JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DÉSIRÉ ANDRÉ

Intégration, sous forme finie, d'une quatrième espèce d'équations différentielles linéaires, à coefficients variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 283-288.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7__283_0>

Intégration, sous forme finie, d'une quatrième espèce d'équations différentielles linéaires, à coefficients variables;

Par M. Désiré ANDRÉ.

1. Nous avons, dans un précédent Mémoire ([1]), fait connaître une méthode pratique pour intégrer, sous forme finie, trois espèces d'équations différentielles linéaires, à coefficients constants ou variables, appartenant toutes les trois au genre des équations différentielles linéaires qui possèdent une équation dérivée régulière.

En même temps, nous avons fait remarquer que les différentes espèces d'équations différentielles linéaires contenues dans ce genre correspondaient à différentes espèces de séries; et que, dès qu'on savait sommer une de ces espèces de séries, on savait intégrer, sous forme finie, l'espèce correspondante d'équations différentielles linéaires.

Les trois espèces d'équations différentielles que nous avons intégrées déjà correspondaient à trois espèces de séries que nous savions sommer. Nous avons sommé postérieurement ([2]) une nouvelle espèce de séries, et nous nous proposons, dans le présent travail, d'intégrer, sous forme finie, l'espèce correspondante d'équations différentielles linéaires, laquelle constituera pour nous la quatrième espèce, dans le

([1]) *Journal de Mathématiques*, année 1880, p. 27.

([2]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 7 avril 1879.

genre des équations différentielles linéaires qui présentent une équation dérivée régulière.

2. Les équations différentielles linéaires de cette quatrième espèce sont des équations différentielles linéaires sans second membre, d'ordre quelconque, à coefficients variables, et relatives chacune à une seule fonction Y d'une seule variable indépendante x; elles possèdent une équation dérivée régulière; et l'espèce qu'elles constituent est caractérisée par la forme de $F(n)$ que définit l'égalité

$$F(n) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)f(n)},$$

dans laquelle p est un nombre quelconque, positif ou négatif, mais non pas entier; et où $f(n)$ représente un polynôme quelconque, entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n.

Ces équations s'intègrent, sous forme finie, à l'aide de fonctions algébriques rationnelles et d'expressions irrationnelles de la forme $(1-ax)^p$. Pour les intégrer, nous allons nous reporter au Mémoire que nous avons rappelé en commençant, Mémoire dont nous ne faisons, pour ainsi dire, dans le présent travail, qu'une simple application, en en conservant, sans modification aucune, toutes les définitions et toutes les notations.

3. Nous reportant donc à ce premier Mémoire, nous y trouvons, au paragraphe **6** (¹), la formule

$$Y = X + \sum_{\nu-k+1}^{\infty}{}_n \frac{v_n}{n!F(n)}x^n,$$

où ν et k sont des entiers déterminés, où v_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, et où X représente un polynôme en x, très facile à former, qui s'annule lorsqu'on a

$$k = \nu + 1.$$

(¹) *Journal de Mathématiques,* année 1880, p. 32.

Cette formule donne, à l'aide d'une série, une intégrale de l'équation différentielle linéaire qu'on se propose d'intégrer; et cette intégrale en est d'ordinaire l'intégrale générale; car, dans la plupart des cas, X et v_n contiennent un nombre de constantes distinctes juste égal à l'ordre de l'équation différentielle linéaire considérée.

Si nous remplaçons, dans cette formule, $F(n)$ par son expression (2), nous trouvons l'égalité

$$Y = X + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots n} f(n) v_n x^n,$$

que nous pouvons écrire encore

$$Y = X_1 + \sum_{0}^{\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots n} u_n x^n,$$

en désignant par X_1 un polynôme entier en x dont le mode de formation, à l'aide de X et de la série, se voit immédiatement, et par u_n le produit $f(n)\,v_n$, lequel constitue, tout aussi bien que v_n, le terme général d'une série récurrente proprement dite.

