JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉDOUARD COMBESCURE

Sur quelques questions concernant les forces centrales

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 239-276.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7__239_0>

Sur quelques questions concernant les forces centrales;

PAR M. ÉDOUARD COMBESCURE.

On sait que Binet, dans une Note insérée au Tome II (1re série) de ce Journal, a considéré, au lieu des trois équations ordinaires relatives au mouvement produit par une force centrale, un système de n équations présentant la forme caractéristique des équations mentionnées. Bien que, en ce qui concerne l'intégration, la présence de n coordonnées n'introduise aucune difficulté nouvelle et qu'on puisse se ramener, si l'on veut, au cas de deux coordonnées rectangulaires seulement, il est difficile de méconnaître le caractère d'élégance et de symétrie qui règne dans l'analyse de l'éminent géomètre [1]. Cette circonstance m'avait engagé, dans le temps, à considérer un nombre quelconque de systèmes présentant isolément la composition des équations de Binet. Mais une modification plus essentielle consistait dans l'introduction d'une forme quadratique générale à la place du *rayon vecteur*. Je m'étais occupé, entre autres choses, de cette double généralisation, dans l'une de mes Thèses pour le doctorat, présentées en 1858 à la Faculté des Sciences de Paris. Cette Thèse n'ayant paru dans aucun Recueil périodique, il ne sera peut-être pas inutile d'en reproduire, avec quelques légères modifications, le premier paragraphe. Les paragraphes que

---

[1] J'hésite d'autant moins à conserver les n coordonnées, que les formules dont je fais usage ne sont généralement pas plus longues à écrire quand on laisse ce nombre n indéterminé.

j'ajoute ici se rapportent à des transformations dont quelques-unes m'étaient depuis longtemps connues et se présentaient assez naturellement. J'y joins ensuite les formules répondant au cas d'une résistance du milieu, formules dont je ne m'étais nullement occupé. Enfin j'applique la théorie à quelques exemples particuliers.

§ I. — *Sur un problème de M. Binet.*

Dans le Tome II du *Journal de Liouville*, M. Binet a donné une élégante extension analytique du problème relatif au mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale. La méthode de l'éminent géomètre peut être étendue, sous un certain point de vue, à un système d'équations de la forme du suivant :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \mathrm{R}x, & \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = \mathrm{R}_1 x_1, & \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = \mathrm{R}_2 x_2, & \ldots, \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} = \mathrm{R}y, & \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = \mathrm{R}_1 y_1, & \dfrac{d^2 y_2}{dt^2} = \mathrm{R}_2 y_2, & \ldots, \\ \dfrac{d^2 z}{dt^2} = \mathrm{R}z, & \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = \mathrm{R}_1 z_1, & \dfrac{d^2 z_2}{dt^2} = \mathrm{R}_2 z_2, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \end{cases}$$

où le nombre des variables de $x_i, y_i, z_i, \ldots$ peut changer arbitrairement d'un groupe vertical à l'autre. Mais, au lieu de considérer le carré du *rayon vecteur* comme la somme des carrés des coordonnées correspondantes $x_i, y_i, z_i, \ldots$, je prendrai

$$\rho = \sqrt{\mathfrak{F}}, \quad \rho = \sqrt{\mathfrak{F}_1}, \quad \rho_2 = \sqrt{\mathfrak{F}_2}, \quad \ldots,$$

$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, ... désignant des fonctions homogènes du second degré, de façon que

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{F} = ax^2 + by^2 + cz^2 + \ldots + 2\mathrm{a}yz + 2\mathrm{b}xz + \ldots, \\ \mathfrak{F}_1 = a_1 x_1^2 + b_1 y_1^2 + c_1 z_1^2 + \ldots + 2\mathrm{a}_1 y_1 z_1 + 2\mathrm{b}_1 x_1 z_1 + \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Cela étant, si l'on pose (les accents indiquant les dérivées par rapport à t)

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{l} \mathrm{f} = ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + \ldots + 2\mathrm{a}y'z' + 2\mathrm{b}x'z' + \ldots, \\ \mathrm{F} = axx' + byy' + czz' + \ldots + \mathrm{a}(yz' + zy') + \mathrm{b}(xz' + zx') + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

en différentiant deux fois de suite l'équation

$$\rho = \sqrt{\mathfrak{F}},$$

on aura

$$(4)\qquad \frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{axx'' + byy'' + \ldots + \mathrm{a}(yz'' + zy'') + \ldots}{\rho} + \frac{\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2}{\rho^3}.$$

Or, quelles que soient les quantités $x, y, \ldots, x', y', \ldots$, l'expression $\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2$ revient identiquement à une fonction homogène du second ordre des seuls binômes $(xy' - yx')$, $(zx' - xz')$, ..., lesquels, par une combinaison visible des équations (1), se réduisent séparément ici à des constantes. Donc, en chassant x'', y'', ... au moyen de ces mêmes équations (1), on aura la première du groupe suivant, les autres ayant une origine analogue,

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2\rho}{dt^2} = \mathrm{R}\rho + \dfrac{k^2}{\rho^3}, \\ \dfrac{d^2\rho_1}{dt^2} = \mathrm{R}_1\rho_1 + \dfrac{k_1^2}{\rho_1^3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

k, k_1, ... étant des constantes arbitraires.

Les deux premières équations (1) et (5) donnent

$$\rho\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{k^2x}{\rho^3},$$

d'où, en posant, d'après M. Binet,

$$dt = \frac{1}{k}\rho^2\,d\varphi,$$

et prenant $d\varphi$ constant, résulte

$$\frac{d^2\frac{x}{\rho}}{d\varphi^2}+\frac{x}{\rho}=0.$$

On a donc

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{\rho}=A\sin\varphi+A'\cos\varphi, & \dfrac{x_1}{\rho_1}=A_1\sin\varphi_1+A'_1\cos\varphi_1, & \ldots,\\ \dfrac{y}{\rho}=B\sin\varphi+B'\cos\varphi, & \dfrac{y_1}{\rho_1}=B_1\sin\varphi_1+B'_1\cos\varphi_1, & \ldots,\\ \dfrac{z}{\rho}=C\sin\varphi+C'\cos\varphi, & \dfrac{z_1}{\rho_1}=C_1\sin\varphi_1+C'_1\cos\varphi_1, & \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \end{cases}$$

et

$$(7)\qquad dt=\frac{\rho^2\,d\varphi}{k}=\frac{\rho_1^2\,d\varphi_1}{k_1}=\ldots.$$

Quant aux constantes A, A', ..., B, B', ..., elles doivent, dans chaque groupe vertical, vérifier trois relations telles que les suivantes, qui résultent de la reconstitution de ρ^2 ou $\mathfrak{F}$ au moyen des expressions (6),

$$(8)\quad \mathfrak{F}(A, B, \ldots)=1,\quad \mathfrak{F}(A', B', \ldots)=1,\quad F(A, A', B, B', \ldots)=0,$$

les premiers membres désignant ce que deviennent $\mathfrak{F}$, f, F quand x, y, z, ... sont remplacés par A, B, C, ..., et en même temps x', y', z', ... par A', B', C', ...

L'intégration du système complet (1) est ainsi ramenée à celle des équations (5) et (7).

§ II. — *Transformations particulières.*

Si dans la première équation (5) on remplace ρ^2 par $\mathfrak{F}$, cette équation devient

$$(9)\qquad \mathfrak{F}\frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2}-\frac{1}{2}\frac{d\mathfrak{F}^2}{dt^2}-2R\mathfrak{F}^2-2k^2=0,$$

d'où, par la différentiation,

$$(10)\qquad \frac{d^3\mathfrak{F}}{dt^3} - 4R\frac{d\mathfrak{F}}{dt} - 2\frac{dR}{dt}\mathfrak{F} = 0.$$

On arrive encore à cette dernière équation, en observant que les équations de définition (2) et (3) donnent tout de suite, en ayant égard à (1),

$$(f)\qquad \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = 2F,\quad \frac{d\mathfrak{f}}{dt} = 2RF,\quad \frac{dF}{dt} = \mathfrak{f} + R\mathfrak{F}.$$

En éliminant F et f, on retombe sur (10), dont (9) est une intégrale première.

