

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

P.-A. CORNAGLIA

**De la propagation verticale des ondes dans les liquides**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 3<sup>e</sup> série*, tome 7 (1881), p. 289-340.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1881\\_3\\_7\\_289\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7_289_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*De la propagation verticale des ondes dans les liquides ;***PAR M. P.-A. CORNAGLIA,**Ingénieur en chef du Génie civil,  
Ancien élève de l'École nationale des Ponts et Chaussées de Paris.

## I.

1. Soit une masse liquide en agitation, uniquement par l'effet du mouvement des ondes produites dans cette masse par le vent, ou par toute autre cause qui agisse d'une manière analogue.

Avant tout, de nombreux faits d'observation prouvent positivement que l'agitation, en certaines circonstances, se propage à des profondeurs considérables.

Il suffit de citer l'exemple du banc de Terre-Neuve, dont la réaction sur les ondes est très sensible aux bâtiments qui s'en approchent, bien qu'il se trouve de 80<sup>m</sup> à 160<sup>m</sup> au-dessous de la surface de la mer.

Ce fait démontre que l'agitation sur le banc doit être bien puissante pour produire des effets sensibles à travers une colonne liquide de si grande hauteur, et qu'elle doit s'étendre encore bien plus bas.

Par contre, l'agitation devient insensible à une certaine profondeur.

Les matières extraites au moyen de la sonde prouvent que les plus terribles tempêtes de l'Atlantique n'ont pas la force de produire sur le fond, le long du plan de pose du télégraphe, une ondulation suffisante

pour corroder les organismes très délicats qui y sont déposés, ni de les transporter aux alentours, ni même d'y mêler des grains de sable, si fins qu'ils soient (1).

Quelquefois l'agitation devient insensible à des profondeurs beaucoup moins grandes

Les plongeurs sont d'accord pour affirmer que d'ordinaire, à des profondeurs peu considérables, la mer reste sensiblement calme au fond, bien qu'elle soit très agitée à la surface.

Non loin des côtes, et par conséquent à des profondeurs moyennes, mais assez grandes encore pour qu'on ne puisse pas y jeter l'ancre, les navires peuvent tenir suffisamment bien, pendant une nuit entière de gros temps, sur une ancre flottante, descendue à la profondeur d'une centaine de brasses au moins.

L'ancre flottante est formée par une croix de Saint-André sur laquelle on étend fortement une voile; on la suspend à un grelin attaché aux quatre extrémités de la croix.

Ce mode de mouillage ne tient plus si l'on descend cette ancre à peu de mètres seulement de profondeur.

La différence de pression sur les deux faces de l'ancre est toujours égale au poids de l'eau déplacée, quelle que soit la profondeur à laquelle l'ancre se trouve; d'autre part, les résistances du navire et de l'ancre flottante dans la direction de leur câble d'union sont opposées l'une à l'autre, et respectivement proportionnelles au carré de leur vitesse relative par rapport au liquide en contact dans cette même direction; on doit conclure de là que, dans ces conditions, l'ancre se trouve dans un liquide ambiant assez tranquille pour pouvoir tenir.

Quelles que soient du reste les causes par lesquelles l'agitation se propage plus ou moins profondément, d'après les faits qu'on vient de citer, elle ne s'étend donc pas au delà d'une certaine limite; et cette limite, contrairement à l'opinion de quelques-uns qui ont voulu trop généraliser certains faits d'observation, n'est pas absolue, mais variable selon les circonstances dans lesquelles l'agitation se produit.

Et comme l'action d'une force s'affaiblit en se transmettant, il s'ensuit que l'agitation doit aller toujours en diminuant d'une manière

---

(1) MAURY, *Géographie physique de la mer.*

continue, quelle qu'en soit la loi, à mesure que de la surface on descend vers la limite où elle cesse tout à fait.

On peut représenter cette limite par un plan horizontal, si le fond lui-même est horizontal, et si les ondes sont égales entre elles; c'est ce qu'on doit supposer quand on se propose uniquement d'étudier la propagation du mouvement dans la direction verticale.

D'ailleurs, si des causes exceptionnelles n'interviennent pas, l'observation fait voir qu'une onde, dans un bref trajet, conserve très approximativement la même forme et la même vitesse; et que les ondes qui lui sont immédiatement adjacentes lui sont aussi très approximativement égales, au point qu'on peut les regarder toutes comme telles, et comme animées d'une vitesse uniforme.

Or, dans le plan de la section droite des ondes; les verticales comprises entre la surface du liquide et la limite de l'agitation sont d'autant plus longues que du point le plus bas de l'onde on va vers son sommet, et *vice versa*, elles sont d'autant plus courtes à mesure que du sommet on s'approche du point le plus bas suivant.

Par suite, pendant le passage de l'onde, chacune de ses verticales subit successivement toutes les phases de longueur de toutes les autres comprises entre les deux extrémités de l'onde.

Et comme l'observation montre encore que le liquide ne possède pas un vrai mouvement de translation continu, mais un mouvement apparent dans le sens de l'avancement des ondes; comme, d'autre part, le liquide est continu et incompressible (1), et qu'aucune molécule située au-dessus de la limite d'agitation ne le dépasse jamais pour venir se mêler avec celles qui se trouvent en dessous, et *vice versa*, il s'ensuit que l'afflux de liquide vers le sommet de l'onde doit s'opérer moyennant un écoulement correspondant des creux adjacents, et inversement.

L'observation enseigne encore que dans le mouvement des molécules il n'y a pas de confusion : s'il en était autrement, elles s'embarasseraient l'une l'autre, et bientôt le mouvement cesserait; tandis que les faits démontrent, au contraire, que les ondulations se propagent dans la direction horizontale à de très grandes distances sans diminuer

---

(1) *Incompressible* dans le sens entendu par les physiciens, c'est-à-dire qu'il ne change sensiblement de volume que sous d'énormes différences de pression.

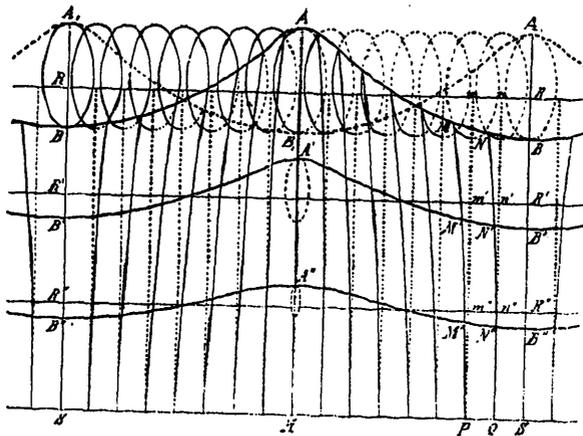
beaucoup de grandeur, s'il n'intervient pas d'autres causes, et que sur le même point elles durent encore longtemps après la cessation de la cause qui les a produites.

De tout cela il faut conclure que les molécules oscillent entre certaines limites, aussi bien dans la direction verticale que dans l'horizontale, et que les oscillations vont toujours en diminuant à mesure que les molécules se trouvent à une plus grande distance de la surface du liquide.

2. Le colonel Emy a expliqué très plausiblement tout ce mécanisme des ondes de la manière suivante :

Soit d'abord une masse liquide en repos avec la surface en RR; divisons (fig. 1) cette masse en un certain nombre de tranches PmnQ

Fig. 1.



par des plans verticaux Pm, Qn normaux à la direction du mouvement de translation des ondes qui se produisent les unes à la suite des autres.

Lors du passage d'une onde, chaque tranche, de volume constant, s'allonge continuellement dans la période montante de l'onde, à partir du point plus bas B jusqu'au sommet A; et *vice versa*, dans la période descendante, elle se raccourcit continuellement à partir du sommet A, jusqu'au point le plus bas B suivant.

Le volume des tranches ne variant pas, la forme doit varier; par conséquent, l'allongement et le raccourcissement suivant la direction

verticale se produiront au moyen d'un amincissement et d'un gonflement correspondant suivant la direction horizontale.

En outre, comme à sa base PQ, située dans la surface limite de l'agitation SS, chaque tranche doit rester telle qu'elle était lorsque le liquide était en repos, c'est-à-dire à la même position et de la même largeur, il s'ensuit que les allongements et les raccourcissements dans une direction, et les amincissements et gonflements correspondants dans l'autre direction, bien que produits sur toute l'étendue des tranches, ne pourront cependant pas être uniformes, et seront d'autant plus grands qu'ils seront plus éloignés de la limite d'agitation.

Dès lors, les tranches qui doivent toujours se juxtaposer exactement entre elles, en vertu de la continuité du liquide, viendront à s'incliner, et, selon leur degré d'amincissement ou de gonflement dans les divers points, se courberont suivant PMNQ, convergeront vers le sommet de l'onde et divergeront de son point le plus bas, de sorte que le déplacement vertical des molécules produit sur elles-mêmes un déplacement horizontal.

Ces déplacements diminuent tous au fur et à mesure qu'ils s'éloignent de la surface, de telle sorte que l'agitation diminue aussi jusqu'à sa limite.