4. L'intégration, sous forme finie, que nous nous proposons d'effectuer, est ramenée ainsi à la sommation de la série dont le terme général U_n est donné par l'égalité

$$U_n = \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots n} u_n x^n.$$

Or nous savons sommer une pareille série. En effet, si nous considérons l'équation génératrice de la série récurrente dont u_n est le terme général, et que nous désignions par a l'une quelconque de ses racines et par α le degré de multiplicité de a, nous avons identiquement, en représentant par $\xi_a(n)$ un polynôme entier en n, du degré $\alpha - 1$, et en étendant le Σ à toutes les racines de l'équation génératrice,

$$u_n = \sum \xi_a(n) a^n.$$

Cela étant, nous avons récemment (¹) annoncé que si, partant de l'égalité donnée

$$\xi_a(n) = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_{\alpha-1} n^{\alpha-1},$$

l'on pose

$$Q_{a,h} = \frac{p(p+1)\ldots(p+h-1)}{1.2\ldots h}(A_h \Delta^h 0^h + A_{h+1} \Delta^h 0^{h+1} + \ldots + A_{\alpha-1} \Delta^h 0^{\alpha-1})$$

et que l'on appelle S la somme de la série considérée, on a, en étendant encore le Σ dépourvu d'indices à toutes les racines de l'équation génératrice,

$$S = \sum \sum_h^{\alpha-1}{}_{0} Q_{a,h} a^h x^h (1 - ax)^{-p-h}.$$

5. Portant cette expression de S dans la dernière formule (**3**) qui nous donne Y, nous trouvons la formule nouvelle

$$Y = X_1 + \sum \sum_h^{\alpha-1}{}_{0} Q_{a,h} a^h x^h (1 - ax)^{-p-h},$$

qui nous donne, sous forme finie, l'intégrale des équations différentielles linéaires de notre quatrième espèce.

Comme nous l'avons dit (**3**), cette intégrale est d'ordinaire l'intégrale générale. Il suffit de la considérer pour constater qu'elle ne contient que des fonctions algébriques rationnelles et des expressions irrationnelles de la forme $(1 - ax)^p$.

Il est d'ailleurs bien clair que ce mode d'intégration est aussi simple et aussi pratique que ceux que nous avons donnés dans notre premier Mémoire. Il nécessite, comme les deux derniers de ceux-ci, auxquels il est fort analogue, la résolution préalable de l'équation que nous avons appelée *équation caractéristique*. Pour en bien faire comprendre la simplicité et la commodité, nous allons l'appliquer à l'intégration d'une équation différentielle linéaire donnée.

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 7 avril 1879.

6. Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(2x^2 - 3x + 1)\frac{d^2Y}{dx^2} + \left(\frac{16}{3}x - 4\right)\frac{dY}{dx} + \frac{8}{9}Y = 0.$$

Elle appartient à notre quatrième espèce, car son équation dérivée, pouvant s'écrire

$$\frac{Y_0^{(n)}}{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-1)} - 3\frac{Y_0^{n-1}}{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-2)} + 2\frac{Y_0^{n-2}}{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-3)} = 0,$$

est régulière et montre que l'on a

$$F(n) = \frac{1}{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-1)}.$$

Donc, nous avons immédiatement (3)

$$Y = X + \sum_{\nu-k+1}^{\infty}{}_n \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-1)}{1.2\ldots n} v_n x^n,$$

v_n étant le terme général d'une série récurrente proprement dite, qui admet l'équation génératrice

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Cette équation génératrice ayant pour racines les nombres 1 et 2, nous pouvons, en désignant par C_1 et C_2 deux constantes arbitraires, écrire l'égalité

$$v_n = C_1 1^n + C_2 2^n.$$

De plus, dans l'exemple actuel, les nombres ν et k, définis comme dans notre premier Mémoire, ont pour valeurs respectives 1 et 2.

Donc, d'après ce que nous avons dit (3), le polynôme X disparaît, et il vient

$$Y = \sum_0^\infty {}_n \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-1)}{1.2\ldots n}(C_1 1^n + C_2 2^n)x^n.$$

La série qui figure au second membre de cette égalité se peut sommer sans même qu'on soit obligé de recourir à la formule générale que nous avons donnée (4). On a, en effet, immédiatement

$$Y = C_1 \sum_0^\infty {}_n \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-1)}{1.2\ldots n} x^n + C_2 \sum_0^\infty \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)\ldots(\frac{1}{3}+n-1)}{1.2\ldots n}(2x)^n;$$

et l'on tire de là

$$Y = \frac{C_1}{\sqrt[3]{1-x}} + \frac{C_2}{\sqrt[3]{1-2x}}.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire considérée.