JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. GOMES TEIXEIRA

Sur le développement des fonctions implicites en une série

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 277-282.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7__277_0>

Sur le développement des fonctions implicites en une série;

PAR M. F. GOMÈS TÉIXEIRA,

Professeur à l'Université de Coïmbre (Portugal).

On connaît la formule de Lagrange qui sert à développer en une série ordonnée suivant les puissances de x une fonction

$$u = f(y), \quad y = t + x\varphi(y).$$

Nous allons dans cette Note présenter une formule plus générale que celle de Lagrange, qui sert à développer en série ordonnée suivant les puissances de x une fonction u,

$$(1) \qquad \begin{cases} u = f(y), \\ y = t + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + \ldots + x^n\varphi_n(y). \end{cases}$$

Dérivant la deuxième des équations (1), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varphi_1(y) + 2x\varphi_2(y) + \ldots + nx^{n-1}\varphi_n(y) \\ &\quad + [x\varphi_1'(y) + x^2\varphi_2'(y) + \ldots + x^n\varphi_n'(y)]\frac{dy}{dx}, \\ \frac{dy}{dt} &= 1 + [x\varphi_1'(y) + x^2\varphi_2'(y) + \ldots + x^n\varphi_n'(y)]\frac{dy}{dt}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}[\varphi_1(y) + 2x\varphi_2(y) + \ldots + nx^{n-1}\varphi_n(y)]$$

ou

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\sum_{i=1}^{i=n}[ix^{i-1}\varphi_i(y)].$$

Mais, étant

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt},$$

nous avons

(3) $$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\sum[ix^{i-1}\varphi_i(y)],$$

ou

(4) $$\frac{du}{dx} = \theta\frac{du}{dt},$$

où l'on pose

(5) $$\theta = \sum(ix^{i-1}\varphi_i(y)].$$

Dérivant l'équation (4) et ayant égard à l'équation (2), il vient

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dxdt}\theta + \frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta}{dx} + \theta\frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt}\right),$$
$$\frac{d^2u}{dxdt} = \frac{d^2u}{dt^2}\theta + \frac{du}{dt}\frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt};$$

donc

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dt^2}\theta^2 + \frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta}{dx} + 2\theta\frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt}\right)$$

ou

(6) $$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{du}{dt}\theta^2\right)}{dt} + \frac{du}{dt}\frac{d\theta}{dx}.$$

En dérivant (6), on obtient de la même manière

(7) $$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2\left(\frac{du}{dt}\theta^3\right)}{dt^2} + 3\frac{d\left(\frac{du}{dt}\theta\frac{d\theta}{dx}\right)}{dt} + \frac{du}{dt}\frac{d^2\theta}{dx^2},$$

et après

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{d^3\left(\frac{du}{dt}\theta^4\right)}{dt^3} + 6\frac{d^2\left(\frac{du}{dt}\theta^2\frac{d\theta}{dx}\right)}{dt^2}$$
$$+ 3\frac{d\left[\frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2\right]}{dt} + 4\frac{d\left(\frac{du}{dt}\theta\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)}{dt} + \frac{du}{dt}\frac{d^3\theta}{dx^3}.$$

On obtient les dérivées suivantes de la même manière. Nous allons en chercher la loi.

En général, représentant par θ', θ'', θ''', ... les dérivées de θ par rapport à x, on a

$$\frac{d^{i-1} u}{dx^{i-1}} = \sum \frac{d^{a-1}\left[\frac{du}{dt}\theta^k(\theta')^m(\theta'')^p(\theta''')^q\ldots\right]}{dt^{a-1}}, \tag{8}$$