De tout cela il résulte encore :

1° Que les couches horizontales R'R' du liquide en repos se gonflent pendant le mouvement dans leur milieu et s'amincissent à leurs extrémités, de sorte qu'elles viennent à se plier suivant une courbe B'A'B' qui représente l'onde interne correspondante au niveau primitif R'R' ;

2° Que les molécules situées sur la même verticale Pm dans le liquide en repos viennent dans le mouvement à se disposer sur une autre courbe PM, qui passe par le pied P de la verticale dans la limite de l'agitation, et qui converge vers le sommet et diverge du point le plus bas de l'onde.

Les molécules se trouveront donc au point d'intersection des courbes respectives des deux systèmes différents.

Et comme, dans le passage d'une onde entière, chaque tranche passe successivement par toutes les formes que prend le nombre infini de tranches dans lequel on peut imaginer divisée la masse liquide, il s'ensuit que la suite de tous les points d'intersection d'une même onde

interne, rapportés à la même verticale, représentera les trajectoires des molécules situées au même niveau dans le liquide en repos, ou bien sur la même onde interne lorsque le liquide est en mouvement.

De plus, si l'onde suivante est égale à celle que l'on considère, comme on l'a supposé, puisque leurs tranches correspondantes sont identiques dans toutes les deux, il s'ensuit que la même molécule devra se trouver périodiquement, à l'intervalle d'une onde entière, précisément à la même position qu'auparavant, et sa trajectoire, dans ces conditions, sera une courbe fermée.

Les axes horizontal et vertical de cette orbite indiqueront les limites des oscillations des molécules dans ces directions.

Mais les molécules situées sur une même verticale dans le liquide en repos doivent toutes se mouvoir, au même moment, dans des conditions analogues : quand l'une d'elles s'élève, par exemple, toutes les autres, jusqu'à la limite de l'agitation, s'élèvent aussi, quoique en différente mesure, et toutes passent au même instant par les mêmes particularités du mouvement.

Par conséquent, les ondes internes et l'onde visible, suivant lesquelles se disposent les molécules qui sont au même niveau dans le liquide en repos, et les orbites décrites par les molécules situées sur la même verticale dans le liquide en repos, doivent être toutes des courbes synchrones, quelle que soit la loi de propagation du mouvement dans la direction verticale.

En d'autres termes, les ondes internes ont la même amplitude et sont disposées de la même manière que l'onde visible, tout en diminuant de hauteur à mesure qu'elles se trouvent plus bas, et les orbites, dont la forme est en corrélation avec celle des ondes, sont décrites en temps égaux, bien qu'elles deviennent de plus en plus petites à mesure qu'elles se trouvent à des profondeurs plus grandes.

**3.** Tout cela est parfaitement d'accord avec les phénomènes que l'on observe dans la nature.

En effet, lorsque la mer est suffisamment agitée et que les eaux sont claires, s'il s'y trouve des corps en suspension, des brins d'algue par exemple, on aperçoit que les corps situés sur la même verticale ont tous au même instant un mouvement vers le large quand ils se

trouvent dans le creux de l'onde, et vers la rive, quand ils se trouvent au contraire sur le dos, c'est-à-dire dans le flot, abstraction faite de la grandeur des mouvements qui sont plus prononcés vers la partie supérieure.

On ressent les mêmes effets quand on se livre à l'exercice de la natation, surtout quand on se tient debout sans faire aucun mouvement, et si l'on se trouve à une profondeur à peu près égale à la hauteur de la personne.

Évidemment, cela n'arriverait pas si à toutes les profondeurs les agitations n'étaient pas synchrones.

4. D'après cela, et quoi qu'il en soit de l'explication donnée des différents phénomènes naturels qu'on a cités, il est incontestable que le mouvement vertical des molécules y produit un mouvement horizontal correspondant.

Il s'agit de déterminer ces divers mouvements.

A ce sujet, il est à noter que les méthodes générales de la science abstraite et pure, rigoureusement suivies jusqu'à présent sur cette matière, n'ont pas encore permis d'arriver à des résultats d'un usage vraiment pratique; et cela à cause du caractère des expressions algébriques auxquelles on parvient : ce qui leur a fait donner par Lagrange le nom de *rebelles*.

Dans cet état de choses, l'ingénieur, dans les questions d'art, se trouve abandonné à ses propres appréciations, lesquelles sont plus ou moins justes, selon que ses observations sont plus ou moins complètes et exactes, et ses déductions plus ou moins légitimes.

De là les interminables discussions qui sont pour ainsi dire une caractéristique des questions de travaux maritimes. C'est pourquoi, ayant essentiellement en vue de donner des règles qui soient au moins suffisantes à l'ingénieur pour ses applications, on suivra une méthode spéciale : à l'aide des faits constatés par l'observation, on suivra pas à pas et de près le phénomène, en appliquant séparément les principes à mesure que l'on verra se présenter de nouvelles circonstances pouvant exercer une influence sur son développement, et en laissant de côté tout ce qui compliquerait inutilement les procédés et les résultats analytiques.

## II.

5. Si l'on connaissait les forces qui les produisent, on obtiendrait directement la détermination des mouvements cherchés.

Or, à ce propos, on doit noter que chaque effet est proportionné à la cause qui le produit et *vice versa* ; de sorte que, par les données de l'onde elle-même, qui est un effet, on peut en apprécier la cause, c'est-à-dire l'intensité et la direction de la force qui produit cette onde, ou qui est capable de la produire, en même temps qu'elle est capable d'engendrer les divers mouvements qui se développent dans la masse liquide

Ceci posé, un point quelconque d'une masse liquide dans les conditions d'agitation énoncées plus haut se trouve simultanément soumis :

1° A l'action produite par le déplacement de cette protubérance de liquide qui forme l'onde visible ;

2° A la réaction des molécules qui l'environnent dans leurs mouvements. Dans la réaction des molécules sont compris les effets du frottement dû à la viscosité ; mais comme, d'après ce qu'on a dit, les faits démontrent que la diminution de l'agitation est très lente par rapport au temps et à la distance, on peut négliger le frottement dû à la viscosité du liquide, et restreindre cette réaction à l'impulsion ou à l'empêchement réciproque que les molécules en mouvement exercent, à cause de la différence de leurs vitesses.

Du reste, notre but n'est pas d'étudier comment l'agitation augmente ou diminue avec le temps et la distance, mais de rechercher quels sont les effets produits dans l'intérieur d'une masse liquide par l'agitation que l'on observe à la surface, au même moment et en des points voisins de celui où l'on fait l'observation.

6. Que l'on rapporte la masse liquide à des systèmes d'axes de coordonnées placés dans le plan de la section droite de l'onde :

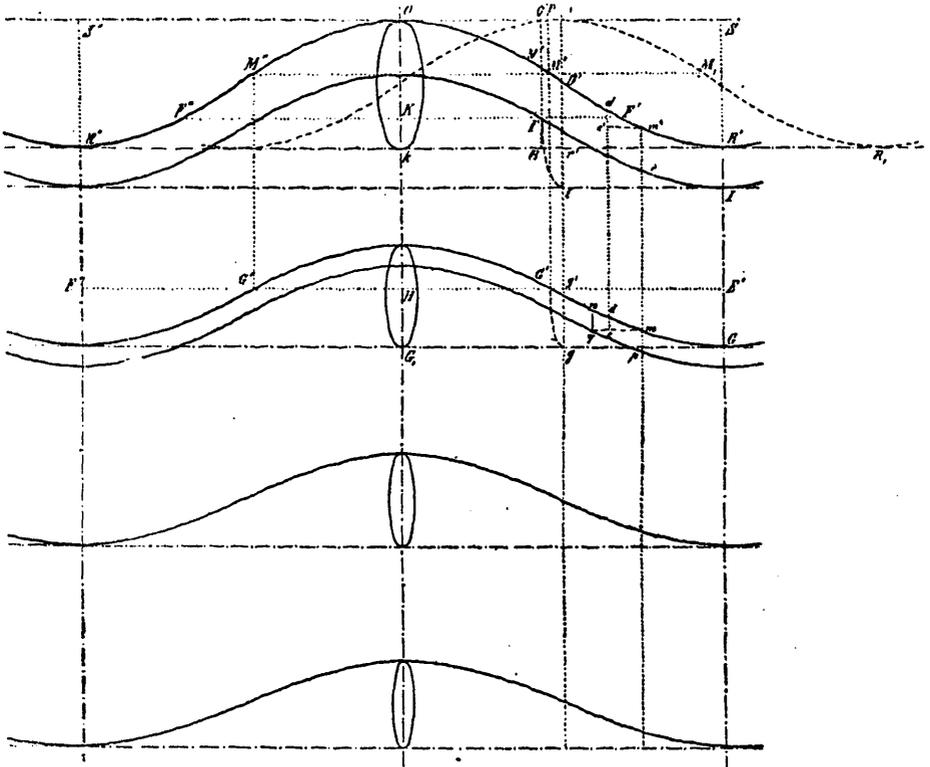
Les axes des abscisses ( $x$ ) seront horizontaux, et positifs de gauche à droite, sens dans lequel on supposera que l'onde se déplace ;

Les axes des ordonnées ( $y$ ) seront verticaux, et positifs de bas en haut.

Pendant le mouvement de l'onde, chaque point de la masse liquide viendra successivement traverser la verticale  $R'S'$  (*fig. 2*) qui passe par le point le plus bas de l'onde.

Soit  $p$  la profondeur du point quelconque que l'on considère, au-

Fig. 2.



dessous du point le plus bas  $R'$  de la surface du liquide.

