JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

De la polarisation elliptique par réflexion sur les corps transparents, pour une incidence voisine de l'angle de polarisation

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 219-238.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7__219_0>

De la polarisation elliptique par réflexion sur les corps transparents, pour une incidence voisine de l'angle de polarisation ;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Les phénomènes de la réflexion de la lumière à la surface des corps diaphanes isotropes sont fournis avec une très grande approximation par la théorie de Fresnel ou celle de Neumann, qui conduisent à des formules identiques. D'après ces deux théories, il existe un angle d'incidence pour lequel la lumière naturelle est polarisée complètement, angle trouvé auparavant par Brewster au moyen de l'expérience. D'après les recherches de M. Jamin, il existe cependant très peu de substances diaphanes qui polarisent complètement la lumière par réflexion dans le plan d'incidence, ou, autrement dit, pour lesquelles un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence puisse disparaître extérieurement dans la réflexion sous une incidence convenable ; mais l'intensité du rayon réfléchi peut seulement être très petite. Il en résulte que, dans le voisinage de l'incidence calculée par la loi de Brewster, un rayon de lumière polarisé dans un azimut quelconque donne lieu à un rayon réfléchi polarisé elliptiquement, l'ellipse de vibration étant en général très allongée.

Cauchy a donné une théorie de ce phénomène, mais j'ai démontré, dans un Mémoire qui précède, que sa théorie n'est pas admissible.

Il serait bien peu philosophique de rejeter la théorie de Neumann, qui a tant de raisons pour elle et qui donne des résultats si approchés ;

mais il convient plutôt de chercher quelle petite perturbation modifie cette théorie. Cette perturbation provient d'une très petite perte de force vive qui se fait sur le plan réflecteur, en sorte que les rayons réfléchi et réfracté ne prennent pas toute la lumière qui sort du rayon incident.

Imaginons un rayon de lumière tombant sur un corps diaphane et polarisé perpendiculairement au plan d'incidence; je démontre qu'à la rencontre du plan réflecteur il se fait en général dans les rayons réfléchi et réfracté un changement de phase par rapport au rayon incident. Quand l'incidence varie depuis zéro jusqu'à l'angle droit, ce changement de phase dans le rayon réfléchi varie depuis une fraction très petite de la demi-ondulation jusqu'à la demi-ondulation. Quand le rayon incident est au contraire polarisé dans le plan d'incidence, le changement de phase du rayon réfléchi reste toujours très petit. Si donc l'on suppose que l'on décompose un rayon polarisé dans un azimut quelconque en deux pareils rayons, la polarisation elliptique pour une incidence voisine de l'angle de Brewster dépendra surtout du changement de phase du premier rayon composant.

Je donne dans ce qui suit le moyen de calculer ce phénomène.

Rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence.

1. Supposons un rayon de lumière rencontrant un corps diaphane et polarisé perpendiculairement au plan d'incidence. Les trois vibrations incidente, réfléchie et réfractée situées dans le plan réflecteur sont perpendiculaires au plan d'incidence et leurs vitesses peuvent être représentées respectivement par

$$\sin\frac{2\pi\tau}{\tau},\quad v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right),\quad u\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right),$$

λ, λ' étant les longueurs d'ondulation dans le premier et dans le second milieu, t le temps, τ la durée de la vibration, α, β étant les changements de phase dans les rayons réfléchi et réfracté; v, u sont regardés comme positifs.

Admettons qu'à la surface de séparation des deux milieux les deux premières vitesses de vibration aient une somme égale à la troisième, et nous aurons

$$(1)\qquad \sin\frac{2\pi t}{\tau} + v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\alpha}{\lambda}\right) = u\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\beta}{\lambda'}\right).$$

Nous admettons avec Neumann que la densité de l'éther est la même dans les deux milieux et que l'élasticité est différente. D'après cela, si le principe de la conservation de la force vive a lieu, on obtient, par un calcul connu,

$$\sin i\cos i\left[\sin^2\frac{2\pi t}{\tau} - v^2\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right] = u^2\sin r\cos r\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\beta}{\lambda'}\right),$$

(Nous reviendrons d'ailleurs plus loin sur le calcul de cette équation.)