et par conséquent

$$\frac{d^i u}{dx^i} = \sum\left\{\frac{d^{a-1}\left[\frac{d^2u}{dt^2}\theta^{k+1}(\theta')^m(\theta'')^p\ldots\right]}{dt^{a-1}}\right.$$
$$+\frac{d^{a-1}\left[\frac{du}{dt}\left(\theta\frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt}(k+1)+k\frac{d\theta}{dx}\right)\theta^{k-1}(\theta')^m(\theta'')^p\ldots\right]}{dt^{a-1}}$$
$$+\frac{d^{a-1}\left[m\frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta'}{dx}+\frac{d\theta'}{dy}\frac{dy}{dt}\theta\right)\theta^k(\theta')^{m-1}(\theta'')^p\ldots\right]}{dt^{a-1}}$$
$$\left.+\frac{d^{a-1}\left[p\frac{du}{dt}\left(\frac{d\theta''}{dx}+\frac{d\theta''}{dy}\frac{dy}{dt}\theta\right)\theta^k(\theta')^m(\theta'')^{p-1}(\theta''')^q\ldots\right]}{dt^{a-1}}+\ldots\right\}$$

ou

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^i u}{dx^i} = \sum\Bigg\{ & \frac{d^a\left[\frac{du}{dt}\theta^{k+1}(\theta')^m(\theta'')^p\ldots\right]}{dt^a}\\ & + k\frac{d^{a-1}\left[\frac{du}{dt}\theta^{k-1}(\theta')^{m+1}(\theta'')^p\ldots\right]}{dt^{a-1}}\\ & + m\frac{d^{a-1}\left[\frac{du}{dt}\theta^k(\theta')^{m-1}(\theta'')^{p+1}(\theta''')^q\ldots\right]}{dt^{a-1}}\\ & + p\frac{d^{a-1}\left[\frac{du}{dt}\theta^k(\theta')^m(\theta'')^{p-1}(\theta''')^{q+1}\ldots\right]}{dt^{a-1}}+\ldots\Bigg\}.\end{aligned}\right. \tag{9}$$

Comparant cette formule à la formule (8), on voit que chaque terme de (8) donne une somme de termes qu'on forme de celui-là en ôtant une unité à l'exposant de chaque facteur 1, θ, θ', θ'', ... et en l'additionnant à celui du suivant, et donnant pour coefficient au terme l'exposant qui a été diminué.

L'ordre de la dérivée par rapport à t qui entre en chaque terme est égal à la somme des exposants de θ, θ', θ'', ... dans le terme moins une unité. En effet, cela est vrai pour la dérivée $\frac{d^2u}{dx^2}$, et par la formule (9) on voit que l'ordre de chaque dérivée augmente d'une unité dans le passage de $\frac{d^{a-1}u}{dx^{a-1}}$ à $\frac{d^a u}{dx^a}$, ainsi que la somme des exposants de θ, θ', θ'', ...

Nous avons donc, en remarquant que les dérivées de θ d'ordre plus grand que n sont nulles, la formule suivante,

$$\frac{d^i u}{dx^i} = \sum A \frac{d^b \left[\frac{du}{dt} \theta^\alpha (\theta')^\beta (\theta'')^\gamma \ldots (\theta^{(n-1)})^\lambda \right]}{dt^b},$$

où l'on doit donner à α, β, γ, ..., λ toutes les valeurs entières et positives qui satisfont à l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = i,$$

et où b est donné par la formule

$$b + 1 = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Il ne nous reste qu'à déterminer le coefficient A. Pour cela nous ferons

$$\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = \ldots = \varphi_n(y) = 1,$$

et nous aurons

$$\frac{d^i u}{dx^i} = \sum A \frac{d^{b+1} u}{dy^{b+1}} \left(\frac{dy}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^\beta \cdots \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)^\lambda.$$

Mais on trouve dans le *Calcul différentiel* de M. Bertrand la formule suivante, qui donne la dérivée d'ordre i de u étant $u=f(y)$, $y=\psi(x)$,

$$\frac{d^i u}{dx^i}=\sum 1.2\ldots i\frac{d^p u}{dy^p}\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^\alpha}{1.2\ldots\alpha}\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^\beta}{(1.2)^\beta 1.2\ldots\beta}\cdots\frac{\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)^\lambda}{(1.2\ldots n)^\lambda 1.2\ldots\lambda},$$

où

$$\alpha+2\beta+\ldots+n\lambda=i,\quad \alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=b+1=p.$$