Fixons dans cette position les axes des coordonnées du point; et soient par rapport à eux, au bout du temps  $t$ ,

$x, y$  les coordonnées du point;

$u, v$  les composantes de sa vitesse;

$z$  la hauteur de la colonne liquide au-dessus de ce point, c'est-à-dire la longueur de la verticale comprise entre le point et la surface du liquide.

Soient encore :

Y l'ordonnée correspondante à  $p = 0$ , c'est-à-dire celle du point qui se trouve à la surface du liquide ;

U, V les composantes de sa vitesse.

Appelons encore, pour les deux branches montante et descendante de l'onde,

A la hauteur de l'onde visible, c'est-à-dire la différence de niveau entre son sommet et les points les plus bas des creux adjacents ;

L la demi-amplitude de l'onde, c'est-à-dire la distance des verticales qui passent, l'une par son sommet et les autres par les points plus bas susdits ;

T le temps du passage d'une onde entière ;

W sa vitesse de translation suivant la direction horizontale.

7. Du moment que, comme on l'a dit, le mouvement de translation de l'onde en direction horizontale peut être regardé comme uniforme sur un bref trajet, on aura

$$W = \frac{2L}{T}.$$

Après le temps  $t$ , l'onde qui, à l'origine du temps T, se trouvait en OM'R', se sera transportée en s'M, R, par rapport à la verticale R'S' fixe de position ; ou, ce qui revient au même, la verticale R'S' viendra en r's' par rapport à l'onde OM'R' ; son point G se trouvera en g, au point de rencontre de la verticale r's' avec l'horizontale Gg ; et la molécule de liquide qui était en G se trouvera en G', à la distance  $x$  de la verticale r's', et à la distance  $y$  de l'horizontale Gg ;  $x, y$  étant les coordonnées de la molécule G' par rapport aux axes ayant leur origine en g.

Maintenant, sur la verticale qui passe par le sommet de l'onde, et en G, à la même hauteur que le point G, c'est-à-dire à la profondeur  $p$  sous l'horizontale menée par R', plaçons l'origine d'un autre système d'axes coordonnés qui se déplacent avec l'onde, c'est-à-dire qui aient le même mouvement de translation en direction horizontale ; l'axe des abscisses (X) sera horizontal et positif de gauche à droite ; l'axe des

ordonnées ( $y$ ) sera vertical et positif de bas en haut: par rapport à ces axes les coordonnées du point  $G'$  seront

$$\begin{aligned} \text{abscisse } L - Wt + x &= X; \\ \text{ordonnée } y &\text{ ou } Y \end{aligned}$$

si le point correspond à  $p = 0$ .

La suite, à un instant donné, de tous les points ayant pour coordonnées courantes  $X, Y$  constitue la courbe de l'onde visible dans la position qu'elle occupe dans cet instant.

En général, l'ordonnée  $y = gg'$  du point  $G'$  correspond à l'abscisse  $x = g'G'$  qui, à son tour, correspond au temps  $t = \frac{g'E'}{W}$ . Par suite, si à l'extrémité de l'abscisse

$$HG' = HE' - E'g' - g'G' = L - Wt + x = X,$$

qui correspond au même temps  $t$  que l'abscisse  $x$ , on porte l'ordonnée de la trajectoire du point

$$y = f(x),$$

on aura le lieu géométrique des positions que le point viendra prendre successivement par rapport à l'onde pendant tout le temps  $T$ ; ou encore la courbe sur laquelle, à un instant donné, se trouveront tous les points situés dans les mêmes conditions de profondeur que le point que l'on considère; en d'autres termes, on aura la courbe qui représente la forme de l'onde dans l'intérieur de la masse liquide, ou plus simplement la courbe de l'onde interne,

$$y = F(L - Wt + x) = F(X),$$

correspondante à une profondeur déterminée  $p$ , et rapportée aux axes de coordonnées ayant leur origine en  $G_1$ .

En y faisant  $p = 0$ , ce qui entraîne  $y = Y$ , on aura la courbe de l'onde visible

$$Y = F'(X).$$

Or, l'observation montre que, dans le mouvement des ondes, les

déplacements des molécules dans la direction horizontale sont toujours très petits en comparaison de la demi-amplitude de l'onde et des espaces parcourus par celle-ci.

C'est pourquoi l'on peut négliger le terme  $x$  en comparaison des deux autres  $L$  et  $Wt$ , prendre simplement  $X = L - Wt$  pour l'abscisse du point  $G'$ , et écrire

$$\gamma = F(L - Wt).$$

Les fonctions qui représentent la trajectoire du point et la courbe de l'onde interne sur laquelle il se trouve ont des valeurs égales pour des valeurs déterminées de  $x$  et de  $X$  correspondantes au même instant  $t$ ; mais la première  $y = f(x)$  est rapportée aux axes dont l'origine est en  $g$ , mobile par rapport à l'onde considérée comme fixe; tandis que l'autre  $\gamma = F(X)$  est rapportée aux axes dont l'origine est en  $G$ , fixe par rapport à l'onde qui se déplace.

On aura par conséquent encore

$$z = p + Y - y.$$

8. Soient maintenant  $mn$ ,  $pq$  les courbes de deux ondes internes consécutives, correspondantes respectivement aux profondeurs  $p$  et  $p + dp$ ; la hauteur  $z = mm'$  peut prendre deux accroissements divers selon que le temps varie, ou la profondeur.

Le premier accroissement  $\frac{dz}{dX} dX$  se compose de deux termes, relatifs, l'un  $cd = \frac{dy}{dX} dX$  à l'onde interne, l'autre  $c'd' = \frac{dY}{dX} dX$  à l'onde visible; ils correspondent tous les deux à l'accroissement

$$mc = m'c' = dX = -W dt,$$

puisque l'on a la relation  $X = L - Wt$ .

Cet accroissement  $\frac{dz}{dX} dX$  se rapporte à deux points divers  $m$ ,  $d$ , qui se succèdent immédiatement à la distance horizontale  $dX$  sur la même onde, ou bien au même point  $m$  à l'intervalle de temps  $dt$ .

Le second accroissement  $mp = \frac{dz}{dp} dp$  se rapporte à deux points  $m$ ,

$p$ , qui se suivent immédiatement au même instant sur la même verticale à l'intervalle  $dz$  en rapport avec l'accroissement  $dp$ .

A l'accroissement  $\frac{dz}{dp} dp$ , qui représente à un instant donné, ou bien à une abscisse donnée, l'intervalle en direction verticale de deux ondes internes consécutives, correspond l'accroissement  $mq$  qui représente, dans le même instant, l'intervalle des deux mêmes ondes en direction horizontale; ou encore représente la distance de deux points sur deux ondes internes consécutives, lesquels à un instant donné se trouvent à la même hauteur.

Appelons, pour abrégé,

$d'z$  l'accroissement  $mp = \frac{dz}{dp} dp$ , afin de le distinguer de l'autre  $\frac{dz}{dX} dX$  que l'on désignera simplement par  $dz$ ;

$d'X$  l'accroissement  $mq$ , pour le distinguer de l'autre  $mc = dX$ .

9. Venons à l'examen de l'action produite par le déplacement de l'onde visible, et considérons un point quelconque  $G'$  au-dessous de l'horizontale qui passe par le point le plus bas de l'onde.

Par l'effet de la gravité et de la réaction du fond, les molécules en  $H$ ,  $G'$ ,  $E'$ , sur la même horizontale, se trouveront d'abord respectivement soumises aux pressions hydrostatiques, qui ont pour mesure la hauteur des colonnes liquides  $OH$ ,  $M'G'$  et  $E'R'$ , si la densité du liquide est égale à l'unité, comme on le supposera, et comme cela arrive approximativement pour l'eau.

De plus, en vertu de l'égalité de pression en tous sens que possèdent les liquides, ces pressions s'exerceront aussi suivant l'horizontale  $HE'$ , de sorte que dans cette direction la molécule en  $G'$  se trouvera en même temps soumise à la même pression  $M'G'$  dans les deux sens opposés  $G'H$  et  $G'E'$ .

Or, si l'on considère deux molécules consécutives quelconques sur la même horizontale, à cause de la continuité et de l'incompressibilité du liquide, la pression analogue  $M'G'$  à laquelle se trouve soumise chacune des deux molécules se transmettra à l'autre; les pressions d'une molécule vers l'autre étant opposées se détruiront réciproquement pour la partie commune à toutes les deux, et finalement l'une des molécules

poussera ou tirera l'autre avec son excès de pression et dans le sens de cet excès.

Ces excès de pression, par le même motif de la continuité et de l'incompressibilité du liquide, se transmettront d'une molécule à l'autre, de sorte qu'en dernier lieu la molécule en  $G'$  se trouvera soumise au maximum de l'excès de pression qui puisse se déterminer sur l'horizontale  $HE'$ , et par conséquent se trouvera d'un côté soumise à l'excès de pression  $OH - G'M'$ , et de l'autre à l'excès de pression  $M'G' - E'R'$ .

Toujours encore à cause de la propriété de l'égalité de pression dans tous les sens que les liquides possèdent, ces excès de pression s'exerceront tant en direction horizontale  $HE'$  qu'en direction verticale  $G'M'$ .