On peut remarquer que l'élimination de R entre les deux dernières (f) fournit

$$2\mathfrak{f}F + \mathfrak{F}\frac{d\mathfrak{f}}{dt} - 2F\frac{dF}{dt} = 0,$$

ou, en vertu de la première,

$$\mathfrak{f}\frac{d\mathfrak{F}}{dt} + \mathfrak{F}\frac{d\mathfrak{f}}{dt} - 2F\frac{dF}{dt} = 0,$$

ce qui redonne, par l'intégration,

$$\mathfrak{F}\mathfrak{f} - F^2 = k^2.$$

A cause de

$$dt = \frac{\rho^2\,d\varphi}{k},$$

l'équation (5), en prenant $d\varphi$ constant, revient à

$$(11)\qquad -R = \frac{k^2}{\rho^3}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\varphi^2}\right).$$

Soit actuellement

$$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots$$

une fonction linéaire homogène dont les coefficients sont des constantes quelconques; on aura

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = R\xi,$$

et la combinaison de cette dernière équation avec (5) donnera, comme pour x,

$$\xi = m\rho \sin(\varphi + \varepsilon),$$

m et ε étant deux constantes arbitraires, vérifiant à cause des formules (6) les deux conditions

$$\Sigma A\alpha = m\cos\varepsilon, \quad \Sigma A'\alpha = m\sin\varepsilon.$$

En vertu de l'équation précédente, ces mêmes formules (6) pourront s'écrire

$$(6')\quad \left\{\begin{array}{l} x = \mathcal{A}\dfrac{\xi}{m} + \mathcal{A}'\sqrt{\mathcal{F} - \dfrac{\xi^2}{m^2}}, \\ y = \mathcal{B}\dfrac{\xi}{m} + \mathcal{B}'\sqrt{\mathcal{F} - \dfrac{\xi^2}{m^2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

en posant

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A} = A\cos\varepsilon + A'\sin\varepsilon, & \mathcal{A}' = -A\sin\varepsilon + A'\cos\varepsilon, \\ \mathcal{B} = B\cos\varepsilon + B'\sin\varepsilon, & \mathcal{B}' = -B\sin\varepsilon + B'\cos\varepsilon, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

les nouvelles constantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, ... devant satisfaire aux conditions

$$\Sigma\mathcal{A}\alpha = m, \quad \Sigma\mathcal{A}'\alpha = 0,$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots) = 1, \quad \mathcal{F}(\mathcal{A}'\, \mathcal{B}', \ldots) = 1, \quad F(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}, \mathcal{B}', \ldots) = 0.$$

On s'assure d'ailleurs que l'équation (11) se transforme dans la suivante :

$$(12)\qquad R = \frac{k^2}{2\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{m^2\rho^2 - \xi^2}{\rho^2\left(\xi\dfrac{d\rho}{d\xi} - \rho\right)^2}\right] = \frac{2k^2}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{m^2\mathcal{F} - \xi^2}{\left(\xi\dfrac{d\mathcal{F}}{d\xi} - 2\mathcal{F}\right)^2}\right],$$

ou

$$(12_1)\quad R = \frac{m^2k^2}{2\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\left(\xi\dfrac{d\rho_1}{d\xi} - \rho_1\right)^2}\right] = \frac{2m^2k^2}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\mathcal{F}_1}{\left(\xi\dfrac{d\mathcal{F}_1}{d\xi} - 2\mathcal{F}_1\right)^2}\right],$$

en posant

$$\mathcal{F} - \frac{\xi^2}{m^2} = \mathcal{F}_1 = \rho_1^2.$$

Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, à cause de

$$m\sin(\varphi + \varepsilon) = \frac{\xi}{\rho}, \quad \text{d'où} \quad m\rho^2\cos(\varphi + \varepsilon)\frac{d\varphi}{d\xi} = \rho - \xi\frac{d\rho}{d\xi},$$

le second membre de l'équation (12) revient successivement à

$$\frac{k^2}{2\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\rho^4}\frac{d\xi^2}{d\varphi^2}\right) = \frac{k^2}{\rho^2}\frac{d\xi}{d\varphi}\frac{d}{\xi\, d\xi}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{d\xi}{d\varphi}\right) = \frac{k^2}{\xi\rho^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{d\xi}{d\varphi}\right);$$

en substituant au dernier membre, au lieu de $\frac{1}{\rho^2}\frac{d\xi}{d\varphi}$, l'expression équivalente

$$\frac{m}{\rho}\cos(\varphi + \varepsilon) - m\sin(\varphi + \varepsilon)\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\varphi},$$

on retombe sur l'équation (11).

On remarquera qu'en posant

$$m\rho = \xi\sqrt{1 + \upsilon^2},$$

d'où résulte

$$\upsilon = \cot(\varphi + \varepsilon),$$

la formule (12) peut encore s'écrire

$$R = \frac{k^2 m^4}{2\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\frac{1}{\xi}}{d\upsilon}\right)^2 = \frac{k^2 m^4}{\xi}\frac{d\frac{1}{\xi}}{d\upsilon}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\frac{1}{\xi}}{d\upsilon}\right),$$

c'est-à-dire

$$(12_2) \qquad R = -\frac{k^2 m^4}{\xi^3}\frac{d^2\frac{1}{\xi}}{d\upsilon^2}.$$

Suivant qu'on emploiera les coordonnées ρ et φ ou ρ et ξ, ou enfin υ

et ξ, il faudra joindre à (11) ou à (12), ou enfin à (12_2), l'une des équations suivantes, dont le premier membre est toujours $k\,dt$, savoir :

$$(13)\qquad k\,dt = \rho^2\,d\varphi = \frac{\mathfrak{F}\,d\xi - \frac{1}{2}\xi\,d\mathfrak{F}}{\sqrt{m^2\mathfrak{F} - \xi^2}} = -\frac{\xi^2}{m^2}\,dv.$$

Il est presque superflu de faire observer, que dans les groupes (1), les quantités R, R_1, ... désignent des fonctions tout à fait quelconques connues ou inconnues, et que si l'on voulait faire rentrer le premier de ces groupes, par exemple, dans le type caractéristique pour les forces centrales, il suffirait d'écrire

$$R = \frac{\mathfrak{R}}{r},$$

où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \ldots},$$

$\mathfrak{R}$ étant censé représenter la force centrale proprement dite.

§ III. — *Relations entre les diverses constantes et les valeurs initiales des variables et de leurs dérivées premières.*

Lorsqu'on adopte les coordonnées ρ et φ, les coefficients qui figurent dans ρ sont censés généralement des constantes données. La constante arbitraire k, qui correspond à la constante *principale* des aires, est définie en fonction des valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots, x'_0, y'_0, \ldots$ répondant à $t = 0$ par la relation

$$k^2 = \mathfrak{F}(x_0, y_0, \ldots)\,\mathfrak{F}(x'_0, y'_0, \ldots) - F(x_0, x'_0, \ldots)^2.$$

Les relations (6) et leurs différentielles premières donnent ensuite

$$\begin{array}{ll} A = Mx_0 + M'x'_0, & B = My_0 + M'y'_0, \\ A' = Nx_0 + N'x'_0, & B' = Ny_0 + N'y'_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

en posant

$$M = \frac{\sin\varphi_0}{\rho_0} - \frac{\rho'_0}{k}\cos\varphi_0, \quad M' = \frac{\rho_0}{k}\cos\varphi_0,$$
$$N = \frac{\cos\varphi_0}{\rho_0} + \frac{\rho'_0}{k}\sin\varphi_0, \quad N' = -\frac{\rho_0}{k}\sin\varphi_0,$$

et il faut observer que

$$\rho_0\rho'_0 = F(x_0, x'_0, \ldots).$$

Il est facile de reconnaître que, avec ces expressions des constantes, les trois conditions

$$\mathfrak{F}(A, B, \ldots) = 1, \quad \mathfrak{F}(A', B', \ldots) = 1, \quad F(A, A', B, B', \ldots) = 0$$

sont identiquement satisfaites. On a, en effet,

$$\mathfrak{F}(A, B, \ldots) = M^2\mathfrak{F}(x_0, \ldots) + 2MM'F(x_0, x'_0, \ldots) + M'^2\mathfrak{F}(x'_0, \ldots),$$
$$\mathfrak{F}(A', B', \ldots) = N^2\mathfrak{F}(x_0, \ldots) + 2NN'F(x_0, x'_0, \ldots) + N'^2\mathfrak{F}(x'_0, \ldots),$$
$$F(A, A', \ldots) = MN\mathfrak{F}(x_0, \ldots) + (MN' + NM')F(x_0, x'_0, \ldots) + M'N'\mathfrak{F}(x'_0, \ldots),$$

et il suffit de substituer aux seconds membres les expressions précédentes de M, M', N, N' pour constater que ces seconds membres se réduisent respectivement à 1, 1, 0, en vertu de l'expression k^2 écrite un peu plus haut. Quant à la constante arbitraire φ_0, quand on aura intégré l'équation (12) jointe à (13), ou cette dernière équation jointe à (5), les trois constantes introduites par cette intégration se détermineront en fonctions de ρ_0, ρ'_0, φ_0, mais cette dernière quantité restera tout à fait arbitraire; on peut la considérer comme un paramètre de constitution propre au système des coordonnées ρ et φ, et lui donner telle valeur déterminée qu'on voudra.