En divisant la seconde équation par la première, on a

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sin i\cos i\left[\sin\frac{2\pi t}{\tau} - v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\alpha}{\lambda}\right)\right] \\ &\qquad = u\sin r\cos r\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\beta}{\lambda'}\right).\end{aligned}\right.$$

Or, s'il n'y a pas d'angle de polarisation complète, c'est-à-dire si, le rayon incident étant polarisé comme nous l'avons dit, le rayon réfléchi ne peut disparaître complètement quelle que soit l'incidence, alors l'équation (1) étant admise, l'équation (2) est impossible. En effet, des équations (1) et (2) on tirerait

$$v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\alpha}{\lambda}\right) = \frac{\operatorname{tang}(i-r)}{\operatorname{tang}(i+r)}\sin\frac{2\pi t}{\tau},$$

et, pour $i + r = \frac{\pi}{2}$, on aurait

$$v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\alpha}{\lambda}\right) = 0;$$

la vibration réfléchie serait donc nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'équation (2) a été déduite comme conséquence du principe de la conservation de la force vive; l'équation (2) n'étant donc plus possible rigoureusement, ce principe n'a plus lieu que d'une manière très approchée et les rayons réfléchi et réfracté ne prennent pas toute la force vive qui émane du rayon incident.

L'équation (2) n'étant plus exacte, nous devons la remplacer par la suivante

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\sin i\cos i\left[\sin\frac{2\pi t}{\tau}-v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]\\&\quad=u\sin r\cos r\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right)+\mathrm{B}\sin\frac{2\pi t}{\tau}+\mathrm{C}\cos\frac{2\pi t}{\tau},\end{aligned}\right.$$

B, C étant des fonctions de i qui restent toujours très petites.

Remarquons que le mouvement vibratoire développe sur le plan réflecteur des forces élastiques tangentielles à ce plan et perpendiculaires au plan d'incidence. L'équation (2) exprimerait que les deux forces tangentielles développées par les mouvements incident et réfléchi ont une somme égale à la force développée par le mouvement réfracté. D'après l'équation (3) au contraire, l'égalité entre ces forces élastiques n'a plus lieu rigoureusement. Cette remarque n'étant pas indispensable pour le sujet qui nous occupe, je ne crois pas nécessaire de développer le calcul qui la démontre.

2. Les quantités u, v, α, β sont indépendantes de t, par conséquent les équations (1), (3) reviennent aux quatre suivantes

$$1+v\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda}=u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'},$$

$$\sin i\cos i\left(1-v\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right)=u\sin r\cos r\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'}+\mathrm{B},$$

$$v\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda}=u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'},$$

$$-v\sin i\cos i\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda}=u\sin r\cos r\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}+\mathrm{C}.$$

En résolvant ces quatre équations, on obtient d'abord

$$v\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{\sin 2i - \sin 2r - 2B}{\sin 2i + \sin 2r},$$

$$u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'} = \frac{2\sin 2i - 2B}{\sin 2i + \sin 2r},$$

$$v\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{-2C}{\sin 2i + \sin 2r},$$

$$u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'} = \frac{-2C}{\sin 2i + \sin 2r};$$

puis on en conclut

$$v^2 = \frac{(\sin 2i - \sin 2r - 2B)^2 + 4C^2}{(\sin 2i + \sin 2r)^2},$$

$$u^2 = \frac{4(\sin 2i - B)^2 + 4C^2}{(\sin 2i + \sin 2r)^2},$$

$$\tang\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{-2C}{\sin 2i - \sin 2r - 2B},$$

$$\tang\frac{2\pi\beta}{\lambda'} = \frac{-C}{\sin 2i - B}.$$

Le premier terme de v^2 s'annulera pour la valeur de i qui satisfait à l'équation

$$\sin 2i - \sin 2r - 2B = 0,$$

mais v ne s'annulera pas pour cette valeur de i.

3. Occupons-nous de la force vive absorbée.

Concevons que la lumière se propage par ondes planes, le mouvement vibratoire étant le même dans toute l'étendue d'une de ces ondes. Considérons un parallélépipède rectangle d'éther ayant une dimension AC dans la direction du rayon incident, une arête CD dans le plan d'incidence et la troisième perpendiculaire à ce plan; supposons que la première arête soit égale à $\frac{\lambda}{p}$, p étant un nombre entier et les deux autres égales à l'unité. Au bout d'un certain temps, le mouvement du parallélépipède ABCD se sera communiqué par réflexion au parallélépipède A'B'C'D', et par réfraction au parallélépipède A''B''C''D''.