En tout donc, la molécule en  $G'$  se trouvera soumise dans le sens positif de l'axe des  $y$  à l'excès de pression

$$(OH - G'M') - (M'G' - E'R') = M'P' - (R'S' - M'P') = A - 2Y_M.$$

expression dans laquelle  $Y_M$  représente l'ordonnée de la courbe de l'onde visible correspondante à l'abscisse  $L - Wt + x$ , à laquelle ordonnée, comme on l'a déjà vu, on peut substituer l'ordonnée  $Y_D$ , ou simplement  $Y$  du point  $D'$  correspondant à l'abscisse  $L - Wt$ .

Alors l'excès de pression auquel se trouve soumise la molécule en  $G'$  en direction verticale aura pour valeur  $A - 2Y$ , et représentera la charge, c'est-à-dire l'effort auquel la molécule obéit pour aller reprendre sa position de repos; ou bien encore l'effort qui, en ce point, tend à ramener le liquide à niveau.

Il en sera de même pour tout autre point comme  $G''$  de l'autre côté de la verticale qui passe par le sommet de l'onde, et comme la hauteur de l'onde, d'après ce qu'on a dit, peut être considérée comme la même des deux côtés de cette verticale, il s'ensuit que, pour toutes les molécules situées au-dessous de l'horizontale qui passe par le point le plus bas de l'onde, la charge à laquelle elles se trouveront soumises en direction verticale aura pour valeur  $A - 2Y$ .

De même, pour chaque molécule  $I'$  située au-dessus de l'horizontale qui passe par le point le plus bas de l'onde, l'excès de pression auquel elle se trouvera soumise dans le sens positif de l'axe des  $y$  aura pour valeur

$$(OK - I'N') - N'B;$$

on retranche N'B, parce que, la pression produite dépendant uniquement de la colonne liquide sur la verticale qui passe par I', la molécule est soumise par en haut à la pression I'N', et par en bas au manque de pression I'B, puisque la colonne I'B se trouve sans contraste; en d'autres termes, le point I', à cet égard, suivra les mouvements du point B, qui se trouve soumis à l'action de la colonne la plus grande.

Or

$$(OK - I'N') - N'B = Ok - BN' - N'B = A - 2Y,$$

c'est-à-dire la même expression que pour les points G', G''.

Cette expression se réduit .

$$\text{Pour } Y = \frac{A}{2} \text{ à} \dots\dots\dots 0,$$

$$\text{Pour } Y = 0 \text{ à} \dots\dots\dots + A,$$

$$\text{Pour } Y = A \text{ à} \dots\dots\dots - A.$$

**10.** En raisonnant d'une manière semblable, dans le sens positif de l'axe des *x*, la molécule en G' est soumise à l'excès de pression

$$(OH - G'M') + (G'M' - E'R') = OH - E'R' = + A;$$

et, par analogie, la molécule en G'' sera soumise à l'excès de pression - A; ces excès de pression représentent la charge qui, en direction horizontale, tend à ramener les molécules à leur position de repos.

Si, au lieu des points comme G' et G'' au-dessous de l'horizontale passant par R', on considère les points comme I' qui se trouvent au-dessus, ces points se trouveront soumis à l'excès de pression

$$OK - I'N' + N'I' - (-I'B) = OK + I'B = Ok = + A,$$

et à l'excès de pression - A pour les points tels que I'', comme pour les points G', G''.

**11.** Ces charges cependant se modifient à cause du mouvement.

Quand une onde passe, les molécules appartenant au même niveau, c'est-à-dire à la même couche horizontale très mince dans le liquide en repos, viennent l'une après l'autre prendre la même position par rap-

port à l'onde interne ou visible sur laquelle elles se disposent dans le mouvement, de sorte que cette onde se transporte parallèlement à elle-même en direction horizontale, tandis que les molécules, après le passage d'une onde entière, viennent se trouver à la même position qu'auparavant; c'est ainsi qu'a lieu le mouvement apparent du liquide.

L'onde avançant par un mouvement rectiligne horizontal, chaque point de sa courbe effleure successivement toutes les molécules des couches très minces contiguës; car, en s'élevant et s'abaissant, elles se portent continuellement contre cette courbe à son passage, pour se disposer à leur tour sur l'onde respective à laquelle elles appartiennent.

Par conséquent, chaque point de cette courbe dans son mouvement de translation exerce une action sur les molécules effleurées.

Si, après cela, on considère un temps très court, les molécules effleurées se trouveront comprises dans un intervalle horizontal égal au trajet horizontal du point de la courbe, car dans cet intervalle elles parcourent toutes très approximativement le même espace horizontal.

Par suite, chacune de ces molécules éprouvera, pendant un instant, l'action du point de la courbe, et s'il s'agit d'un temps très court, elle éprouvera en moyenne, pendant tout ce temps, une action qui aura pour mesure l'action individuelle du point divisée par une quantité proportionnelle à son trajet horizontal dans le même temps, parce que cette action individuelle, qui reste constante pendant ce temps, se fait sentir également, et par conséquent se répartit uniformément sur toutes les molécules comprises dans ce trajet, et cela quelle que soit la direction suivant laquelle s'exerce l'action.

Nous disons *quantité proportionnelle à son trajet horizontal*, parce que, dans un intervalle donné, le nombre des molécules effleurées varie suivant l'inclinaison de la tangente à la courbe de l'onde.

Or une courbe n'est autre chose qu'une suite de points; par conséquent, l'action qu'un arc élémentaire de l'onde exerce sur une molécule pendant tout le temps de son passage auprès d'elle sera égale à la somme de l'action moyenne de tous ses points, action moyenne qui se fait sentir sur toutes les molécules comprises dans un trajet égal à la projection horizontale de cet arc élémentaire, parce que dans cet espace de temps tous les points de cet arc élémentaire, et pas d'autres, passent auprès des molécules.

D'autre part, plus l'inclinaison de la tangente à la courbe est grande, et plus l'arc élémentaire de la courbe dans un intervalle donné devient grand; et le nombre de ses points augmente précisément comme pour les molécules en contact.

Par conséquent, l'action ressentie, dans une direction déterminée et à un instant quelconque, par une molécule pendant le passage de l'onde en contact, sera égale à l'action totale exercée dans cette direction par l'arc élémentaire qui, dans cet instant, passe auprès de la molécule, divisée par la projection horizontale du même arc, ou plus généralement divisée par la projection de l'arc élémentaire considéré sur la direction du mouvement de translation de la courbe qui exerce sa propre action sur les molécules effleurées.

Et comme ces arcs se suivent immédiatement sans interruption ni superposition, l'action de l'onde sur la molécule sera continue; en outre, elle aura toujours la même valeur, quelle que soit la longueur de l'arc, pourvu qu'il soit très petit, parce que son action totale aussi bien que la projection sur laquelle se répartit cette action lui sont proportionnelles.

**12.** D'après ce qui précède, l'excès de pression verticale auquel, dans leur ensemble, se trouvent soumises les molécules disposées le long d'un arc élémentaire quelconque de l'onde interne ou visible, ayant pour projection horizontale  $dX$ , aura pour valeur  $(A - 2Y) dX$ , et cette expression indiquera aussi l'action verticale de l'arc élémentaire sur les molécules en contact.

Ensuite, par l'effet du déplacement de l'onde, l'action verticale de l'arc élémentaire sur les molécules effleurées en un point quelconque aura pour valeur

$$\frac{(A - 2Y) dX}{dX} = A - 2Y,$$

c'est-à-dire sera égale à l'excès de pression verticale auquel sont soumises les molécules dans cette direction.

Horizontalement, chaque arc élémentaire d'onde de hauteur  $dy$  et de projection horizontale  $dX$  subira dans cette direction un excès de pression  $A dy$ , et pendant son déplacement, l'onde exercera sur les molécules en contact l'action  $A \frac{dy}{dX}$ , abstraction faite du signe.

L'action  $A \frac{dy}{dX}$  s'exerce évidemment dans le même sens que l'excès de pression A, et par conséquent sera de même signe.

Or, les ondes internes doivent être comme l'onde visible, montantes et descendantes pendant les mêmes périodes; car, à cause de la prépondérance décisive de la composante verticale des forces sur la composante horizontale, ainsi que le révèle dans la nature la grande différence d'intensité des mouvements dans ces deux directions, cette composante verticale détermine principalement la forme des ondes.

D'autre part, comme la charge verticale a une valeur constante pour toutes les molécules situées au même instant sur la même verticale, l'allure générale des ondes doit être la même pour toutes, sauf la différence de leur grandeur qui se trouve en corrélation avec la plus ou moins grande réaction des molécules, selon les différents points de la masse liquide considérés.

Alors le  $\frac{dy}{dX}$ , dans la période montante, sera négatif, et *vice versa* sera positif dans la période descendante, c'est-à-dire se trouvera précisément de signe contraire à l'excès de pression A.

Par conséquent, l'action  $A \frac{dy}{dX}$  et l'excès de pression A devant avoir le même signe, on devra, dans tous les cas, adopter  $-A \frac{dy}{dX}$  pour expression de l'action horizontale des ondes sur les diverses molécules de la masse liquide.

La charge à laquelle se trouveront soumises toutes les molécules de la masse liquide en dépendance de la forme des ondes se trouvera donc modifiée de la manière suivante :

Dans la direction verticale  $A - 2Y$ ;

Dans la direction horizontale  $-A \frac{dy}{dX}$ .