Si l'on fait usage des coordonnées ρ et ξ, les valeurs des constantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, ... sont

$$\mathcal{A} = \frac{1}{k}\sqrt{\rho_0^2 - \frac{\xi_0^2}{m^2}}\,x'_0 - \frac{1}{k}\,\frac{\rho_0\rho'_0 - \dfrac{\xi_0\xi'_0}{m^2}}{\sqrt{\rho_0^2 - \dfrac{\xi_0^2}{m^2}}}\,x_0,$$

$$\mathcal{A}' = -\frac{1}{k}\,\frac{\xi_0}{m}\,x'_0 + \frac{1}{k}\,\frac{\xi'_0}{m}\,x_0,$$

. . . ., la constante k ayant la valeur déterminée ci-dessus. On reconnaît que ces expressions rendent identiques les deux relations

$$\Sigma A \alpha = m, \quad \Sigma A' \alpha = 0.$$

Elles rendent aussi identiques, d'après ce qui précède, les trois autres équations de condition. Cette même constante k peut aussi se déterminer au moyen de l'équation

$$k = \frac{\rho^2 \frac{\xi'}{m} - \rho\rho' \frac{\xi}{m}}{\sqrt{\rho^2 - \frac{\xi^2}{m^2}}},$$

où l'on mettra pour $x, y, \ldots, x', y', \ldots$ leurs valeurs initiales, en prenant encore

$$\rho_0 \rho'_0 = \mathrm{F}(x_0, x'_0, \ldots).$$

L'équation précédente, où ρ et ξ restent quelconques, servira avec (12) à déterminer ρ et $\frac{\xi}{m}$ en fonction du temps : les constantes introduites s'exprimeront au moyen de ρ_0, ρ'_0, $\frac{\xi_0}{m}$, $\frac{\xi'_0}{m}$, en sorte que m restera indéterminé et pourra recevoir la valeur particulière qu'on voudra.

Quand on ne veut pas faire figurer les valeurs initiales de $x, y, \ldots, x', y', \ldots$, il y a lieu d'examiner, suivant les cas, quelles sont les constantes, tant A, A', ... que celles qui entrent dans ξ, dans $\mathfrak{F}$ et dans les intégrales définitives, qui restent vraiment arbitraires et celles qui sont des constantes de *constitution*. L'exemple suivant mettra en évidence le sens précis de cette remarque, sans qu'il soit nécessaire d'y insister.

Il est presque superflu d'introduire ici la remarque générale, à savoir que la coordonnée ρ n'est autre chose que le paramètre de similitude de formes quadratiques homothétiques, et ξ le paramètre analogue pour les formes linéaires.

§ IV. — *Mouvement suivant une conique.*

Une conique à n coordonnées $x, y, z, \ldots$ peut être ici définie par l'équation

$$(i) \qquad \mathfrak{F} = 2\xi + h,$$

où h est une constante. En différentiant cette équation et ayant égard à

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mathrm{R}\xi,$$

on aura successivement

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = 2\frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2} = 2\mathrm{R}\xi, \quad \frac{d^3\mathfrak{F}}{dt^3} = 2\mathrm{R}\frac{d\xi}{dt} + 2\xi\frac{d\mathrm{R}}{dt},$$

et l'équation (10), § II, deviendra

$$3\mathrm{R}\frac{d\xi}{dt} + (\xi + h)\frac{d\mathrm{R}}{dt} = 0.$$

On en tire

$$(g) \qquad \mathrm{R} = \frac{\mathrm{G}}{(\xi + h)^3},$$

G étant une constante arbitraire. Cette expression, sauf la présence ici de n coordonnées, est précisément celle trouvée par M. Yvon Villarceau (*Connaissance des Temps* pour 1852), et l'on peut regarder l'équation

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathrm{G}r}{(\xi + h)^3}$$

comme définissant, au point de vue dynamique, la force centrale la plus générale propre à faire décrire librement une conique à un point matériel.

Les expressions (i), (g) de $\mathfrak{F}$ et de R, substituées dans (9), fournissent ensuite, entre ξ et t, la relation au moyen de laquelle s'achève la solution.

Si l'on veut faire usage de l'équation (12), en introduisant dans cette équation l'expression (i) de $\mathcal{I}$, on obtient

$$(g_1) \qquad R = -\frac{k^2(m^2+h)}{(\xi+h)^3}.$$

On déduit ensuite de la seconde (13)

$$k\,dt = \frac{(\xi+h)\,d\xi}{\pm\sqrt{m^2h+2m^2\xi-\xi^2}},$$

et, en posant

$$\xi = m^2 + m\sqrt{m^2+h}\cos w, \quad \frac{k}{m^2+h} = \mathrm{n}, \quad \frac{m}{\sqrt{m^2+h}} = \mathrm{e},$$

il en résulte, en ayant égard à (6') et désignant par τ une constante arbitraire,

$$(\mathrm{a}) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{n}t+\tau &= w+\mathrm{e}\sin w,\\ x &= \mathrm{a}(\mathrm{e}+\cos w)+\mathrm{a}'\sin w,\\ y &= \mathrm{b}(\mathrm{e}+\cos w)+\mathrm{b}'\sin w,\\ z &= \mathrm{c}(\mathrm{e}+\cos w)+\mathrm{c}'\sin w,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

les nouvelles quantités a, a', ... qui sont mises à la place de $\mathrm{A}\sqrt{m^2+h}$, $\mathrm{A}'\sqrt{m^2+h}$, ... devant satisfaire aux deux relations

$$\Sigma \mathrm{a}\alpha = m\sqrt{m^2+h}, \quad \Sigma \mathrm{a}'\alpha = 0.$$

En faisant

$$-k^2(m^2+h) = \mu,$$

et regardant α, β, ..., h, μ comme des quantités données, les expressions ci-dessus renferment le nombre $2n$ de constantes arbitraires exigé par l'intégration. On remarquera que l'équation (g_1) peut encore s'écrire

$$(g') \qquad R = -\frac{\mathrm{n}^2}{(1+\mathrm{e}\cos w)^3}, \quad \text{ou bien} \quad R = -\frac{1}{\mathrm{n}}\frac{dw^3}{dt^3}.$$

Je suppose inversement qu'on se donne l'expression

$$R = \frac{gk^2}{(\xi+h)^3},$$

où $gk^2 = \mu$. La formule (12_1), en faisant $\rho_1 = \sqrt{\rho^2 - \frac{\xi^2}{m^2}}$, fournit par première intégration

$$\xi \frac{d\rho_1}{d\xi} - \rho_1 = \frac{m(\xi + h)}{\sqrt{-c(\xi + h)^2 - 2g(\xi + h) + gh}};$$

d'où

$$\rho_1 = c'\xi + m\frac{\sqrt{-c(\xi + h)^2 - 2g(\xi + h) + gh}}{g + ch},$$

c et c' étant deux constantes arbitraires. Si l'on introduit cette valeur de ρ_1 dans les équations (6'), on obtient, en écrivant $\mathcal{A}$ au lieu de $\mathcal{A} + mc'\mathcal{A}'$,

$$x = \mathcal{A}\frac{\xi}{m} + \mathcal{A}'\frac{m}{g + ch}\sqrt{-c(\xi + h)^2 - 2g(\xi + h) + gh},$$

et l'on a les deux conditions

$$\Sigma\mathcal{A}\alpha = m, \quad \Sigma\mathcal{A}'\alpha = 0;$$

ce qui réduit à $2n - 1$, comme cela doit être, le nombre des arbitraires, c compris, qui figurent dans ces n équations. Par la substitution

$$\xi + h = -\frac{g}{c} + \sqrt{\frac{g}{c}\left(h + \frac{g}{c}\right)}\cos\varpi,$$

qui réduit le radical ci-dessus à $\sqrt{g\left(h + \frac{g}{c}\right)}\sin\varpi$, et en tenant compte de la seconde (13), on se ramène aux formes (a). Il faut observer qu'en adoptant directement les expressions précédentes de $x, y, \ldots$, qui définissent une conique, et se rappelant que

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}, \ldots) = 1, \quad \mathcal{F}(\mathcal{A}', \ldots) = 1, \quad F(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \ldots) = 0,$$

on aura

$$\mathcal{F}(x, y, \ldots) = \frac{\xi^2}{m^2} + \frac{m^2}{(g + ch)^2}[-c(\xi + h)^2 - 2g(\xi + h) + gh],$$

ce qui revient à dire que, dans l'expression ci-dessus de ρ_1, c' peut être supposé égal à zéro.

Cette expression de ρ_1 doit être modifiée lorsqu'on suppose $g + ch$ égal à zéro. L'équation différentielle qui précède l'expression dont il s'agit devient alors

$$\xi \frac{d\rho_1}{d\xi} - \rho_1 = \frac{m(\xi + h)}{\sqrt{-c}\,\xi}.$$

On en tire

$$\rho_1 = c'\xi - \frac{m}{\sqrt{-c}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{\xi}\right),$$

et l'on peut prendre, par suite,

$$x = \mathcal{A}\frac{\xi}{m} + \mathcal{A}'\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{\xi}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

avec les conditions

$$\Sigma\mathcal{A}\alpha = m, \quad \Sigma\mathcal{A}'\alpha = 0.$$

Sans se préoccuper de la coordonnée ρ_1, on reconnaît que ces expressions satisfont à

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Rx, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Ry, \quad \ldots,$$

pourvu que l'on détermine ξ en fonction de t, par l'équation du premier ordre

$$\frac{d\xi^2}{dt^2} = \frac{R}{h}\left(1 + \frac{h}{\xi}\right),$$

où, bien entendu,

$$R = \frac{\mu}{(\xi + h)^3};$$

mais on voit que les expressions intégrales qui précèdent ne renferment que $2n - 2$ constantes arbitraires, en sorte qu'on n'obtient qu'une solution particulière de la question.

