes de k.

Représentons-nous, en effet, les équations différentielles simultanées qui régissent tous les petits mouvements possibles, même à courte période, du système, ou tous ses changements assez peu étendus d'état physique. Ces équations étant, comme on sait, linéaires et à coefficients constants dans les problèmes où les fonctions étudiées varient modérément, leurs intégrales se formeraient en superposant des solutions simples, en nombre égal à celui des équations différentielles (supposées ramenées au premier ordre), et dont chacune ne dépend de la variable indépendante t que par un facteur, commun pour tout le système, de la même forme (exponentielle ou trigonométrique) que celui que contiennent les solutions simples des équations corrélatives aux dérivées partielles. D'ailleurs, la grandeur du coefficient k de t, dans ces intégrales simples, est encore en rapport avec la rapidité des changements éprouvés, tant d'un instant à l'autre que d'un point à l'autre, par les états physiques qu'elles représentent.

Cela posé, si l'état initial donné est quelconque, s'il contient, pour les diverses régions du corps, des différences aussi sensibles entre molécules contiguës qu'entre molécules éloignées, il est clair que les solutions simples correspondant aux valeurs les plus élevées de k, et les seules propres à exprimer des changements aussi brusques, figureront dans l'intégrale avec des coefficients non moins grands que ceux des autres solutions simples. Par conséquent, on aura beau ranger les termes suivant l'ordre des grandeurs croissantes de k, on ne remarquera aucune convergence dans les sommes, ou plutôt (vu le nombre prodigieux de leurs termes) dans les *séries* ainsi obtenues. Mais il n'en sera naturellement plus de même si, au contraire, l'état initial donné varie assez peu, d'un endroit à l'autre, pour être à peu près pareil chez des milliards de points voisins, même là où ses changements sembleraient fort rapides au physicien. Alors, les termes où k est très grand, et qui expriment des états bien différents pour deux molécules contiguës, n'auront visiblement à intervenir que dans une proportion tout à fait insignifiante; en sorte que, d'une part, ces termes, dont le calcul serait d'ailleurs illusoire par les équations aux dérivées partielles que l'on substitue, à la limite, aux équations différentielles vraies du problème, s'évanouiront d'eux-mêmes, et que, d'un autre côté, les sommes exprimant les fonctions à évaluer convergeront, à partir de certaines valeurs de k, lesquelles, étant finies, seront encore très calculables, ainsi que les solutions simples où elles entrent, par les équations aux dérivées partielles.

Donc, la même circonstance qui permet de remplacer les équations différentielles simultanées du problème, dont le nombre est immense (et supposé même infini à la limite), par une ou par quelques équations aux dérivées partielles, et qui permet d'exprimer l'état initial au moyen de fonctions ne présentant, dans toute étendue perceptible, qu'un nombre restreint (et non des milliards) d'oscillations, permet aussi de compter sur la convergence des développements que donne la décomposition de cet état initial en états initiaux simples, rangés suivant l'ordre croissant de la rapidité de leurs variations.