**13.** Après avoir ainsi tenu compte des causes inhérentes à la forme des ondes, pour le reste, chaque effet, comme on l'a déjà dit, étant proportionné à la cause qui le produit, et *vice versa*, on pourra regarder la force qui anime chaque molécule de la masse liquide par l'effet du déplacement de l'onde visible, comme proportionnelle aux susdites

charges modifiées, c'est-à-dire l'égaliser à

$\alpha(A - 2Y)$  dans la direction verticale;

$-\alpha A \frac{dy}{dx}$  dans la direction horizontale.

La quantité  $\alpha$  doit être la même pour les deux charges, car autrement le principe de l'égalité de pression dans tous les sens, dont elles sont déduites, ne se trouverait plus vérifié.

Cette quantité se déterminera d'après la condition que l'onde visible déduite des calculs ait la hauteur  $A$  observée, et qu'elle coïncide, dans chacun de ses points, avec la courbe de l'onde relevée, ou adoptée dans les tentatives de calcul.

**14.** Il est à remarquer qu'en se transmettant de la face verticale  $d'z$  à la face horizontale  $d'X$  d'un élément de liquide  $d'z \times d'X$ , les pressions exercées en direction verticale par les colonnes liquides  $OH$  et  $E'R'$  agissent toutes les deux dans un sens sur l'une des faces  $d'X$ , et dans le sens opposé sur l'autre, tandis que la colonne  $M'G'$ , au contraire, agit dans le même sens sur toutes les deux.

Par contre, en direction horizontale, les colonnes  $OH$  et  $E'R'$  agissent l'une dans un sens et l'autre dans le sens opposé sur les deux faces  $d'z$ , et la colonne  $M'G'$ , en transmettant la pression qui lui est due, agit dans un sens sur l'une des faces  $d'z$  et dans le sens contraire sur l'autre.

Par conséquent, les colonnes liquides  $OH$  et  $E'R'$  tendent à comprimer l'élément en direction horizontale et à le dilater en direction verticale, et *vice versa* la colonne  $M'G'$ , combinée avec la réaction du liquide qui se trouve au-dessous, tend à le comprimer en direction verticale et à le dilater en direction horizontale.

Par ces compressions et expansions, les tranches liquides verticales, dans lesquelles on peut imaginer divisée la masse liquide en repos, s'allongent et se raccourcissent verticalement pendant le passage de l'onde, et en correspondance s'amincissent et se gonflent horizontalement, et par suite se plient l'une sur l'autre, engendrant ainsi les divers mouvements des molécules.

**15.** Passant à la réaction des molécules, on a d'abord à observer

que, s'il n'intervient pas d'autres causes, tous les points de la masse liquide situés sur la même verticale devraient avoir, dans cette direction, la même vitesse, comme étant soumis à la même charge.

Au contraire, comme les faits le démontrent, l'agitation, qui n'est autre chose que du mouvement, diminue avec la profondeur, ce qui fait que ces points doivent avoir entre eux une vitesse verticale différente.

Quoi qu'il en soit, soit  $v$  la vitesse verticale à la profondeur  $z$  après le temps  $t$ , la vitesse dans la même direction et sur la même verticale, c'est-à-dire dans le même instant, à la profondeur  $z + d'z$ , sera

$$v + \frac{dv}{d'z} d'z;$$

la différence de ces vitesses, savoir la vitesse gagnée par le point inférieur par rapport au point supérieur, sera

$$\frac{dv}{d'z} d'z,$$

ou encore la colonne  $z$  aura, par rapport au point qui est au-dessous, la vitesse relative  $-\frac{dv}{d'z} d'z$ .

Avec cette vitesse relative, la colonne frappe le liquide qui est au-dessous d'elle ou bien l'aspire, et ainsi se produit cette mutuelle impulsion ou empêchement de mouvement qu'exercent les molécules, et qui forment leur réaction.

Pour la déterminer, il faut remarquer que, suivant la direction verticale, la colonne  $z$ , qui s'appuie sur la base  $d'X$  et a comme elle la vitesse  $v$ , possède la quantité de mouvement  $\frac{z d'X}{g} v$ .

De même, la colonne  $z + d'z$  possède la quantité de mouvement  $\frac{d'X}{g} (z + d'z) \left( v + \frac{dv}{d'z} d'z \right)$ , ou simplement  $\frac{z d'X}{g} \left( v + \frac{dv}{d'z} d'z \right)$ , parce que l'on peut négliger  $d'z$  en comparaison de  $z$ .

Par conséquent, dans l'intervalle de sa hauteur  $d'z$ , l'élément de masse  $\frac{d'X d'z}{g}$  se trouve avoir gagné dans l'unité de temps une quantité de mouvement égale à la différence des quantités de mouvement

communiquées respectivement à ses bases inférieure et supérieure, c'est-à-dire égale à

$$\frac{z d'X}{g} \left( v + \frac{dv}{d'z} d'z \right) - \frac{z d'X}{g} v = \frac{z d'X}{g} \times \frac{dv}{d'z} d'z,$$

expression qui, rapportée à l'unité de masse de l'élément, donne

$$\frac{z d'X}{g} \times \frac{dv}{d'z} d'z \times \frac{g}{d'X d'z} = z \frac{dv}{d'z},$$

et représente la valeur de la force à laquelle se trouve soumis l'élément par cette cause. Mais le coefficient différentiel d'une fonction ne change pas par le changement de grandeur de l'accroissement que l'on donne à la variable, pourvu que cet accroissement reste très petit. Et comme la distance  $d'z$  de deux ondes internes consécutives, qui à l'origine des temps se réduit à  $dp$ , peut se représenter par  $k dp$ ,  $k$  étant fonction du temps seulement, on pourra substituer  $\frac{dv}{dp}$  à  $\frac{dv}{d'z}$ , et de cette façon la réaction des molécules en direction verticale deviendra

$$z \frac{dv}{dp}.$$

**16.** La réaction des molécules en direction verticale a pour mesure la profondeur du point considéré dans l'endroit où il se trouve, multipliée par le coefficient différentiel de sa vitesse verticale par rapport à la profondeur.

Or, si l'on s'en tient à l'observation, la vitesse en direction verticale diminue à mesure que  $z$  augmente; par conséquent, à mesure que  $z$  augmente, la réaction des molécules croît d'un côté et diminue de l'autre.

D'autre part, la vitesse diminue avec la force actuelle, c'est-à-dire à mesure que diminue la résultante de toutes les forces, et comme la charge reste constante pour tous les points situés sur la même verticale, il advient en définitive que la réaction des molécules en direction verticale est opposée au mouvement et croît avec la profondeur; et le mouvement diminue en correspondance jusqu'à s'éteindre complètement.

17. Par analogie, pour la réaction des molécules en direction horizontale, si le même point situé à l'abscisse  $L - X$  a dans cette direction la vitesse  $u$ , le point situé au même instant sur la même horizontale à l'abscisse  $L - X + d'X$  aura dans cette direction la vitesse  $u + \frac{du}{d'X} d'X$ , et la vitesse relative du second point, par rapport au premier, sera

$$\frac{du}{d'X} d'X.$$

D'autre part, comme on l'a vu, de toutes les colonnes liquides qui agissent sur l'élément en direction horizontale, la colonne  $M'G'$  est la seule qui agisse dans un sens sur l'une des faces  $d'z$ , et dans le sens opposé sur l'autre.

La colonne  $M'G' = z$  est donc celle sans laquelle il n'y aurait pas de vitesse relative entre les deux points; par conséquent, la même colonne  $z$  qui règle la vitesse relative des faces  $d'X$  de l'élément règle aussi la vitesse relative des autres faces  $d'z$ , en exerçant sur toutes la même pression  $z$  par unité superficielle.

Et comme la pression de la colonne  $z$  sur la face  $d'z$  est  $z d'z$ , la réaction des molécules en direction horizontale rapportée à l'unité de masse aura une expression analogue à celle de la réaction en direction verticale,

$$\frac{du}{d'X} d'X \cdot z d'z \frac{1}{d'X d'z} = z \frac{du}{d'X} = z \frac{du}{d'X}.$$

### III.

18. Les équations du mouvement seront donc, dans la direction verticale,

$$\frac{dv}{dt} = \alpha(A - 2Y) + z \frac{dv}{dp},$$

et dans la direction horizontale,

$$\frac{du}{dt} = -\alpha A \frac{dy}{d'X} + z \frac{du}{d'X}.$$

Dans ces expressions, il n'est fait aucune distinction sur l'amplitude des branches montante et descendante de l'onde, parce que, les équations du mouvement ayant pour toutes les deux la même forme, il n'y a pas de raison pour qu'une branche doive être différente de l'autre.

19. Il reste à exprimer la condition de continuité.

Évidemment, si le liquide est continu et incompressible, un quelconque de ses éléments changera bien successivement de forme suivant les diverses positions qu'il occupera pendant le passage de l'onde, mais il ne changera jamais de volume.

Or, un point situé à la distance  $L - X$  de la verticale fixe R'E' dans le liquide en repos viendra se trouver à la distance  $L - X + x$  de cette même verticale dans le liquide en mouvement, puisque le point s'est déplacé de la quantité  $+x$  de sa propre verticale.