La formule (12) devient illusoire lorsqu'on suppose

$$\xi \frac{d\rho}{d\xi} - \rho = -h,$$

h étant une constante quelconque, c'est-à-dire lorsque

$$\rho = c\xi + h,$$

ou, ce qui revient au même, en excluant le cas de ρ constant quand

$$\mathfrak{s} = \rho^2 = (\xi + h)^2.$$

L'équation (9) fournit alors, en ayant encore égard à $\frac{d^2\xi}{dt^2} = R\xi$,

$$(g_2) \qquad -R = \frac{\left(\frac{k^2}{h}\right)}{(\xi + h)^3} = \frac{\left(\frac{k^2}{h}\right)}{\rho^3}.$$

L'équation (11), qui est seulement en défaut dans le cas, qu'on peut exclure, où φ serait constant, donne, par suite,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{h} + c \sin\varphi + c' \cos\varphi,$$

c et c' étant des constantes arbitraires. On a, par conséquent, d'après les formules (6),

$$x = \frac{A \sin\varphi + A' \cos\varphi}{\frac{1}{h} + c \sin\varphi + c' \cos\varphi},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui définit une conique. Il entre dans ces expressions de $x, y, \ldots$ les $2n$ constantes arbitraires $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, ... et les trois $\frac{1}{h}$, c, c'; mais il n'y a visiblement que $2n + 2$ constantes indépendantes, et à cause de

$$\mathfrak{f}(A, \ldots) = 1, \quad \mathfrak{f}(A', \ldots) = 1, \quad F(A, A', \ldots) = 0,$$

ce nombre est réduit au nombre voulu $2n - 1$.

En posant

$$\frac{1}{h} + g \cos(\varphi + \varepsilon) = \frac{1}{h} + c \sin\varphi + c' \cos\varphi,$$

et faisant usage de la substitution connue

$$\cos(\varphi + \varepsilon) = \frac{\cos w - gh}{1 - gh \cos w},$$

on aura

$$\rho = \frac{h}{1 - g^2 h^2}(1 - gh \cos w),$$

et l'on fera rentrer les expressions précédentes dans la forme (a), y compris l'équation déduite de $\rho^2\, d\varphi = k\, dt$.

Comme l'équation écrite un peu plus haut, entre ρ et φ, peut se mettre sous la forme

$$h = \rho + \rho g h \cos(\varphi + \varepsilon),$$

et qu'on n'altère pas la forme des équations (6) pas plus que les trois conditions

$$\mathfrak{F}(A, \ldots) = 1, \quad \mathfrak{F}(A', \ldots) = 1, \quad F(A, A', \ldots) = 0,$$

en donnant à ε la valeur qu'on voudra, on peut poser

$$gh \cos(\varphi + \varepsilon) = -\xi,$$

et l'on est ramené à l'équation

$$\rho = \xi + h,$$

d'où l'on peut conclure qu'il n'y a pas d'autre forme que l'une ou l'autre des expressions (g_2) donnant à R la composition analytique requise en ce qui concerne l'intégration, résultat que M. Darboux a établi par d'autres considérations, en faisant connaître en même temps la seconde forme (g_2) de R (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, avril 1877).

Revenant à la théorie générale, il est à peine nécessaire de signaler trois cas où le problème d'intégration se résout immédiatement par des quadratures :

1° Celui où, dans la formule (11), on suppose

$$R = f(\rho);$$

2° Celui où, dans la même formule, on prend

$$R = \frac{f(\varphi)}{\rho^3} + \frac{f_1(\varphi)}{\rho^4};$$

3° Enfin celui où, dans la formule (12) ou (12_1), on suppose

$$R = f(\xi).$$

J'ajouterai, pour le cas le plus important de deux coordonnées rectangulaires x, y, les relations qui ont lieu entre les diverses constantes, quand on fait usage simultanément des coordonnées ρ et ξ, auxquelles on fait correspondre les formules (6'). On a, dans ce cas,

$$\mathfrak{F} = ax^2 + by^2 + 2cxy, \quad \xi = \alpha x + \beta y,$$

avec les cinq conditions

$$\begin{aligned}
a\mathcal{A}^2 + b\mathcal{B}^2 + 2c\mathcal{A}\mathcal{B} &= 1,\\
a\mathcal{A}'^2 + b\mathcal{B}'^2 + 2c\mathcal{A}'\mathcal{B}' &= 1,\\
a\mathcal{A}\mathcal{A}' + b\mathcal{B}\mathcal{B}' + c(\mathcal{A}\mathcal{B}' + \mathcal{B}\mathcal{A}') &= 0,\\
\mathcal{A}\alpha + \mathcal{B}\beta &= m,\\
\mathcal{A}'\alpha + \mathcal{B}'\beta &= 0.
\end{aligned}$$

Si l'on désigne par k' la constante des aires, telle que généralement

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = k',$$

on a ici

$$k'^2 = (ab - c^2)(yx' - xy')^2,$$

en sorte que, en donnant à k et k' le signe qu'on jugera à propos, on aura

$$k = k'\sqrt{ab - c^2},$$

$$k' = \mathcal{A}\mathcal{B}' - \mathcal{B}\mathcal{A}' = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}},$$

et l'on pourra particulièrement écrire, sous les deux formes suivantes, le groupe des cinq relations ci-dessus

$$\left\{\begin{aligned} & m^2 = k'^2(b\alpha^2 + a\beta^2 - 2c\alpha\beta), \\ & \mathcal{A} = \frac{k'^2}{m}(b\alpha - c\beta), \quad \mathcal{B} = \frac{k'^2}{m}(a\beta - c\alpha), \\ & \mathcal{A}' = -\frac{k'}{m}\beta, \quad \mathcal{B}' = \frac{k'}{m}\alpha, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} & a = \frac{\mathcal{B}^2 + \mathcal{B}'^2}{k'^2}, \quad b = \frac{\mathcal{A}^2 + \mathcal{A}'^2}{k'^2}, \quad c = -\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}' + \mathcal{A}'\mathcal{B}}{k'^2}, \\ & \alpha = \frac{m}{k'}\mathcal{B}', \quad \beta = -\frac{m}{k'}\mathcal{A}'. \end{aligned}\right.$$

§ V. — *Mouvement dans un milieu résistant.*

Je suppose qu'au lieu des équations (1) on considère les suivantes :

$$(1') \quad \left\{\begin{aligned} & \frac{d^2 x}{dt^2} = \mathrm{R}x + \mathrm{V}x', \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \mathrm{R}_1 x_1 + \mathrm{V}_1 x'_1, \quad \ldots, \\ & \frac{d^2 y}{dt^2} = \mathrm{R}y + \mathrm{V}y', \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \mathrm{R}_1 y_1 + \mathrm{V}_1 y'_1, \quad \ldots, \\ & \frac{d^2 z}{dt^2} = \mathrm{R}z + \mathrm{V}z', \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \mathrm{R}_1 z_1 + \mathrm{V}_1 z'_1, \quad \ldots, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots, \end{aligned}\right.$$

où jusqu'ici R, R_1, ..., V, V_1, ... sont des quantités tout à fait quelconques pouvant dépendre; quand elles sont données, de toutes les variables $x, y, \ldots, x_1, y_1, \ldots$ de leurs dérivées premières $x', y', \ldots, x'_1, y'_1, \ldots$ et de la variable indépendante t. En introduisant une fonction auxiliaire T, telle que

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{dt} = \mathrm{V},$$

l'élimination de R entre les deux premières (1′), par exemple, donnera

$$\frac{xy' - yx'}{\mathrm{T}} = \text{const.};$$

l'expression $\mathfrak{F}\mathfrak{f} - \mathrm{F}^2$, qui figure dans le dernier terme de l'équation (4),

§ I, deviendra donc ici égale à k^2T^2, en désignant par k^2 une constante arbitraire. Cette équation (4) deviendra, par conséquent, en ayant égard à (1'),

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = R\rho + V\frac{d\rho}{dt} + \frac{k^2T^2}{\rho^3}. \tag{4'}$$

Soit encore

$$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots,$$

en sorte que

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = R\xi + \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}\frac{d\xi}{dt}.$$

Si l'on fait

$$\frac{d\xi}{dt} = kT\sqrt{\varpi},$$

cette équation pourra s'écrire

$$\frac{kT}{2\sqrt{\varpi}}\frac{d\varpi}{dt} = R\xi,$$

et l'on aura, par suite,

$$R = \frac{k^2T^2}{2\xi}\frac{d\varpi}{d\xi}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\frac{d\rho}{dt} = kT\sqrt{\varpi}\frac{d\rho}{d\xi}, \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} = k^2T^2\varpi\frac{d^2\rho}{d\xi^2} + \frac{d\rho}{d\xi}\left(\frac{k^2}{2}T^2\frac{d\varpi}{d\xi} + k\sqrt{\varpi}\frac{dT}{dt}\right),$$

ce qui transforme l'équation (4') dans la suivante :

$$\varpi\frac{d^2\rho}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{d\xi} - \frac{\rho}{\xi}\right)\frac{d\varpi}{d\xi} - \frac{1}{\rho^3} = 0.$$