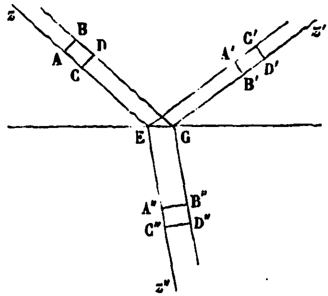
Soient

$$CE = z, \quad EA' = z', \quad EA'' = z'' = z'\frac{\lambda'}{\lambda},$$

$$AC = A'C' = \frac{\lambda}{p}, \quad A''C'' = \frac{\lambda'}{p}, \quad A''B'' = AB\frac{\cos r}{\cos i}.$$

Les vitesses vibratoires sur CD, C'D', C''D'' peuvent être représentées par

$$\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{z}{\lambda}\right), \quad v\sin 2\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\alpha - z'}{\lambda}\right), \quad u\sin 2\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\beta - z''}{\lambda'}\right).$$



La densité de l'éther étant égale à ρ dans les deux milieux, on aura pour la variation de la force vive

$$\rho\int_z^{\frac{\lambda}{p}+z} \sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{z}{\lambda}\right)dz - \rho v^2 \int_{z'-\frac{\lambda}{p}}^{z'} \sin^2 2\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\alpha - z'}{\lambda}\right)dz'$$
$$- \rho u^2 \int_{z''-\frac{\lambda'}{p}}^{z''} \sin^2 2\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\beta - z''}{\lambda'}\right)dz''\frac{\cos r}{\cos i}.$$

En calculant ces intégrales, on obtient pour cette perte de force vive

$$\frac{\rho}{2}\left[\frac{\lambda}{p}(1 - v^2) - \frac{\lambda'}{p}u^2\frac{\cos r}{\cos i}\right]$$
$$- \frac{\rho}{8\pi}\sin\frac{4\pi}{p}\left[\lambda\cos 4\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{z}{\lambda}\right)\right.$$
$$\left.- \lambda v^2\cos 4\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\alpha - z'}{\lambda}\right) - \lambda u^2\frac{\cos r}{\cos i}\cos 4\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\beta - z''}{\lambda'}\right)\right]$$
$$+ \frac{\rho}{4\pi}\sin^2\frac{2\pi}{p}\left[\lambda\sin 4\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{z}{\lambda}\right)\right.$$
$$\left.- \lambda v^2\sin 4\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\alpha - z'}{\lambda}\right) - \lambda' u^2\frac{\cos r}{\cos i}\sin 4\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\beta - z''}{\lambda'}\right)\right].$$

Faisant p très grand et négligeant les termes multipliés par $\sin^2 \frac{2\pi}{p}$, qui sont du second ordre par rapport à $\frac{1}{p}$, remarquant de plus que l'on peut faire $\frac{1}{4\pi} \sin \frac{4\pi}{p} = \frac{1}{p}$, on a pour l'expression précédente

$$\frac{\rho}{p}\left[\lambda \sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{z}{\lambda}\right) - \lambda v^2 \sin^2 2\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\alpha - z'}{\lambda}\right) - \lambda' u^2 \frac{\cos r}{\cos i} \sin^2 2\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\beta - z''}{\lambda'}\right)\right]$$

ou

$$\frac{\rho\lambda}{p}\left[\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{z}{\lambda}\right) - v^2 \sin^2 2\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\alpha - z'}{\lambda}\right) - u^2 \frac{\sin r \cos r}{\sin i \cos i} \sin^2 2\pi\left(\frac{t'}{\tau} + \frac{\beta - z''}{\lambda'}\right)\right].$$

Or on a

$$\frac{t' - t}{\tau} = \frac{z' + z}{\lambda}$$

ou

$$\frac{t}{\tau} + \frac{z}{\lambda} = \frac{t'}{\tau} - \frac{z'}{\lambda};$$

donc, en prenant pour le temps une origine convenable, on a pour l'expression précédente

$$\frac{\rho\lambda}{p}\left[\sin^2 \frac{2\pi t}{\tau} - v^2 \sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\alpha}{\lambda}\right) - u^2 \frac{\sin r \cos r}{\sin i \cos i} \sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\beta}{\lambda'}\right)\right].$$