De même, un point placé à la distance

$$L - X + \frac{d(L - X)}{d\lambda} dX = L - X - dX,$$

dans le liquide en repos, se trouvera à la distance

$$L - X + x + \frac{d(L - X + x)}{dX} dX = L - X + x - dX + \frac{dx}{dX} dX,$$

dans le liquide en mouvement.

Par conséquent, la distance horizontale des deux points, qui dans le liquide en repos était

$$(L - X - dX) - (L - X) = -dX,$$

sera, dans le liquide en mouvement,

$$(L - X + x - dX + \frac{dx}{dX} dX) - (L - X + x) = -dX + \frac{dx}{dX} dX;$$

c'est à-dire que, dans le passage du repos au mouvement, la distance

—  $dX$  des deux points se trouvera augmentée de la quantité  $+\frac{dx}{dX}dX$ , ce qui du reste est évident.

Avec les éléments de largeur —  $dX$  (abstraction faite du signe) pendant le repos, et —  $dX + \frac{dx}{dX}dX$  dans le mouvement, le liquide restera sans intervalles ni superpositions dans la direction horizontale : par conséquent, pour examiner la condition de continuité, on adoptera —  $dX + \frac{dx}{dX}dX$  pour largeur des éléments dans le liquide en mouvement.

Le liquide restera de même sans intervalles ni superpositions dans la direction verticale pendant le mouvement, si l'on a égard aux éléments compris entre deux ondes consécutives, correspondantes respectivement aux profondeurs  $p$  et  $p + dp$ .

Alors la hauteur d'un élément quelconque sera le  $d'z$  correspondant à l'abscisse  $L - X + x$ , hauteur à laquelle, d'après ce qu'on a vu, on peut substituer celle qui correspond à l'abscisse  $L - X$ , savoir simplement  $d'z$ .

Si donc on appelle  $E$  le volume d'un élément quelconque mis en mouvement, l'on aura

$$E = \left( -dX + \frac{dx}{dX}dX \right) d'z = \left( -1 + \frac{dx}{dX} \right) dX d'z.$$

Mais afin que la condition de continuité et d'incompressibilité soit satisfaite, il faut que ce volume soit constant à chaque temps; il faudra donc en égaliser à zéro la différentielle par rapport au temps, ce qui donne

$$\frac{dE}{dt} dt = \frac{dE}{dX} dX = \frac{d^2x}{dX^2} dX^2 \frac{dz}{dp} dp - \left( 1 - \frac{dx}{dX} \right) \frac{d^2z}{dp dX} dX^2 dp = 0,$$

et, en ôtant les facteurs communs,

$$\frac{d^2x}{dX^2} \frac{dz}{dp} - \left( 1 - \frac{dx}{dX} \right) \frac{d^2z}{dp dX} = 0,$$

équation qui exprime la condition voulue.

20. D'après ce qui a été dit jusqu'ici, les équations du mouvement des divers points de la masse liquide seront

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\alpha A \frac{dy}{dX} + z \frac{du}{dX}, \\ \frac{dv}{dt} &= \alpha(A - 2Y) + z \frac{dv}{dp}, \\ z &= p + Y - y, \\ X &= L - Wt, \\ \frac{d^2x}{dX^2} \frac{dz}{dp} - \left(1 - \frac{dx}{dX}\right) \frac{d^2z}{dp dX} &= 0, \end{aligned}$$

auxquelles équations il faut ajouter les deux équations générales suivantes :

$$\begin{aligned} dx &= u dt, \\ dy &= v dt. \end{aligned}$$

Pour chaque point on a donc sept équations entre huit variables,  $x, y, z, u, v, t, X, Y$  et la quantité  $p$ ; en en éliminant six, on arrivera à une relation entre les deux autres variables, la profondeur  $p$  et les données de l'onde, savoir sa hauteur, son amplitude et sa vitesse.

Le mouvement sera donc parfaitement déterminé en fonction de ces données et de la profondeur du point que l'on veut considérer, pourvu qu'on donne la profondeur du fond, comme on le verra plus loin.

21. Mais, comme il est facile de le voir, la réduction des sept équations à une seule, quand même cela serait possible, serait si difficile et conduirait à des résultats si compliqués, qu'il faudrait renoncer à toute idée de poursuivre l'opération par ce moyen.

Pour arriver à la solution du problème, ce sera donc le cas de la chercher approximativement par la méthode dite de *fausse position*, en commençant par attribuer à quelques-unes des variables des expressions telles qu'elles concordent assez bien avec la réalité des choses.

Dans ce sens, considérant que le mouvement des molécules est oscillatoire, et que le moyen le plus convenable de le représenter est d'employer une fonction de sinus et de cosinus, avec la combinaison desquels

on arrive à exprimer toute sorte d'oscillation, on peut d'abord supposer que la courbe de l'onde visible soit une sinusoïde, comme du reste l'a considéré Laplace quand il a donné les lois de propagation horizontale d'une onde mince suivant la théorie du mouvement orbitaire.

L'équation de la sinusoïde est la fonction la plus simple dont le  $\frac{dY}{dX}$  se réduise à zéro aussi bien pour  $X = 0$  que pour  $X = L$ , comme en effet cela arrive dans la nature, où la vitesse verticale est nulle au sommet et au point le plus bas de l'onde; par conséquent, quelle que soit la vraie courbe de l'onde, la sinusoïde s'en approchera au moins dans le voisinage de ces deux points.

D'ailleurs, si l'on observe les ondes quand a cessé l'action des forces qui les ont produites, et quand elles ne se trouvent pas modifiées, sensiblement au moins, par la réaction du fond ou des rives, ou par le croisement d'autres ondes provenant d'une direction différente; en d'autres termes, si les ondes ne sont en aucune façon dérangées, précisément comme on le suppose dans la question dont il s'agit, dans ces conditions, on voit que leur forme concorde assez bien avec celle de la sinusoïde.

L'équation de la courbe de l'onde visible serait donc

$$Y = \frac{A}{2} \left( 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right).$$

Après cela, si l'on examine les expressions de  $\frac{du}{dt}$  et  $\frac{dv}{dt}$ , qui représentent la valeur de la force actuelle qui sollicite un point quelconque dans les deux directions horizontale et verticale, on voit qu'elles ont la même forme pour tous les points.

En outre, l'observation montre que l'agitation décroît à mesure que la profondeur augmente; de sorte que les forces actuelles qui les produisent diminuent aussi quand  $z$  croît, jusqu'à devenir nulles à la limite de l'agitation.

Enfin, la charge à laquelle sont soumises les molécules dans la direction horizontale change pour toutes de signe sur les verticales qui passent par le sommet et par les points le plus bas de l'onde.

Tout cela revient à dire que les ondes internes conservent une cer-

taine ressemblance avec l'onde externe et qu'elles se trouvent toutes comprises entre celle-ci et une ligne droite horizontale qui représente l'onde interne à la profondeur où l'agitation du liquide ne se fait plus sentir.

Par conséquent, si l'on appelle  $a$  la hauteur de l'onde interne correspondante à la profondeur  $p$ , on peut admettre que l'expression de  $y$  soit de la même forme que celle de  $Y$ , dans laquelle on substitue seulement  $a$  à  $A$ , c'est-à-dire soit

$$y = \frac{a}{2} \left( 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right).$$

Avec ces valeurs de  $Y$  et de  $y$ , celle de  $z$  sera

$$z = p + \frac{A-a}{2} \left( 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right),$$

expression qui, en ce qui concerne les erreurs commises sur  $Y$  et  $y$ , n'en contient que la différence.

**22.** Si de ces expressions on tire les valeurs des divers facteurs qui entrent dans les équations du mouvement, on a

$$A - 2Y = -A \cos \pi \frac{X}{L},$$

$$\frac{dy}{dX} = -\frac{a}{2} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L},$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -W \frac{dy}{dX} = W \frac{a}{2} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L},$$

$$\frac{dv}{dp} = W \frac{da}{2dp} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L};$$

et les équations du mouvement deviendront

$$\frac{du}{dt} = \alpha A \frac{a}{2} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L} + \frac{A-a}{2} \left( \frac{2p}{A-a} + 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right) \frac{du}{dX},$$

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha A \cos \pi \frac{X}{L} + W \frac{A-a}{2} \left( \frac{2p}{A-a} + 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right) \frac{da}{2dp} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L};$$

expressions dans lesquelles  $dt = -\frac{dX}{W}$ ; on en déduit  $u$  et  $v$ , pour des profondeurs déterminées, exprimés au moyen de la seule variable  $X$ .

23. En ce qui dépend des lignes trigonométriques, si l'on divise l'amplitude de l'onde en quatre intervalles égaux à partir de  $X = L$  jusqu'à  $X = -L$ , le facteur  $\sin\pi\frac{X}{L}$  sera positif dans le premier et le deuxième intervalle, et négatif dans le troisième et le quatrième :  $\cos\pi\frac{X}{L}$  sera au contraire positif dans le deuxième et le troisième, et négatif dans le premier et le quatrième.

En conséquence, en ce qui regarde le déplacement de l'onde visible, action qui, en déterminant le mouvement, prédomine sur la réaction des molécules, qui ne fait que la modifier, en direction horizontale, cette action sera positive dans le premier et le deuxième intervalle, et négative dans le troisième et le quatrième. Dans la direction verticale, au contraire, cette action sera positive dans le premier et le quatrième intervalle, et négative dans le deuxième et le troisième.