On tire de là, par l'intégration,

$$\varpi = \left(m^2 - \frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\left(\xi\frac{d\rho}{d\xi} - \rho\right)^{-2},$$

m étant une constante arbitraire, et, par conséquent,

$$R = \frac{k^2T^2}{2\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\left(m^2 - \frac{\xi^2}{\rho^2}\right)}{\left(\xi\frac{d\rho}{d\xi} - \rho\right)^2}\right]. \tag{12'}$$

Si l'on fait, ε étant une constante quelconque,

$$\sin(\varphi+\varepsilon)=\frac{\xi}{m\rho},$$

cette équation deviendra

$$(11') \qquad -\mathrm{R}=\frac{k^2\mathrm{T}^2}{\rho^3}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\varphi^2}\right),$$

et l'on aura en même temps

$$(13') \qquad k\mathrm{T}\,dt=\frac{\rho\,d\xi-\xi\,d\rho}{\sqrt{m^2-\frac{\xi^2}{\rho^2}}}=\rho^2\,d\varphi.$$

A cela il faut joindre

$$(14) \qquad \frac{1}{\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{dt}=\mathrm{V} \quad \text{ou} \quad k\sqrt{\varpi}\frac{d\mathrm{T}}{d\xi}=\mathrm{V} \quad \text{ou encore} \quad k\frac{d\mathrm{T}}{d\varphi}=\rho^2\mathrm{V},$$

et l'on a toujours les équations (6) ou (6') avec les relations des constantes

$$(15) \qquad \begin{cases} \mathcal{F}(\mathcal{A},\ldots)=1, \quad \mathcal{F}(\mathcal{A}',\ldots)=1, \quad \mathrm{F}(\mathcal{A},\mathcal{A}',\ldots)=0, \\ \Sigma\mathcal{A}\alpha=m, \quad \Sigma\mathcal{A}'\alpha=0. \end{cases}$$

On observera qu'en posant

$$v^2=x'^2+y'^2+z'^2+\ldots$$

il faudrait écrire

$$\mathrm{V}=\frac{\mathrm{U}}{v},$$

si l'on voulait faire figurer dans le calcul la résistance proprement dite U.

Dans le cas où cette résistance U est proportionnelle à la simple vitesse v, V est égal à la constante $-n'$, de sorte que, d'après (14),

$$\mathrm{T}=e^{-n't},$$

et, par suite,

$$-\mathrm{R}=\frac{k^2e^{-2n't}}{\rho^3}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\varphi^2}\right).$$

De là résulte que, si une force $\mathfrak{R}_0$ fait décrire dans le vide une certaine courbe, la force $e^{-2n't}\mathfrak{R}_0$ fera décrire la même courbe avec la loi de résistance supposée, en choisissant convenablement les circonstances initiales, seulement le mouvement angulaire sera changé. Ainsi, pour les coniques précédemment considérées, la force $e^{-2n't}\frac{\mu r}{\rho^3}$ fera décrire librement ces coniques, comme s'il n'y avait pas de résistance de milieu; mais il faudra, dans la première formule (a), § IV, écrire $-\frac{1}{n'}e^{-n't}$ au lieu de t, ce qui altérera le mouvement angulaire

De même que la racine carrée de la forme quadratique joue le rôle de *rayon vecteur*, il est naturel, en suivant l'analogie, de faire jouer le rôle de *vitesse* à la racine carrée de la fonction $\mathfrak{F}(x', y', \ldots)$, désignée par f au § I. En posant, pour un moment,

$$\xi = m\rho\sin(\varphi + \varepsilon), \quad \eta = m\rho\cos(\varphi + \varepsilon),$$

m et ε étant des constantes, on a, d'après les formules (6') du § II,

$$x' = \mathcal{A}\frac{\xi'}{m} + \mathcal{A}'\frac{\eta'}{m},$$

d'où, à cause des relations (15), résulte

$$\mathfrak{F}(x', y', \ldots) = \frac{\xi'^2}{m^2} + \frac{\eta'^2}{m^2},$$

ou

$$\mathrm{f} = \rho'^2 + \rho^2\varphi'^2.$$

On a aussi, par les mêmes formules,

$$\mathrm{F} = \rho\rho',$$

et, en remettant $\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2$ au lieu de $k^2\mathrm{T}^2$, on peut écrire, si l'on veut, l'équation (11') sous la forme

$$(11'') \qquad -\mathrm{R} = \rho\varphi'^2\left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\varphi^2}\right).$$

§ VI. — *Autre choix de variables.*

D'après les équations qui définissent $\mathfrak{F}$, f, F au début du § I, et en ayant égard aux équations (1′) du précédent paragraphe, on reconnaît tout de suite que

$$(a)\qquad \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = 2\mathrm{F},\quad \frac{d\mathrm{f}}{dt} = 2\mathrm{RF} + 2\mathrm{Vf},\quad \frac{d\mathrm{F}}{dt} = \mathrm{f} + \mathrm{R}\mathfrak{F} + \mathrm{VF},\quad \frac{1}{\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{dt} = \mathrm{V},$$

où j'ai rapproché la quatrième équation. En éliminant R entre les deux premières, il vient

$$\mathfrak{F}\frac{d\mathrm{f}}{dt} - 2\mathrm{F}\frac{d\mathrm{F}}{dt} + 2\mathrm{fF} = \frac{2}{\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{dt}(\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2),$$

et, en mettant $\frac{d\mathfrak{F}}{dt}$ au lieu de $2\mathrm{F}$ au troisième terme du premier membre, on retrouve la relation

$$\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2 = k^2\mathrm{T}^2,$$

qui peut être regardée comme une intégrale première des équations (a).

On aurait des équations analogues pour le second groupe (1′), etc. Dans la question générale d'intégration de l'ensemble des groupes (1′), les quantités $\mathrm{R}, \mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \ldots$ sont censées des fonctions données de toutes les variables $t, x, y, \ldots, x_1, y_1, \ldots$ et de leurs premières dérivées $x', y', \ldots, x'_1, y'_1, \ldots$. Au moyen des équations (6), § I, et des analogues, toute fonction donnée de $t, x, x', \ldots$ peut être exprimée au moyen de $t, \rho, \rho', \varphi, \varphi', \rho_1, \rho'_1, \varphi_1, \varphi'_1, \ldots$, et l'on doit adjoindre aux divers groupes, tels que (a), les équations

$$(b)\qquad k\mathrm{T} = \rho^2\varphi',\quad k_1\mathrm{T}_1 = \rho_1^2\varphi'_1,\quad \ldots.$$

A cause de

$$\rho = \sqrt{\mathfrak{F}},\quad \rho' = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathfrak{F}}},\quad \varphi' = \frac{\sqrt{\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2}}{\mathfrak{F}},$$

on peut aussi considérer V_i et R_i comme des fonctions des variables t, $\mathcal{J}$, f, F, φ; $\mathcal{J}_1$, f_1, F_1, φ_1, ..., et réduire, si l'on veut, chaque groupe, tel que (a), aux trois premières équations, en y adjoignant

$$(b') \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{\mathcal{J}f - F^2}}{\mathcal{J}}.$$

Je me bornerai, comme ci-dessus, à la considération d'un seul groupe (1') pour introduire diverses remarques.

Si R et V sont des fonctions données de t, φ, $\mathcal{J}$, f, F, on a naturellement à intégrer un système de quatre équations différentielles du premier ordre (a) et (b'). Mais le nombre des intégrales fondamentales à trouver diminuera d'une unité si t n'entre pas explicitement dans ces deux fonctions : ce nombre diminuera de deux unités si t et φ ne figurent pas dans les mêmes fonctions. Dans ce dernier cas, on aura, par exemple, à intégrer les équations simultanées

$$(c) \qquad \frac{df}{d\mathcal{J}} = R + \frac{Vf}{F}, \quad 2F\frac{dF}{d\mathcal{J}} = f + R\mathcal{J} + VF,$$

et à effectuer les deux quadratures

$$dt = \frac{d\mathcal{J}}{2F}, \quad d\varphi = \frac{\sqrt{Ff - F^2}}{2F\mathcal{J}}\,d\mathcal{J}.$$

Cette conclusion est tout à fait analogue à celle que formule Jacobi à la page 209 de son grand Mémoire *Sur le Multiplicateur* et que je me permets de rappeler :

« *Unde variabilium electione effectum est, ut motus cometæ circa solem in æthere resistente tantum pendeat ab integratione duarum equationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles α, β, r; qua transacta si determinantur α et β per r, obtinentur φ et t per quadraturas.* » (*Math. Werke*, I).

En supposant

$$\mathcal{J} = x^2 + y^2,$$

les variables de Jacobi sont

$$r = \sqrt{\mathfrak{F}}, \quad \alpha = \frac{1}{2}\mathfrak{f} - \frac{1}{2}\int R\, d\mathfrak{F}, \quad \beta = kT,$$

R ne devant dépendre que de r, restriction qui n'est pas nécessaire dans ce qui précède, et où R peut dépendre de $\mathfrak{F}$, f, F d'une manière quelconque.