Multiplions entre elles les équations (1) et (3), puis multiplions l'équation qui en résulte par $\frac{\rho\lambda}{p \sin i \cos i}$, nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{\rho\lambda}{p}&\left[\sin^2 \frac{2\pi t}{\tau} - v^2 \sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\alpha}{\lambda}\right) - u^2 \frac{\sin r \cos r}{\sin i \cos i} \sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\beta}{\lambda'}\right)\right] \\ &= \frac{\rho\lambda}{p} \frac{1}{\sin i \cos i} u \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\beta}{\lambda'}\right)\left(B \sin \frac{2\pi t}{\tau} + C \cos \frac{2\pi t}{\tau}\right);\end{aligned}$$

le second membre représente donc la force vive perdue; on peut l'écrire ainsi

$$\frac{\rho\lambda}{p\sin 2i}\left[Bu\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'}+Cu\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\right.$$
$$-\left(Bu\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'}-Cu\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\right)\cos\frac{4\pi t}{\tau}$$
$$\left.+\left(Bu\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}+Cu\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\right)\sin\frac{4\pi t}{\tau}\right],$$

et, en remplaçant $u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'}$, $u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}$ par les valeurs trouvées ci-dessus, on obtient

$$\frac{2\rho\lambda}{p\sin 2i(\sin 2i+\sin 2r)}\left[B\sin 2i-B^2-C^2\right.$$
$$-(B\sin 2i-B^2+C^2)\cos\frac{4\pi t}{\tau}$$
$$\left.+(C\sin 2i-2BC)\sin\frac{4\pi t}{\tau}\right].$$

Pour obtenir la perte de force vive éprouvée par absorption ou diffusion par un parallélépipède incident de longueur λ, il faut faire la somme de toutes les pertes éprouvées par les parallélépipèdes élémentaires qu'il renferme, et l'on a

$$(a)\qquad \frac{2\rho\lambda}{\sin 2i(\sin 2i+\sin 2r)}(B\sin 2i-B^2-C^2),$$

quantité qui doit être essentiellement positive.

4. Quant à l'expression de la force vive perdue par le parallélépipède dont la longueur est $\frac{\lambda}{p}$, il est facile de voir qu'elle peut être négative. On peut expliquer ce résultat en admettant qu'une partie de la force vive détournée d'un élément parallélépipédique puisse retourner à un élément suivant, de telle sorte que certains éléments peuvent gagner de la force vive au lieu d'en perdre. Mais il est évident que l'on doit trouver une quantité positive pour le changement de force vive éprouvée par tout le parallélépipède de longueur λ, changement qui s'effectue pendant la durée entière d'une vibration, temps plus petit que $\frac{1}{497}$ de trillionième de seconde.

Ainsi l'on a pour toute valeur de i

$$B \sin 2i - B^2 - C^2 > 0,$$

et par conséquent B est toujours positif. Pour $i = 0$ on aura

$$- B^2 - C^2 = 0 :$$

donc B, C sont nuls pour $i = 0$ et ils peuvent être considérés comme renfermant le facteur $\sin i$. Pour $i = \frac{\pi}{2}$, on a encore

$$- B^2 - C^2 = 0 :$$

donc B, C renferment le facteur $\cos i$, et l'on peut poser

$$B = k \sin 2i, \quad C = m \sin 2i,$$

k étant positif.

Remarquons que le numérateur de l'expression (a) renferme le facteur $\cos i$ au carré, et le dénominateur ne contient ce facteur qu'au premier degré; donc l'expression (a) est nulle pour $i = \frac{\pi}{2}$, ce qui s'explique aisément, car le rayon réfracté disparaît et le rayon réfléchi provient de tout le rayon incident.