En d'autres termes,  $\frac{du}{dt}$ , savoir la force actuelle qui produit le mouvement en direction horizontale, de positif devient négatif en passant de la période montante de l'onde à la période descendante, dans laquelle période  $X$  est négative; en outre, sa valeur est nulle, c'est-à-dire, la vitesse dans la direction horizontale est un maximum ou un minimum sur les verticales qui passent par  $X = L$  et  $X = 0$ , c'est-à-dire par les points les plus bas et par le sommet de l'onde.

Et comme, dans les points voisins de  $X = L$ , l'abscisse  $X$  diminue quand le temps croît, et  $\sin\pi\frac{X}{L}$  de négatif devient positif, par cette raison,  $u$  aura une valeur minimum, et *vice versa* elle aura une valeur maximum dans le voisinage de  $X = 0$ , parce que,  $X$  diminuant,  $\sin\pi\frac{X}{L}$  de positif devient négatif.

Le  $\frac{dv}{dt}$ , au contraire, de positif devient négatif, en passant du premier au deuxième intervalle, et *vice versa*, de négatif devient positif, en passant du troisième au quatrième; dans ces passages, il devient

nul, ce qui revient à dire que la vitesse en direction verticale est un maximum ou un minimum sur les verticales qui passent par le milieu des demi-amplitudes de l'onde, et sera un maximum pour  $X = \frac{L}{2}$ , et un minimum pour  $X = -\frac{L}{2}$ .

En outre, dans le trajet d'une onde entière, les accroissements  $du$  et  $dv$  passent symétriquement par des valeurs égales et de signes contraires.

Tout cela explique que le mouvement des molécules est orbitaire, et qu'à un maximum ou minimum de vitesse dans une direction correspond une vitesse nulle dans l'autre.

Quant à la réaction des molécules, il faut remarquer d'abord que, à cause de  $dX = -Wdt$ , on a  $\frac{du}{dX} = -\frac{du}{Wdt}$ ; et le terme qui le contient comme facteur dans l'expression de  $\frac{du}{dt}$  deviendra de signe contraire à  $\frac{du}{dt}$ , c'est-à-dire qu'il deviendra négatif dans le premier et le deuxième intervalle, et restera positif dans le troisième et le quatrième.

En second lieu, la hauteur  $a$  de l'onde interne, d'après ce que l'on a vu, diminue à mesure que  $p$  augmente, de sorte que  $\frac{da}{dp}$  sera toujours négatif, et le terme qui le contient comme facteur dans l'expression de  $\frac{dv}{dt}$ , à cause aussi de l'autre facteur  $\sin \pi \frac{X}{L}$ , deviendra négatif dans le premier et le deuxième intervalle, et restera positif dans le troisième et le quatrième.

En d'autres termes, aussi bien dans la direction horizontale que dans la verticale, la réaction des molécules sera toujours négative pendant la période montante de l'onde, et positive, au contraire, dans la période descendante, comme du reste on pouvait le prévoir en observant le mode suivant lequel se comportent les tranches verticales et horizontales du liquide; c'est-à-dire, comment elles s'allongent ou se raccourcissent, et quel est l'effet produit par leur allongement et leur raccourcissement.

#### IV.

24. Du moment que ces équations subsistent pour une valeur quelconque de  $z$ , elles subsisteront encore pour les molécules à la sur-

face du liquide, pour lesquelles  $z = 0$ ; et dans ce cas elles deviendront

$$\frac{dU}{dX} = -\frac{\alpha}{W} \frac{A^2}{2} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L},$$

$$\frac{dV}{dX} = \frac{\alpha}{W} A \cos \pi \frac{X}{L}.$$

En les intégrant et en observant que

$$U = \frac{dx}{dt} = -W \frac{dx}{dX} \quad \text{et} \quad V = \frac{dY}{dt} = -W \frac{dY}{dX},$$

on aura, pour la première,

$$U = \frac{\alpha}{W} \frac{A^2}{2} \cos \pi \frac{X}{L} + \text{const.};$$

dans cette équation, pour

$$X = \frac{L}{2}, \quad U = 0, \quad \text{const.} = 0,$$

$$\frac{dx}{dX} = -\frac{\alpha}{W^2} \frac{A^2}{2} \cos \pi \frac{X}{L};$$

$$x = -\frac{\alpha}{W} \frac{A^2}{2} \frac{L}{\pi} \sin \pi \frac{X}{L} + \text{const.};$$

dans celle-ci,

$$X = L, \quad x = 0, \quad \text{const.} = 0.$$

Pour la seconde équation on aura

$$V = \frac{\alpha}{W} A \frac{L}{\pi} \sin \pi \frac{X}{L} + \text{const.};$$

où pour

$$X = L, \quad V = 0, \quad \text{const.} = 0$$

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{\alpha}{W^2} A \frac{L}{\pi} \sin \pi \frac{X}{L};$$

$$Y = \frac{\alpha}{W^2} A \frac{L^2}{\pi^2} \cos \pi \frac{X}{L} + \text{const.},$$

et puisque pour

$$X = L, \quad Y = 0, \quad \text{const.} = +\frac{\alpha}{W^2} A \frac{L^2}{\pi^2};$$

et alors

$$Y = \frac{\alpha}{W^2} A \frac{L^2}{\pi^2} \left( 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right).$$

Mais pour

$$X = 0 \dots Y = A,$$

par suite

$$\alpha = \frac{W^2 \pi^2}{2 L^2};$$

et l'on aura définitivement

$$U = W \frac{A^2 \pi^2}{4 L^2} \cos \pi \frac{X}{L},$$

$$x = - \frac{A^2 \pi}{4 L} \sin \pi \frac{X}{L},$$

$$V = W \frac{A \pi}{2 L} \sin \pi \frac{X}{L},$$

$$Y = \frac{A}{2} \left( 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right),$$

comme l'équation dont on était parti.

**25.** La valeur de la quantité  $\alpha = \frac{W^2 \pi^2}{2 L^2}$  est caractéristique; on peut la considérer comme la moitié de la force vive de l'unité de masse avec la vitesse  $W$  de propagation des ondes, divisée par le carré du rayon du cercle qui a pour circonférence l'amplitude  $2L$  de l'onde, le long de laquelle les molécules accomplissent leur révolution.

Il était, du reste, bien naturel que la valeur de  $\alpha$  dût être formée par ces éléments, car, en évaluant les charges et leurs modifications, on avait déjà bien tenu compte des dimensions en hauteur de l'onde visible et de la forme des ondes en général, mais il manquait encore d'introduire dans le calcul leur amplitude et leur vitesse, choses qui doivent exercer une influence bien décisive sur l'intensité due au déplacement de l'onde visible.

En outre, le produit de la quantité  $\alpha$  ainsi obtenue, par chacune des deux charges trouvées plus haut, constitue une vraie force, puisqu'il en résulte la moitié d'une force vive divisée par un espace linéaire, et multipliée par le rapport de deux lignes, dont le numérateur est la charge. La proportionnalité de  $\alpha$  aux forces qui représentent l'action produite par le déplacement de l'onde visible est donc admissible.

26. Si l'on passe maintenant aux molécules dans l'intérieur de la masse liquide, l'équation de leur mouvement dans la direction verticale deviendra, d'après la valeur trouvée de  $\alpha$ ,

$$\frac{dv}{d\lambda} = W \frac{A}{2} \frac{\pi^2}{L^2} \cos \pi \frac{X}{L} - \frac{A-a}{2} \left( \frac{2p}{A-a} + 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right) \frac{da}{2dp} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L}.$$

En intégrant, on aura

$$v = W \frac{A}{2} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L} + \frac{da}{2dp} p \cos \pi \frac{X}{L} + \frac{A-a}{2} \frac{da}{2dp} \cos \pi \frac{X}{L} + \frac{A-a}{2} \frac{da}{2dp} \frac{1}{2} \cos^2 \pi \frac{X}{L} + \text{const.}$$

Pour  $X = L$ ,  $v = 0$ ; par suite

$$\text{const.} = + \frac{da}{2dp} p + \frac{A-a}{2} \frac{da}{2dp} - \frac{A-a}{2} \frac{da}{2dp} \frac{1}{2},$$

et, à cause des relations

$$v = \frac{dy}{dt} = -W \frac{dy}{d\lambda},$$

et

$$1 - \cos^2 \pi \frac{X}{L} = \sin^2 \pi \frac{X}{L} = \frac{1 - \cos 2\pi \frac{X}{L}}{2},$$

on aura

$$\frac{dy}{dX} = - \frac{A}{2} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L} - \frac{da}{2dp} \frac{p}{W} \left( 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right) - \frac{A-a}{2W} \frac{da}{2dp} \left( 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right) + \frac{1}{4W} \frac{A-a}{2} \frac{da}{2dp} \left( 1 - \cos 2\pi \frac{X}{L} \right).$$

En intégrant,

$$y = \frac{A}{2} \cos \pi \frac{X}{L} - \frac{da}{2Wdp} \left( p + \frac{A-a}{2} \right) X - \frac{da}{2Wdp} \left( p + \frac{A-a}{2} \right) \frac{L}{\pi} \sin \pi \frac{X}{L} + \frac{1}{4W} \frac{A-a}{2} \frac{da}{2dp} \left( X - \frac{L}{2\pi} \sin 2\pi \frac{X}{L} \right) + \text{const.}$$