Les équations (a) fournissent la combinaison

$$\frac{1}{\mathfrak{F}}\frac{d\mathfrak{F}}{dt} + \frac{1}{\mathrm{f}}\frac{d\mathrm{f}}{dt} - \frac{2}{\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{dt} = \frac{2}{\mathrm{F}}(\mathrm{F}^2 - \mathfrak{F}\mathrm{f})\left(\frac{1}{\mathfrak{F}} + \frac{R}{\mathrm{f}}\right),$$

d'où résulte

$$(\mathrm{a}_0) \qquad \frac{d\log\frac{\mathfrak{F}\mathrm{f}}{\mathrm{F}^2}}{d\mathfrak{F}} = \left(1 - \frac{\mathfrak{F}\mathrm{f}}{\mathrm{F}^2}\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{F}} + \frac{R}{\mathrm{f}}\right),$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(\mathrm{a}) \qquad \frac{d\log\left(\frac{\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2}{\mathrm{f}}\right)}{d\mathfrak{F}} = -\frac{R}{\mathrm{f}};$$

on a aussi

$$(\mathrm{b}) \qquad \frac{d\log(\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2)}{d\mathfrak{F}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{F}}.$$

Dans le cas particulier où

$$R = -\frac{\mathrm{f}}{\mathfrak{F}},$$

l'équation (a_0) donne

$$\mathfrak{F}\mathrm{f} = C\mathrm{F}^2,$$

C étant une constante arbitraire. L'équation (b') fournit alors

$$\frac{d\varphi}{d\mathfrak{F}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{C-1}}{\mathfrak{F}}, \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{F} = C_1 e^{\frac{2\varphi}{\sqrt{C-1}}},$$

ce qui définit la *trajectoire* que l'on peut ranger, si l'on veut, dans la classe des *spirales logarithmiques*. L'équation (b) donne, d'ailleurs,

$$\frac{dF}{d\mathfrak{F}} = \frac{1}{2}V,$$

et en chassant f et φ du second membre, au moyen des deux intégrales précédentes, on sera amené à intégrer une équation différentielle du premier ordre, en supposant V indépendant de t. On aura ensuite t par une quadrature.

Les équations (a) et (b) mettent en évidence d'autres cas où l'on peut obtenir immédiatement une ou deux intégrales. Par exemple, si l'on suppose

$$(\alpha) \qquad \frac{R}{f} = \varpi(\mathfrak{F})\Phi\left(\frac{\mathfrak{F}f - F^2}{f}\right),$$

ϖ et Φ désignant des fonctions arbitrairement choisies, l'équation (a) fournira sur-le-champ une intégrale *indépendante de toute hypothèse faite sur la loi de résistance.*

Si l'on considère isolément l'équation (b) et que l'on suppose

$$(\beta) \qquad \frac{V}{F} = \psi(\mathfrak{F})\,\Psi(\mathfrak{F}f - F^2),$$

ψ et Ψ désignant des fonctions quelconques, cette équation fournira tout de suite une intégrale *indépendante de toute hypothèse faite sur la nature de la force centrale.*

Il est clair qu'en adoptant simultanément les expressions (α), (β) de R et de V, la solution complète s'achèvera par deux quadratures.

En posant généralement

$$\mathfrak{F}f - F^2 = w^2, \quad f = uw^2,$$

de façon que

$$F = \sqrt{\mathfrak{F}u - 1}\,w, \quad T = \frac{1}{k}w,$$

les équations (a) et (b) pourront s'écrire

$$\frac{du}{d\mathfrak{F}} = \frac{R}{w^2}, \quad \frac{dw}{d\mathfrak{F}} = \frac{V}{2\sqrt{\mathfrak{F}u - 1}},$$

et, en y joignant

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{w}{\mathfrak{F}}, \quad \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = 2\sqrt{\mathfrak{F}u - 1w},$$

on aura, sous une autre forme, les quatre équations qu'il s'agit d'intégrer dans le cas général où R et V sont des fonctions données quelconques de t, φ, $\mathfrak{F}$, f, F, c'est-à-dire ici de t, φ, $\mathfrak{F}$, u, w.

§ VII. — *Du multiplicateur relatif au système* (a).

Considérons en lui-même le système (a), ou plutôt le suivant,

$$(a_1)\quad dt = \frac{d\mathfrak{F}}{2\mathrm{F}} = \frac{d\mathrm{f}}{2\mathrm{RF} + 2\mathrm{Vf}} = \frac{d\mathrm{F}}{\mathrm{f} + \mathrm{R}\mathfrak{F} + \mathrm{VF}} = \frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{TV}} = \frac{d\varphi}{\left(\frac{\sqrt{\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2}}{\mathrm{f}}\right)},$$

dans lequel je suppose que R et V sont des fonctions de $\mathfrak{F}$, f, F, φ indépendantes de t. Le multiplicateur M, propre à ce système, pourra, conformément aux règles connues (*loc. cit.*, p. 77) [1], être défini par l'équation

$$(\mathrm{M})\qquad \frac{d\log\mathrm{M}}{dt} + 2\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial\mathrm{f}} + \mathfrak{F}\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial\mathrm{F}} + 2\mathrm{f}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\mathrm{f}} + \mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\mathrm{F}} + 4\mathrm{V} = 0.$$

En admettant qu'il ait été déterminé par un moyen quelconque, si R et V ne contiennent pas φ, soit

$$\Theta(\mathfrak{F}, \mathrm{f}, \mathrm{F}, \mathrm{T}) = \mathrm{C},$$

C étant une constante arbitraire qui n'entre pas dans Θ, une intégrale indépendante de t du système (a_1); en l'adjoignant à l'intégrale

$$(d)\qquad \frac{\sqrt{\mathfrak{F}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2}}{\mathrm{T}} = k,$$

(1) Les détails dans lesquels j'entre ici doivent être considérés comme un simple rappel des principes posés par le grand géomètre dans le Mémoire ci-dessus mentionné.

le principe du *dernier multiplicateur* (*loc. cit.*, p. 100) fournira la dernière intégrale

$$(e)\qquad \int \frac{\mathrm{MT}^2}{\left(k^2\mathrm{T}\dfrac{\partial\theta}{\partial\mathrm{F}} - \mathrm{F}\dfrac{\partial\theta}{\partial\mathrm{T}}\right)}[(\mathrm{RF} + \mathrm{V}f)\,d\mathcal{F} - \mathrm{F}\,df] = \text{const.},$$

d'où l'on doit éliminer, comme on le sait, F et T au moyen des deux intégrales précédentes, après que les différentiations partielles auront été effectuées.

Si R et V contiennent φ, les deux intégrales censées données étant représentées par

$$\theta(\mathcal{F}, f, \mathrm{F}, \varphi, \mathrm{T}) = \mathrm{C}, \quad \theta_1(\mathcal{F}, f, \mathrm{F}, \varphi, \mathrm{T}) = \mathrm{C}_1,$$

en les adjoignant à l'intégrale (d), la dernière intégrale sera

$$(f)\qquad \int \frac{\mathrm{MT}^2}{\Delta}[(\mathrm{R}\mathcal{F} + \mathrm{V}f)\,d\mathcal{F} - \mathrm{F}\,df] = \text{const.},$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathrm{F} & \dfrac{\partial\theta}{\partial\mathrm{F}} & \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\mathrm{F}} \\ k^2\mathrm{T} & \dfrac{\partial\theta}{\partial\mathrm{T}} & \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\mathrm{T}} \\ \theta & \dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\varphi} \end{vmatrix},$$

et j'écris ces formules (e), (f) dans l'unique prévision où l'on parviendrait à trouver une ou deux intégrales lorsque, R et V étant donnés, on connaît une expression de M vérifiant l'équation (M).

Dans le cas où R ne dépend que de $\mathcal{F}$ et de φ, en désignant par p un nombre donné quelconque et ajoutant à l'équation (M) la suivante,

$$-p\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}\,dt} + p\mathrm{V} = 0,$$

qui provient de (a_1), on obtient

$$\frac{d\log \mathrm{MT}^{-p}}{dt} + 2f\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial f} + \mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\mathrm{F}} + (p+4)\mathrm{V} = 0.$$

En égalant à zéro l'ensemble des termes qui suivent le premier, on aura

$$(\mu_1) \qquad M = T^p.$$

Ainsi, quand R dépend seulement de $\mathfrak{F}$ et de φ et que V est une fonction homogène de F et $\sqrt{f}$ de degré $-(p+4)$, pouvant contenir $\mathfrak{F}$ et φ d'une manière quelconque, la formule (μ_1) donne un multiplicateur du système (a_1). Si R et V ne contiennent point φ, il suffira, comme on l'a dit, de connaître une intégrale Θ pour ramener le problème aux quadratures. Par exemple, en prenant

$$V = -\frac{\varpi'(\mathfrak{F})}{\varpi(\mathfrak{F})} F,$$

auquel cas

$$p = -5,$$

l'équation (b), § VI, fournit

$$\Theta = T^2\varpi = C,$$

et la partie sous le signe $\int$ dans l'équation (e) revient à la différentielle exacte

$$\varpi\left[\left(R - \frac{\varpi'}{\varpi}\right) d\mathfrak{F} - df\right],$$

ce qui ne doit être considéré que comme une très simple vérification de mes propres calculs. On aurait un exemple un peu plus général, en supposant dans (β) la fonction Ψ égale à $(\mathfrak{F}f - F^2)^{-\left(\frac{p+4}{2}\right)}$, R ne dépendant encore que de $\mathfrak{F}$. L'équation (b) fournit l'intégrale Θ, et l'on peut ensuite appliquer la formule (e).