5. Ainsi on obtient pour les formules qui donnent les changements de phase α, β,

$$\operatorname{tang} \frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{-2m \sin 2i}{\sin 2i - \sin 2r - 2k \sin 2i},$$

$$\operatorname{tang} \frac{2\pi\beta}{\lambda'} = \frac{-m}{1-k}.$$

Si l'on change i en $-i$, r se change en $-r$ d'après la formule

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

où n est l'indice de réfraction; il est d'ailleurs évident que les expressions de $\tang\frac{2\pi\alpha}{\lambda}$ et $\tang\frac{2\pi\beta}{\lambda}$ ne doivent pas changer; donc m et k sont des fonctions paires de i, s'ils ne sont pas constants.

m et k sont très petits, donc $\frac{\beta}{\lambda'}$ est aussi très petit. La valeur de $\tang\frac{2\pi\alpha}{\lambda}$ sera elle-même très petite, excepté pour des valeurs de i voisines de celle qui satisfait à l'équation

$$\sin 2i - \sin 2r - 2k \sin 2i = 0;$$

elle deviendra infinie pour cette valeur de i et changera de signe quand i dépassera cette valeur; enfin elle deviendra nulle pour $i = \frac{\pi}{2}$. Donc, quand on fait varier i depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, α varie depuis une fraction très petite de $\frac{\lambda}{2}$ jusqu'à $\frac{\lambda}{2}$, et α subira la plus grande partie de cet accroissement pour les valeurs de i voisines de l'angle de polarisation. Les deux changements de phase α, β sont de même sens et, suivant que la quantité m sera positive ou négative, les deux changements de phase se feront dans un sens ou dans l'autre.

D'après les résultats de l'expérience, m tend en général vers zéro, quand l'indice de réfraction n tend vers $1,4$; il est ordinairement positif quand n est plus grand que $1,4$ et négatif quand n est plus petit. Toutefois m et k ne doivent pas dépendre seulement de l'indice de réfraction, ils doivent dépendre encore d'autre manière de la nature du milieu. En effet, si l'on suppose deux milieux identiques séparés par un plan, considéré comme le plan réflecteur, on devra, pour y appliquer les formules précédentes, faire

$$n = 1, \quad m = 0, \quad k = 0,$$

et non pas supposer m négatif.

Rayon polarisé dans le plan d'incidence.

6. Le phénomène des changements de phase a beaucoup moins d'intérêt lorsque le rayon incident est polarisé dans le plan d'incidence, parce que ces changements restent toujours très petits, aussi bien dans le rayon réfléchi que dans le rayon réfracté.

Les vitesses des vibrations incidente, réfléchie et réfractée dans le voisinage du plan réflecteur peuvent être représentées par

$$\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{z}{\lambda}\right),\quad v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha-z'}{\lambda}\right),\quad u\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta-z''}{\lambda'}\right),$$

z, z', z'' étant nuls sur le plan réflecteur. En projetant pour $z=0$ les vitesses sur le plan réflecteur et sur la normale à ce plan et admettant que la troisième composante est égale à la somme des deux premières, on a les deux équations

$$(1)\qquad \left[\sin\frac{2\pi t}{\tau}-v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]\cos i = u\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right)\cos r,$$

$$(2)\qquad \left[\sin\frac{2\pi t}{\tau}+v\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]\sin i = u\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right)\sin r.$$

En multipliant entre elles ces équations, on a

$$(3)\qquad \left[\sin^2\frac{2\pi t}{\tau}-v^2\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]\sin i\cos i = u^2\sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right)\sin r\cos r,$$

l'équation de la conservation de la force vive.

Or il est aisé de reconnaître qu'on ne peut admettre les équations (1) et (2); car on en déduirait les quatre suivantes

$$\cos i\left(1-v\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right)=u\cos r\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'},$$

$$-v\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\cos i=u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\cos r,$$

$$\sin i\left(1+v\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right)=u\sin r\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'},$$

$$v\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\sin i=u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\sin r,$$

et si α, β sont différents de zéro, en divisant la quatrième par la deuxième, on a l'équation impossible

$$-\tang\imath = \tang r$$

Au reste, le principe de la conservation de la force vive n'étant plus entièrement exact, quand le rayon est perpendiculaire au plan d'incidence, on ne peut admettre qu'il ait lieu rigoureusement quand le rayon est situé dans ce plan. L'équation (3) n'a donc plus lieu; donc, si l'on admet l'équation (1), qui exprime l'égalité des composantes des vitesses des molécules d'éther, prises parallèlement au plan réflecteur, et infiniment près de part et d'autre de ce plan, on doit remplacer l'équation (2) par la suivante

