JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. BRASSINNE

Détermination des trois axes d'un corps, sur lesquels les forces centrifuges exercent, pendant la rotation, une action maximum

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 215-218.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7__215_0>

Détermination des trois axes d'un corps, sur lesquels les forces centrifuges exercent, pendant la rotation, une action maximum;

PAR M. E. BRASSINNE.

« 1° La Dynamique s'enrichit, en 1755, d'une découverte importante et féconde en corollaires. Dans un petit Mémoire, intitulé *Specimen theoriæ turbinum*, Ségner observa que, si, après avoir imprimé à un corps de grandeur et de figure quelconques des mouvements de rotation en tous sens, on l'abandonne à lui-même, il aura toujours trois axes principaux de rotation.... La position de ces axes se détermine par une équation du troisième degré, dont les trois racines réelles répondent à chacun d'eux (BOSSUT, *Histoire des Mathématiques*).

On lit aussi dans la *Mécanique céleste*, Liv. XIV : « La découverte des axes principaux de rotation, due à Ségner, apporte des simplifications utiles. » Ajoutons que cette découverte, dont Euler ne fait pas mention, a été le point de départ de ses grands travaux, résumés dans son Ouvrage intitulé : *Theoria motus corporum rigidorum*, 1765.

Pendant la rotation autour d'un axe principal, les forces centrifuges s'entre-détruisent, mais il existe aussi en chaque point d'un corps trois axes de rotation, sur lesquels les forces centrifuges développées exercent un effet maximum, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si en un point d'un corps on détermine les trois axes principaux, et si par chacun d'eux on mène un plan qui divise en parties égales l'angle des plans rectangulaires dont il est l'intersection, les trois* *perpendiculaires menées par le point donné aux plans bissecteurs seront les axes sur lesquels l'action des forces centrifuges sera un maximum.*

Remarquons d'abord que, si l'on prend trois axes rectangulaires quelconques dont l'origine est un point du corps, et si on lui imprime une vitesse de rotation ω autour de la ligne des z, une particule dm, dont les coordonnées sont x, y, z et la distance à l'axe ρ, sera sollicitée par une force centrifuge $dm\rho\omega^2$, et, en supposant l'origine fixe, cette force agira sur un levier z, dont le moment sera $dm\rho z\omega^2$; elle aura deux composantes $dmx\omega^2$, $dmy\omega^2$ sur les plans zx, zy, qui agiront aussi sur un bras de levier z. Or, on peut remplacer tous les leviers sur le plan zx par un seul équivalent dont le bras, à partir de l'origine, sera l'unité et la force $\omega^2 \int xz\,dm$; sur le plan zy, le levier unique de même bras aura pour force $\omega^2 \int zy\,dm$. La somme des carrés des intégrales (en faisant ω égal à l'unité) sera le carré d'une résultante totale R agissant sur l'axe des z à une distance de l'origine égale à l'unité. Il est aisé de démontrer qu'en faisant tourner autour de l'origine le plan xOy, les nouvelles coordonnées x', y', introduites dans les intégrales, n'altéreront pas la somme et leurs carrés ou R^2.

2° Si l'on considère un système de droites passant par le point O d'un corps solide, et si l'on prend sur la première une longueur $On = \frac{1}{\sqrt{k}}$, sur la seconde une longueur $On' = \frac{1}{\sqrt{k'}}, \ldots, k, k', k'', \ldots$ désignant les moments d'inertie du corps relatifs aux droites successives, le lieu des points $n, n', n'', \ldots$ est la surface d'un ellipsoïde dont le centre est O et l'équation

$$(1) \qquad aX^2 + bY^2 + cZ^2 - 2dYZ - 2cXZ - 2fXY = 1.$$

Les coefficients ont les valeurs suivantes :

$$a = \int (y^2 + z^2)\,dm, \quad b = \int (x^2 + z^2)\,dm, \quad c = \int (x^2 + y^2)\,dm,$$
$$d = \int yz\,dm, \quad e = \int xz\,dm, \quad f = \int xy\,dm.$$

Ces coefficients varient avec la position des axes rectangulaires, mais l'équation (1) est toujours relative au même ellipsoïde, puisque les rayons on, on', ..., déterminés par les valeurs des moments d'inertie relatifs à ces droites, ne dépendent pas de la position des axes x, y, z. Par une simple transformation des coordonnées, on ramène l'équation (1) à la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \tag{2}$$

dans laquelle les coefficients sont les moments d'inertie relatifs aux axes principaux. Par une transformation inverse, nous reviendrons de la forme (2), supposée connue, à la forme (1) avec ses trois rectangles. Nous ferons usage des formules d'Euler, dans lesquelles nous supposerons $\varphi = 0$ (*Mécanique céleste*, t. I, p. 73), savoir :

$$\begin{gathered} x = x'\cos\psi + y'\cos\theta\sin\psi + z'\sin\theta\sin\psi, \\ y = -x'\sin\psi + y'\cos\theta\cos\psi + z'\sin\theta\cos\psi, \\ z = -y'\sin\theta + z'\cos\theta. \end{gathered}$$

Le plan x', y' fait un angle θ avec celui des xy, et sa trace sur ce dernier plan un angle ψ avec les x. La comparaison du résultat de la transformation avec l'équation (1) donne

$$\begin{gathered} -2\int x'z'\,dm = 2(A - B)\sin\psi\cos\psi\sin\theta, \\ -2\int y'z'\,dm = 2\sin\theta\cos\theta(A\sin^2\psi + B\cos^2\psi - C). \end{gathered}$$

La somme des carrés des intégrales exprimant la valeur de R^2, on aura

$$[(A - B)\sin 2\psi\sin\theta]^2 + \{\sin 2\theta[(A - B)\sin^2\psi + B - C]\}^2 = 4R^2. \tag{3}$$

Les deux conditions du maximum de R^2 sont

$$\left\{\begin{aligned} &\sin 2\theta\left\{\frac{(A - B)^2}{2}\sin^2 2\psi + 2\cos 2\theta[(A - B)\sin^2\psi + B - C)]^2\right\} = 0, \\ &\sin^2\theta\sin 2\psi\{2(A - B)^2\cos 2\psi + 4(A - B)\cos^2\theta[(A - B)\sin^2\psi + B - C]\} = 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Si l'on égalait à zéro les polynômes entre les grandes parenthèses, on rouverait, en éliminant θ, un résultat indépendant de ψ, savoir : $(B - C)(A - C) = 0$, qui indique l'incompatibilité des deux relations.

Mais on satisfait aux équations (4) de plusieurs manières; $\theta = 0$ ramène aux axes principaux

$$\theta = 90^\circ, \quad \psi = 45^\circ, \quad R = \frac{A - B}{2},$$

$$\theta = 45^\circ, \quad \psi = 90^\circ, \quad R = \frac{A - C}{2},$$

$$\theta = 45^\circ, \quad \psi = 0^\circ, \quad R = \frac{B - C}{2}.$$

Ces systèmes d'angles fixent la position de trois plans auxquels sont perpendiculaires les axes de rotation Oz', et l'on voit aisément que ces trois *axes centrifuges* sont perpendiculaires aux plans bissecteurs des angles plans rectangulaires formés par les axes principaux, ce qui démontre le théorème énoncé.

Dans le cas d'un solide de révolution, $A = B$, et les relations (4) sont satisfaites par la valeur $\theta = 45^\circ$, quel que soit l'angle ψ; par suite, les axes du maximum forment un cône droit dont les génératrices font avec l'axe 45°.