Lorsqu'on suppose

$$(j) \qquad V = \varpi(\mathfrak{F}) f^{-\left(\frac{p+4}{2}\right)},$$

$\varpi(\mathfrak{F})$ étant une fonction donnée quelconque; si R ne dépend que de $\mathfrak{F}$, on a le multiplicateur (μ_1), mais il reste à trouver une intégrale Θ pour pouvoir appliquer la formule (e). La difficulté est alors concentrée dans la recherche de l'avant-dernière intégrale.

Admettons encore que R ne dépende que de $\mathfrak{J}$, en sorte que

$$R = \psi'(\mathfrak{J}),$$

ψ étant une fonction donnée à volonté : en désignant par p et q deux nombres quelconques aussi donnés, et ajoutant à l'équation (M) les deux équations du système (a_1), savoir :

$$-p\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} + pV = 0,$$

$$-q\frac{d\mathfrak{f}}{dt} + q\varpi'(\mathfrak{J})\frac{d\mathfrak{J}}{dt} + 2q\mathrm{f}V = 0,$$

puis égalant à zéro tout ce qui dépend de V dans l'équation obtenue, on en conclura

$$(k)\qquad \left\{\begin{aligned} M &= T^p e^{q\mathfrak{f}-q\psi},\\ V &= \Phi e^{-q\mathfrak{f}},\end{aligned}\right.$$

Φ étant une fonction homogène de F et $\sqrt{\mathrm{f}}$, de degré $-(p+4)$, pouvant contenir $\mathfrak{J}$ et φ d'une manière quelconque. Si Φ ne renferme pas φ, la connaissance d'une intégrale Θ suffira pour ramener le problème aux quadratures.

En dehors de cette forme V, qui correspond au cas signalé par Jacobi (*loc. cit.*, p. 208), il paraît difficile de découvrir quelque modification de l'équation (M), au moyen du système (a_1), qui permette de trouver un multiplicateur ne renfermant pas t, et tel que les expressions de R et de V soient dans une parfaite indépendance l'une de l'autre.

J'ajouterai quelques remarques pour le cas du vide. Il faut alors supposer $V = 0$, $T = 1$ et supprimer le terme intermédiaire $\frac{dT}{TV}$ dans le système (a_1). Si, à part l'intégrale

$$\sqrt{\mathfrak{J}\mathrm{f} - \mathrm{F}^2} = k,$$

on en a une autre

$$\theta(\mathfrak{F}, f, F, \varphi) = C,$$

la dernière intégrale sera

$$\int \frac{M}{\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}}(R\, d\mathfrak{F} - df) = \text{const.},$$

et si, en particulier, R ne dépend que de $\mathfrak{F}$ et de φ, on peut prendre $M = 1$.

En conservant cette hypothèse sur la composition de R, soit

$$\theta\left(\mathfrak{F}, \varphi, \frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi}, k^2\right) = C$$

une intégrale première, résolue par rapport à la constante d'intégration de l'équation (11), § II, la dernière intégrale sera, M pouvant être pris égal à 1,

$$\int \frac{\left(\frac{k}{F}\, d\mathfrak{F} - 2F\, d\varphi\right)}{\Delta} = \text{const.},$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathfrak{F} & \frac{\partial\theta}{\partial f} \\ -2F & \frac{\partial\theta}{\partial F} \end{vmatrix}.$$

La variable f ne pouvant s'introduire ici que par l'intégrale $\sqrt{\mathfrak{F}f - F^2} = k$, le déterminant Δ se réduit à $\mathfrak{F}\frac{\partial\theta}{\partial F}$. D'ailleurs, à cause de

$$\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} = \frac{2F\mathfrak{F}}{k},$$

on aura

$$\frac{\partial\theta}{\partial F} = \frac{\partial\theta}{\partial\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi}}\,\frac{2\mathfrak{F}}{k},$$

et l'on pourra prendre pour la dernière intégrale

$$\int \frac{(d\rho - \rho'\, d\varphi)}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho'}} = \text{const.},$$

en posant $\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$ et supposant l'intégrale donnée écrite sous la forme qui correspond directement à la formule (11)

$$\Theta(\rho, \rho', \varphi) = \mathrm{C};$$

c'est, du reste, ce qui résulterait de ce qui est dit à la page 129 du Mémoire cité.

§ VIII. — *Mouvement des projectiles.*

Les équations de ce mouvement sont comprises dans le type

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \theta\frac{d\xi}{dt} + g,$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \theta\frac{d\eta}{dt} + g_1,$$
$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \theta\frac{d\zeta}{dt} + g_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

où $g, g_1, g_2, \ldots$ sont des constantes données. En posant

$$\mathrm{V} = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + \ldots} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{V}},$$

S serait la résistance tangentielle dans le cas de deux ou trois coordonnées rectangulaires $\xi, \eta, \zeta, \ldots$. Je considérerai généralement S et, par suite, θ comme une fonction quelconque de $\xi', \eta', \zeta', \ldots$. Cela posé, si l'on fait

$$x = \frac{d\xi}{dt}, \quad y = \frac{d\eta}{dt}, \quad z = \frac{d\zeta}{dt}, \quad \ldots,$$

la différentiation des équations précédentes fournira

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt}x + \theta x',$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt}y + \theta y',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ce qui rentre dans la forme (1′), § V, en prenant

$$V = \theta, \quad R = \frac{d\theta}{dt}.$$

A cause de

$$x' = \theta x + g,$$

en différentiant la première (6), § I, on aura

$$A[(\rho' - \theta\rho)\sin\varphi + \rho\varphi'\cos\varphi] + A'[(\rho' - \theta\rho)\cos\varphi - \rho\varphi'\sin\varphi] = g.$$

En multipliant et divisant par $\rho = \sqrt{\mathfrak{F}}$, puis posant

$$(\alpha) \qquad \frac{(F - \theta\mathfrak{F})\sin\varphi + kT\cos\varphi}{\sqrt{\mathfrak{F}}} = G, \quad \frac{(F - \theta\mathfrak{F})\cos\varphi - kT\sin\varphi}{\sqrt{\mathfrak{F}}} = G',$$

l'équation précédente et les analogues peuvent s'écrire

$$(g) \qquad \left\{ \begin{array}{l} AG + A'G' = g, \\ BG + B'G' = g_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

De ces dernières relations résulte

$$F(AG, A, BG, B, \dots) = F(g, A, g_1, B, \dots),$$

c'est-à-dire

$$G = F(g, A, g_1, B, \dots),$$

et de même

$$G' = F(g, A', g_1, B', \dots).$$

Il en résulte aussi

$$\mathfrak{F}(g, g_1, \dots) = \mathfrak{F}(AG + A'G', BG + B'G', \dots) = G^2 + G'^2 = h^2.$$

On a

$$F(x, x', \dots) = F(x, \theta x + g, \dots) = \theta\mathfrak{F} + F(x, g, \dots),$$

$$f = \mathfrak{F}(x', y', \dots) = \mathfrak{F}(\theta x + g, \dots) = \theta^2\mathfrak{F} + 2\theta F(x, g, \dots) + h^2$$

et, par suite,

$$k^2T^2 = \mathfrak{F}f - F^2 = h^2\mathfrak{F} - F(x, g, \dots)^2.$$

En désignant par $x_0, y_0, \ldots$ les valeurs de $x, y, \ldots$ répondant à $t = 0$, et par F_0 la fonction $F(x_0, g, y_0, g_1, \ldots)$, les relations (α) donneront, pour cette valeur de t, et en ayant égard aux égalités précédentes,

$$G = \frac{F_0 \sin\varphi_0 + \sqrt{h^2 \mathfrak{F}_0 - F_0^2} \cos\varphi_0}{\sqrt{\mathfrak{F}_0}},$$

$$G' = \frac{F_0 \cos\varphi_0 - \sqrt{h^2 \mathfrak{F}_0 - F_0^2} \sin\varphi_0}{\sqrt{\mathfrak{F}_0}},$$

où ne figurent que les données initiales en supposant aussi donnés, comme je le ferai toujours, les coefficients $a, b, \ldots$ qui entrent dans la composition de $\mathfrak{F}$. Quant aux constantes A, A′, B, B′, ..., en ayant égard aux relations (g), aux formules (6), § I, et aux précédentes expressions de G, G′, on aura

$$A = \frac{g\sqrt{\mathfrak{F}_0}\cos\varphi_0 - G' x_0}{\sqrt{h^2 \mathfrak{F}_0 - F_0^2}}, \quad A' = \frac{-g\sqrt{\mathfrak{F}_0}\sin\varphi_0 + G x_0}{\sqrt{h^2 \mathfrak{F}_0 - F_0^2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où $h^2 = \mathfrak{F}(g, g_1, \ldots)$ ne dépend que de quantités données et où l'on peut attribuer à φ_0 la valeur déterminée qu'on voudra, par exemple $\frac{\pi}{2}$ ou o.