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\sin\frac{2\pi t}{\tau} + \varphi\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]\sin i = u\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{\beta}{\lambda'}\right)\sin r\\ &\qquad\qquad + B\sin\frac{2\pi t}{\tau} + C\cos\frac{2\pi t}{\tau},\end{aligned}\right.$$

où B, C sont de très petites quantités

7. Des équations (1) et (4) on tire les quatre suivantes

$$\cos i\left(1-\varphi\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right) = u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\cos r,$$

$$-\varphi\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\cos i = u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\cos r,$$

$$\sin i\left(1+\varphi\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right) = u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\sin r + B,$$

$$\varphi\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\sin i = u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'}\sin r + C,$$

desquelles on déduit

$$\varphi\cos\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{-\sin(i-r)+B\cos r}{\sin(i+r)},$$

$$u\cos\frac{2\pi\beta}{\lambda'} = \frac{(2\sin i - B)\cos i}{\sin(i+r)},$$

$$\varphi\sin\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{C\cos r}{\sin(i+r)},$$

$$u\sin\frac{2\pi\beta}{\lambda'} = -\frac{C\cos i}{\sin(i+r)}.$$

Enfin, on conclut de ces équations, en accentuant les lettres v, u, α, β, B, C pour distinguer le rayon situé dans le plan d'incidence du rayon perpendiculaire,

$$v'^2 = \frac{[\sin(i-r) - B'\cos r]^2 + C'^2\cos^2 r}{\sin^2(i+r)},$$

$$u'^2 = \frac{(2\sin i - B')^2\cos^2 i + C'^2\cos^2 i}{\sin^2(i+r)},$$

$$\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda} = \frac{-C'\cos r}{\sin(i-r) - B'\cos r},$$

$$\operatorname{tang}\frac{2\pi\beta'}{\lambda'} = \frac{-C'}{2\sin i - B'}.$$

8. En raisonnant comme au n° 3, on trouvera qu'un parallélépipède incident de longueur λ perdra dans le phénomène de la réflexion et de la réfraction une force vive égale à

$$\frac{\rho\lambda\cos r}{\sin(i+r)}\left(B' - \frac{B'^2 + C'^2}{2\sin i}\right).$$

Cette quantité étant toujours positive, nous aurons

$$2B'\sin i - B'^2 - C'^2 > 0;$$

donc B' est positif. Pour $i = 0$, nous aurons

$$B'^2 + C'^2 = 0;$$

par suite B', C' s'annulent pour $i = 0$ et peuvent être considérés comme renfermant le facteur $\sin i$. Lorsque i est égal à $\frac{\pi}{2}$, le rayon réfracté disparaît et le rayon réfléchi est simplement le prolongement du rayon incident; il est donc évident que α' est nul pour $i = \frac{\pi}{2}$, et C' renferme le facteur $\cos i$. Je puis, d'après cela, poser

$$C' = 2m'\sin i\cos i = m'\sin 2i.$$

D'autre part, la force vive perdue étant nulle dans ce cas extrême, on a

$$B' - \frac{B'^2 + C'^2}{2} = 0,$$

et, comme C' est alors nul, il reste

$$B'\left(1 - \frac{B'}{2}\right) = 0;$$

mais B' ne peut être que très petit : donc il est nul pour $i = \frac{\pi}{2}$, et il renferme le facteur $\cos i$. Ainsi on peut poser

$$B' = k' \sin 2i;$$

k', m' sont des fonctions paires de i, d'après ce qui a été dit (n° 5).

Quand un rayon de lumière est normal au plan réflecteur, tout plan passant par ce rayon peut être pris pour le plan d'incidence; il en résulte que pour $i = 0$ les formules qui donnent v', u', α', β' doivent être identiques à celles qui donnent v, u, α, β pour le rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence.

Faisons tendre i vers zéro, nous aurons

$$v^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{n} - 2k\right)^2 + 4m^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}, \quad u^2 = 4\,\frac{(1+k)^2 - m^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2},$$

et ensuite

$$v'^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{n} - 2k'\right)^2 + 4m'^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}, \quad u'^2 = 4\,\frac{(1+k')^2 - m'^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2};$$

en comparant ces formules, on obtient

$$k' = k, \quad m' = m \quad \text{pour} \quad i = 0.$$

Sur la différence entre les changements de phase qui s'opèrent dans les deux rayons principaux par la réflexion.