La comparaison des deux formules précédentes mène à la valeur de A qui, substituée dans la formule générale, donne la suivante

$$\frac{d^i u}{dx^i}=\sum\frac{1.2\ldots i\dfrac{d^b\left[\dfrac{du}{dt}\theta^\alpha(\theta')^\beta(\theta'')^\gamma\ldots(\theta^{(n-1)})^\lambda\right]}{dt^b}}{1.2\ldots\alpha\times 1.2\ldots\beta\times\ldots\times 1.2\ldots\lambda(1.2)^\alpha(1.2.3)^\beta\ldots(1.2\ldots n)^\lambda}.$$

Nous avons ainsi l'expression générale de la dérivée de u par rapport à x de la fonction (1).

Pour obtenir maintenant le développement de u en série ordonnée suivant les puissances de x, nous emploierons la formule de Maclaurin

$$u=u_0+\left(\frac{du}{dx}\right)_0 x+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 x^2+\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 x^3+\cdots,$$

et les coefficients seront donnés par la formule précédente, en y faisant $x=0$.

En y faisant donc $x=0$, nous aurons premièrement

$$u=f(t),\quad y=t,\quad \frac{dy}{dt}=f'(t).$$

Ensuite les formules

$$\begin{aligned}
\theta &= \varphi_1(y)+2x\varphi_2(y)+\ldots+nx^{n-1}\varphi_n(y),\\
\theta' &= 2\varphi_2(y)+3.2x\varphi_3(y)+\ldots+n(n-1)x^{n-2}\varphi_n(y),\\
\theta'' &= 3.2\varphi_3(y)+\ldots+n(n-1)(n-2)x^{n-3}\varphi_n(y),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\theta^{(n-1)} &= n(n-1)\ldots 2.1\,\varphi_n(y),\\
\theta^{(n)} &= 0
\end{aligned}$$

donneront

$$\theta=\varphi_1(t),\quad \theta'=2\varphi_2(t),\quad \theta''=3.2\varphi_3(t),\quad \ldots\quad \theta^{(n-1)}=n(n-1)\ldots 2.1\,\varphi_n(t),$$
$$\theta^{(n)}=\theta^{(n+1)}=\theta^{(n+2)}=\ldots=0.$$

Nous aurons donc

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_0=f'(t).\varphi_1(t),$$
$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0=\frac{d\{f'(t).[\varphi_1(t)]^2\}}{dt}+2f'(t)\varphi_2(t),$$
$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0=\frac{d^2\{f'(t)[\varphi_1(t)]^3\}}{dt^2}+6\frac{d[f'(t)\varphi_1(t)\varphi^2(t)]}{dt}+6f'(t)\varphi_3(t).$$

En général

$$\left(\frac{d^iu}{dx^i}\right)_0=\sum\frac{1.2\ldots i\,d^b\{f'(t).[\varphi_1(t)]^\alpha[\varphi^2(t)]^\beta\ldots[\varphi_n(t)]^\lambda\}}{1.2\ldots\alpha\times 1.2\ldots\beta\times\ldots\times 1.2\ldots\lambda\,dt^b},$$

où l'on doit donner à α, β, γ, ..., λ toutes les valeurs entières et positives qui satisfont à l'équation

$$\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+n\lambda=i$$

et où b est donné par la formule

$$b+1=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda.$$

Nous avons donc la formule

$$u=f(t)+xf'\,t\varphi_1(t)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}\sum\frac{d^b\{f'(t).[\varphi_1(t)]^\alpha\ldots[\varphi_n(t)]^\lambda\}}{1.2\ldots\alpha\times 1.2\ldots\beta\times\ldots\times 1.2\ldots\lambda\,dt^b}+\ldots,$$

qui contient comme cas très particulier celle de Lagrange.