Maintenant les équations (α) donnent

$$(\beta) \quad \left\{ \begin{aligned} F - \theta\mathfrak{F} &= \sqrt{\mathfrak{F}}(G \sin\varphi + G' \cos\varphi), \\ kT &= \sqrt{\mathfrak{F}}(G \cos\varphi - G' \sin\varphi). \end{aligned} \right.$$

En faisant la somme des carrés et remplaçant k^2T^2 par $\mathfrak{F}f - F^2$, on aura

$$f - 2\theta F + \theta^2 \mathfrak{F} = h^2.$$

Si l'on élimine f au moyen de cette dernière relation, les équations (a),

§ VI, deviennent

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{F}}{dt} = 2\mathrm{F}; \\ \dfrac{d\mathrm{F}}{dt} = h^2 - \theta^2\mathfrak{F} + 3\theta\mathrm{F} + \dfrac{d\theta}{dt}\mathfrak{F}, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{k\mathrm{T}}{\mathfrak{F}}. \end{cases}$$

Quand on substitue dans ces équations les valeurs de F et de kT, déduites de (β), la seconde devient identique, et la première, comparée à la troisième, fournit, en réintroduisant ρ,

$$(\varepsilon)\quad \frac{d\rho}{d\varphi} = \rho\frac{\rho\theta + \mathrm{G}\sin\varphi + \mathrm{G}'\cos\varphi}{\mathrm{G}\cos\varphi - \mathrm{G}'\sin\varphi}.$$

La fonction θ peut, comme je l'ai supposé, dépendre d'une manière quelconque de $\xi', \eta', \ldots$, c'est-à-dire de $x, y, z, \ldots$, ou enfin de ρ et φ, à cause des formules (6), § I. Son expression transformée contiendra A, A', ...; mais, d'après les valeurs ci-dessus de ces constantes, on peut considérer θ comme dépendant définitivement des coefficients qui entrent dans $\mathfrak{F}$, des valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$ et des constantes données $g, g_1, \ldots$.

L'équation (ε) étant intégrée et la constante qui s'introduit étant déterminée par la condition que $\rho = \rho_0$ pour $\varphi = \varphi_0$, la dernière (γ) donnera t par une quadrature. Cette équation (ε), qui est exactement de même forme que l'une des équations dont on s'occupe dans la *Balistique,* pourra, comme celle-ci, s'intégrer dans le cas où l'on prend

$$\rho\theta = p + q\rho^n,$$

n étant un exposant constant quelconque, et p, q des fonctions quelconques de φ. La résistance proprement dite étant généralement

$$\mathrm{S} = \mathrm{V}\theta,$$

et les calculs qu'il faut faire ici étant à peu près les mêmes que dans le cas ordinaire, on voit que, sans augmenter la difficulté analytique, on aura, par des transformations sensiblement pareilles, le mouvement du projectile avec une loi de résistance représentée, soit par

$$S = \frac{V}{\rho}(p + q\rho^n),$$

soit par

$$S = p + qV^n,$$

où

$$V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \ldots},$$

et où ρ désigne toujours la racine carrée d'une forme quadratique quelconque.

Or, à cause des coefficients arbitraires a, b, ... qui figurent dans ρ, on peut, en les déterminant convenablement, rapprocher davantage les résultats du calcul de ceux fournis par l'observation, bien que l'on fasse dépendre implicitement de la *direction* la résistance du milieu quand on ne réduit pas ρ^2 à une somme de carrés.

La quantité θ étant censée exprimée en $\mathfrak{F}$ et φ, on a généralement

$$(r) \qquad R = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial\mathfrak{F}}2F + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\frac{kT}{\mathfrak{F}}.$$

Si, en particulier, θ est donné en fonction de $\mathfrak{F}$ seulement, les deux premières équations (γ) fourniront, en réintroduisant ρ,

$$(\delta) \qquad \frac{dF}{d\rho} = \rho\frac{h^2 - \theta^2\rho^2}{F} + \rho\left(3\theta + \rho\frac{d\theta}{d\rho}\right).$$

Quand on aura intégré cette équation, l'angle φ sera donné, sans intégration nouvelle, par la première équation (β), et l'on aura ensuite t par une quadrature.

L'équation (δ) est immédiatement intégrable lorsqu'on suppose

$$m\left(\rho\frac{d\theta}{d\rho} + 3\theta\right) = h^2 - \theta^2\rho^2,$$

m étant une constante quelconque. En faisant, pour un moment,

$$\theta = \frac{h^2}{m}y, \quad \rho = \frac{m}{h}x,$$

cette dernière relation peut s'écrire

$$x\frac{dy}{dx} + 3y = 1 - x^2y^2.$$

Elle admet la solution particulière

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

et l'on en conclut, par suite, pour la solution générale,

$$y = \frac{1}{x}\,\frac{e^{(x+\sigma)} - e^{-(x+\sigma)}}{e^{(x+\sigma)} + e^{-(x+\sigma)}} - \frac{1}{x^2},$$

σ étant une constante quelconque. Une pareille loi de résistance ne peut physiquement convenir. Il m'a paru néanmoins intéressant de la signaler, les seules lois où l'on soit parvenu à réduire le problème aux quadratures étant, à ma connaissance, comprises dans la formule $\rho\vartheta = p + q\rho^n$, quand on y suppose que ρ désigne la vitesse.

Dans la question présente, on a un nombre suffisant d'intégrales pour appliquer le principe du dernier multiplicateur; mais, en se reportant à l'équation (M), § VII, et à l'expression ci-dessus (r) de R, on s'aperçoit que la détermination du multiplicateur M n'offre pas moins de difficultés que l'intégration directe de l'équation (ε) ou de l'équation (δ). Cette équation (δ), en changeant la notation, se rattache au type

$$y\frac{dy}{dx} = \mathrm{X} + \mathrm{X}_1 y,$$

où X, X_1 sont des fonctions données de x. Si l'on cherche un multiplicateur eulérien de la forme

$$\mu = y^m + \varphi_1 y^{m-1} + \varphi_2 y^{m-2} + \ldots + \varphi_{m-1} y + \varphi_m,$$

où φ_1, φ_2, ... sont des fonctions inconnues de x, et m un nombre entier quelconque, on peut déterminer φ_1, φ_2, ... *moyennant* une certaine relation entre X et X_1; mais cette relation, pour le cas de l'équation (δ), fait dépendre la loi de résistance de l'intégration d'une équation qui n'est pas plus facile à traiter que l'équation (δ), bien qu'on puisse se borner à une solution particulière.

Dans de telles conditions, et si l'on veut adopter une loi de résistance autre que celle dont on a parlé plus haut, il faut revenir au procédé des approximations successives. En supposant que θ ne dépende que de $\mathfrak{J}$, il m'a paru qu'il y avait quelque avantage à conserver t comme variable indépendante. Les deux premières équations (γ) peuvent alors être remplacées par l'équation du second ordre

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\mathfrak{J}}{dt^2} = h^2 - \theta^2\mathfrak{J} + \left(\frac{3}{2}\theta + \mathfrak{J}\frac{d\theta}{d\mathfrak{J}}\right)\frac{d\mathfrak{J}}{dt}.$$

En admettant que la densité du milieu est assez faible, on pourra supposer

$$\theta = \varepsilon\left(a + a_1\mathfrak{J}^{\frac{1}{2}} + a_2\mathfrak{J} + a_3\mathfrak{J}^{\frac{3}{2}} + a_4\mathfrak{J}^2 + \ldots + a_n\mathfrak{J}^{\frac{n}{2}}\right),$$

ε étant un nombre très petit, et a, a_2, a_3, ... des coefficients finis censés connus. Si l'on conçoit $\mathfrak{J}$ développé suivant les puissances positives de ε, en sorte que

$$\mathfrak{J} = u + u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

u, u_1, ... étant des fonctions inconnues de t; en substituant cette expression de $\mathfrak{J}$ dans celle de θ, puis dans l'équation différentielle, et égalant dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de ε, on aura une suite d'équations différentielles qu'on pourra intégrer successivement, en déterminant les constantes arbitraires par la condition que u_1, u_2, ... et leurs dérivées premières s'évanouissent avec t. Quant à u, qui répond au mouvement parabolique, on aura

$$u = h^2t^2 + \mathcal{A}t + \mathcal{B}.$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ seront fournis par les valeurs initiales x_0, y_0, ...; u_1 sera donné par une équation de la forme

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} = (M + N\sqrt{u})\frac{du}{dt} \quad \text{ou} \quad d\frac{du_1}{dt} = (M + N\sqrt{u})\, du,$$

M et N étant des fonctions rationnelles et entières de u, etc. Mais je n'insisterai pas en ce moment sur ce sujet, qui exige des calculs un peu longs quand on veut approprier l'ensemble des formules aux exigences de la Balistique.