9. En désignant par α, α' les changements de phase opérés par la réflexion dans les rayons polarisés perpendiculairement et parallèlement au plan d'incidence, on a trouvé

$$\tang\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{-2m\sin 2i}{\sin 2i - \sin 2r - 2k\sin 2i},$$
$$\tang\frac{2\pi\alpha'}{\lambda} = \frac{-m'\sin 2i\cos r}{\sin(i-r) - k'\sin 2i\cos r},$$

m, m', k, k' étant des fonctions paires de i, qui satisfont aux conditions

$$m' = m, \quad k' = k, \quad \text{pour} \quad i = 0.$$

Les physiciens ont cherché à déterminer la quantité $\alpha' - \alpha$.

Pour déterminer sa valeur, il suffit de porter les deux expressions précédentes dans la formule

$$(a) \qquad \tang\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha' - \alpha) = \frac{\tang\frac{2\pi\alpha'}{\lambda} - \tang\frac{2\pi\alpha}{\lambda}}{1 + \tang\frac{2\pi\alpha'}{\lambda}\tang\frac{2\pi\alpha}{\lambda}}.$$

Pour $i = 0$, on a $\tang\frac{2\pi\alpha'}{\lambda} = \tang\frac{2\pi\alpha}{\lambda}$ et $\alpha' - \alpha = 0$. Faisons croître i, les quantités m, m' étant très petites, $\tang\frac{2\pi\alpha'}{\lambda}$ est toujours très petit et $\tang\frac{2\pi\alpha}{\lambda}$ le sera aussi tant que i différera sensiblement de l'angle de polarisation I; $\alpha' - \alpha$ restera très petit jusqu'à ce que i devienne voisin de I, puis il atteindra la valeur $\pm\frac{\lambda}{4}$ pour une valeur de i très-voisine de I, le signe $\pm$ ayant lieu suivant que m sera positif ou négatif. L'angle i continuant à croître, $\alpha' - \alpha$ s'approchera rapidement de $\pm\frac{\lambda}{2}$ et atteindra cette valeur pour $i = \frac{\pi}{2}$.

Pour simplifier, posons

$$\frac{2\pi(\alpha'-\alpha)}{\lambda}=\mathrm{J},\quad \sin 2i-\sin 2r=j;$$

α' étant très petit, on pourra mettre l'équation (a) sous cette forme

$$\operatorname{tang}\mathrm{J}=-\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha}{\lambda}+\frac{\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda}}{\cos^2\frac{2\pi\alpha}{\lambda}}.$$

Si l'angle i est pris très voisin de I, on pourra remplacer $\cos^2\frac{2\pi\alpha}{\lambda}$ par $\cos^2\mathrm{J}$; cette équation pourra donc s'écrire

$$\frac{2m\sin 2i}{j-2k\sin 2i}+\frac{1}{\cos^2\mathrm{J}}\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda}=\operatorname{tang}\mathrm{J},$$

et, en négligeant le produit $k\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda}$, on aura l'équation

$$(b)\qquad k+m\cot\mathrm{J}+\frac{j}{\sin 2i\sin 2\mathrm{J}}\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda}=\frac{j}{2\sin 2i}.$$

Dans cette équation nous regarderons k, m, $\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda}$ comme des inconnues, et les autres quantités comme des données de l'expérience.

Dans la théorie que j'ai exposée, k, m ne sont pas des constantes; mais, si l'on suppose trois expériences faites pour trois incidences très peu différentes, les quantités k, m, $\operatorname{tang}\frac{2\pi\alpha'}{\lambda}$ seront à peu près les mêmes pour les trois expériences et les trois équations (b) détermineront sensiblement leurs valeurs.

En prenant i suffisamment près de I, j deviendra très petit et le troisième terme de (b) négligeable ; on aura donc l'équation

$$(c)\qquad k + m\cot J = \frac{j}{2\sin 2i},$$

et il suffira de deux expériences pour calculer m et k.

Si l'on prend pour unité l'intensité d'un rayon incident polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, l'intensité du rayon réfléchi qui en résulte sera

$$v^2 = \frac{[(1-2k)\sin 2i - \sin 2r]^2 + 4m^2\sin^2 2i}{(\sin 2i + \sin 2r)^2};$$

la valeur de i qui satisfait à l'équation

$$(1-2k)\sin 2i - \sin 2r = 0$$

est

$$i = \mathrm{I} - \frac{2kn^3}{n^4 - 1},$$

I étant l'angle qui satisfait à $\operatorname{tang}\mathrm{I} = n$, et la valeur de v^2 correspondante sera

$$v^2 = \frac{4m^2\sin^2 2i}{(\sin 2i + \sin 2r)^2}.$$

Applications numériques de cette théorie.

10. M. Jamin ayant soumis à l'expérience un verre dont l'indice de réfraction était

$$n = 1{,}487, \quad \text{ce qui donne} \quad \mathrm{I} = 56^\circ 5',$$

il a trouvé (*Annales de Chimie et de Physique*, 1850, t. XXIX, p. 299) : pour $i = 55^\circ 45'$,

$$J = 40^\circ 8';$$

pour $i = 56°$,

$$J = 75°36';$$

pour $i = 56°15'$,

$$J = 123°29'.$$

De ces trois résultats on déduit, au moyen de l'équation (c), les trois suivantes :

$$\begin{aligned}
k + 1,1261\,m &= 0,00338,\\
k + 0,2567\,m &= 0,000808,\\
k - 0,6614\,m &= -0,001786.
\end{aligned}$$

En résolvant les deux premières équations, on trouve

$$m = 0,002956, \quad k = 0,00005.$$

En résolvant la deuxième et la troisième, on a

$$m = 0,002825, \quad k = 0,000082.$$

Ces résultats sont très concordants; car, k étant très petit par rapport à m, l'erreur relative commise sur k peut être beaucoup plus grande.

Nous avons vu que, si m n'est pas constant, il est une fonction paire de i; si l'on pose $m = l \sin^2 i$, l étant constant, les phases α, α' sont alors nulles pour $i = 0$ et les trois équations ci-dessus deviennent

$$\begin{aligned}
k + 0,8104\,l &= 0,00338\\
k + 0,1765\,l &= 0,000808,\\
k - 0,4573\,l &= -0,001786.
\end{aligned}$$

Des deux premières on tire

$$l = 0,004054, \quad k = 0,00009;$$

et de la deuxième et la troisième

$$l = 0,004093, \quad k = 0,000086,$$

et ces résultats sont encore plus concordants.

M. Jamin ayant expérimenté de l'eau distillée dont l'indice de réfraction est

$$n = 1,333, \quad \text{ce qui donne} \quad \mathrm{I} = 53^\circ 7',$$

il a trouvé (*Annales de Chimie et de Physique*, 1851, t. XXXI, p. 174) :
pour $i = 53^\circ 30'$,

$$\mathrm{J} = -153^\circ 43';$$

pour $i = 53^\circ 15'$,

$$\mathrm{J} = -126^\circ, 32';$$

pour $i = 52^\circ 55'$,

$$\mathrm{J} = -45^\circ.$$

Des deux premières expériences on conclut

$$m = -0,001521, \quad k = 0,000083$$

et des deux dernières

$$m = -0,001516, \quad k = 0,000080,$$

ce qui est très concordant.

J'ai enfin obtenu pour le diamant

$$\mathrm{I} = 67^\circ 40', \quad m = 0,0155, \quad k = 0,000260.$$

D'après la théorie, k doit être positif, ce qui s'accorde effectivement avec les calculs précédents; on voit ensuite que dans le verre, le diamant et l'eau, k est une quantité très petite en comparaison de m; on en doit conclure que la quantité de lumière perdue sur le plan réflecteur est très petite.

Je m'arrète aux applications qui précèdent et dans lesquelles je n'ai déterminé les deux quantités k et m que dans le voisinage de l'angle de polarisation. En effet, les déterminations numériques de ces quantités doivent être plutôt faites par les physiciens, qui peuvent seuls apprécier le degré de précision de leurs expériences et les multiplier à leur gré.