Pour  $X = L$ ,  $y = 0$ ; par suite,

$$\text{const.} = + \frac{A}{2} + \frac{da}{2W dp} \left( p + \frac{A-a}{2} \right) L - \frac{1}{4W} \frac{A-a}{2} \frac{da}{2dp} L,$$

et par conséquent, en réduisant,

$$y = \frac{A}{2} \left( 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right) + \frac{da}{2W dp} \left( p + \frac{3}{4} \frac{A-a}{2} \right) (L - X) - \frac{da}{2W dp} \left( p + \frac{A-a}{2} \right) \frac{L}{\pi} \sin \pi \frac{X}{L} - \frac{1}{4W} \frac{A-a}{2} \frac{da}{2dp} \frac{L}{2\pi} \sin 2\pi \frac{X}{L}.$$

Mais, pour  $X = 0$ , on doit avoir  $y = a$ ; par conséquent,

$$a = A + \frac{da}{dp} \left[ p + \frac{3}{8}(A-a) \right] \frac{L}{2W},$$

d'où

$$\frac{d(A-a)}{A-a} = \frac{2W}{L} \frac{dp}{p + \frac{3}{8}(A-a)},$$

équation différentielle homogène; pour l'intégrer, il suffira de faire

$$(A-a) = \eta p,$$

d'où

$$d(A-a) = p d\eta + \eta dp.$$

En substituant ces valeurs et en réduisant, on aura successivement

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= \frac{\left( 1 + \frac{3}{8}\eta \right) d\eta}{\eta \left( \frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\eta \right)} = - \frac{d\eta}{\eta} + \frac{2W}{L} \frac{d\eta}{\eta \left( \frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\eta \right)} \\ &= - \frac{d\eta}{\eta} + \frac{2W}{2W-L} \left( \frac{\frac{3}{8}}{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\eta} + \frac{1}{\eta} \right) d\eta \\ &= \frac{L}{2W-L} \frac{d\eta}{\eta} - \frac{2W}{2W-L} \frac{d \left( \frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\eta \right)}{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8}\eta}. \end{aligned}$$

En intégrant, on aura

$$\frac{2W-L}{L} \log p = \log \eta - \frac{2W}{L} \log \left( \frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8} \eta \right) + \text{const.};$$

passant aux nombres, substituant à  $\eta$  sa valeur et réduisant, on obtient

$$(A - a) \text{const.} = p^{\frac{2W}{L}} \left( \frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8} \frac{A - a}{p} \right)^{\frac{2W}{L}}.$$

Pour la détermination de la constante, il faut remarquer que, tant qu'il y a mouvement, il y a aussi réaction des molécules, et *vice versa*.

Or, si grande que soit la profondeur, la vitesse pourra bien devenir très faible, mais elle ne pourra jamais s'éteindre complètement, parce que le coefficient différentiel de la vitesse verticale par rapport à la profondeur, qui constitue l'autre facteur de la réaction des molécules, ne peut jamais se réduire à zéro, attendu que  $\frac{dv}{dp} = 0$  est le symbole distinctif d'un maximum ou d'un minimum de vitesse, dont il n'est pas question ici, et non pas d'une vitesse nulle.

Du reste, quelle que soit la profondeur du liquide, chacune de ses molécules est soumise à l'excès de pression  $\pm A$  en direction horizontale, et  $A - 2Y$  en direction verticale; l'effet de ces forces est bien paralysé plus ou moins par la réaction des molécules en mouvement, mais il ne peut pas rester entièrement détruit, parce qu'il n'y a pas de réaction là où il n'y a pas mouvement.

Donc le mouvement ne cessera qu'à des profondeurs infinies, pourvu que s'y prête l'extension des colonnes liquides.

En réalité cependant, le mouvement s'arrête au fond sur lequel repose le liquide, car là, à cause du manque d'élasticité, à chaque instant la composante des forces normale à la surface du fond sera détruite; les molécules qui y sont en contact ne s'en détacheront pas, et la hauteur de l'onde interne y sera nulle.

Par conséquent, si  $P$  représente la profondeur du fond au-dessous du liquide, la constante devra être telle, que pour  $p = P$  on ait  $a = 0$ , et l'on aura par conséquent

$$A \text{const.} = P^{\frac{2W}{L}} \left( \frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8} \frac{A}{P} \right)^{\frac{2W}{L}},$$

d'où

$$a = \Lambda \left[ 1 - \left( \frac{p}{P} \right)^{\frac{2W}{L}} \left( \frac{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8} \frac{\Lambda - a}{p}}{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8} \frac{\Lambda}{P}} \right)^{\frac{2W}{L}} \right].$$

Pour  $p = 0$ , le rapport  $\frac{\Lambda - a}{p}$  prend la valeur  $\frac{0}{0}$ , qui se réduit à  $\frac{8}{3} \frac{2W}{L}$ , en le tirant de l'expression de  $\frac{d(\Lambda - a)}{dp}$ , savoir du rapport des différentielles du numérateur et du dénominateur.

Par conséquent, la quantité  $\frac{3}{8} \frac{\Lambda - a}{p}$  varie entre  $\frac{3}{8} \frac{\Lambda}{P}$  et  $\frac{2W}{L}$ .

Quant à la valeur de  $\frac{\Lambda}{P}$ , l'observation montre que l'onde se brise quand elle arrive sur des profondeurs à peu près égales à sa propre hauteur; ceci revient à dire que, par défaut de profondeur, elle doit avoir ressenti déjà des perturbations avant d'arriver à ce point; en d'autres termes, pour se développer dans des conditions normales, comme on le suppose dans la présente question, l'onde a besoin de profondeurs suffisantes, plus grandes que  $\Lambda$ .

A cause de cela,  $\frac{\Lambda}{P}$  sera une fraction d'autant plus petite que  $P$  sera plus grand, et ses limites extrêmes seront 0 et 1.

La valeur de  $\frac{2W}{L}$  ensuite, comme on le verra plus loin, reste comprise entre les limites  $\frac{1}{5}$  et  $\frac{3}{4}$  environ.

Al'aide de toutes ces valeurs limites, on arrive à reconnaître que le fac-

teur  $\left( \frac{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8} \frac{\Lambda - a}{p}}{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8} \frac{\Lambda}{P}} \right)$  est près de l'unité, toutes les fois qu'il s'agit de points situés à une certaine distance de la surface du liquide, pour lesquels  $\frac{\Lambda - a}{p}$  est proche de son minimum.

Ce même facteur est encore voisin de l'unité, oscillant entre 0,851 et 1,250, quand  $\frac{2W}{L}$  est près de son minimum, quand même  $\frac{\Lambda - a}{p}$  serait, au contraire, voisin de son maximum.

Enfin, ce n'est que dans les cas d'ondes très rapides et de peu d'amplitude, et de points situés à de très petites profondeurs, que ce rapport acquiert une certaine grandeur, de 1,60 à 4,00 tout au plus, selon que  $\frac{A}{P}$  a une valeur maxima ou minima.

Si l'on considère cependant que ce facteur a un exposant fractionnaire, de sorte que sa valeur se rapproche encore davantage de l'unité, et, d'autre part, que, quand il s'agit de points à une profondeur très petite, pour lesquels ce facteur s'écarte davantage de l'unité, l'autre

facteur  $\left(\frac{P}{P}\right)^{\frac{2W}{L}}$  sera faible, leur produit sera faible aussi, et il n'y aura

pas alors une grande différence à prendre pour  $\left(\frac{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8} \frac{A-a}{P}}{\frac{2W}{L} - 1 - \frac{3}{8} \frac{A}{P}}\right)^{\frac{2W}{L}}$

une valeur approchée.

Par toutes ces raisons, en pratique, on pourra le considérer comme égal à 1, et poser

$$a = A \left[ 1 - \left(\frac{P}{P}\right)^{\frac{2W}{L}} \right].$$

Cette expression simple de  $a$  se déduit immédiatement de l'équation différentielle originaire, dans laquelle on néglige la quantité  $\frac{3}{8}(A-a)$ , qui, dans la plus grande partie des cas, est très petite en comparaison de  $p$ .

27. Des données obtenues sur les ondes mesurées, on déduit que le rapport  $\frac{2W}{L}$  varie de  $\frac{1}{5}$  à  $\frac{3}{4}$  environ, et généralement reste compris entre  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire que les décroissements de  $a$  varient, suivant les cas, comme les racines cubiques ou carrées du rapport  $\frac{P}{P}$ .

Cela montre comment, même dans le cas des plus grandes valeurs de  $\frac{2W}{L}$ , la valeur de  $a$  décroît tout d'abord rapidement de manière à se réduire considérablement à peu de distance de la surface du liquide; puis, cette même valeur décroît de moins en moins rapidement, pour

se maintenir à peu près constante jusqu'à de très grandes profondeurs, s'il en existe.

28. Ayant ainsi obtenu les valeurs de  $a$  et de  $\frac{da}{dp}$  en fonction de  $p$ , on peut les substituer dans les expressions de  $v$  et  $y$  pour en tirer les valeurs correspondantes à des valeurs déterminées de  $X$ .

On peut aussi les substituer dans les équations du mouvement en direction horizontale, pour en tirer les valeurs de  $u$  et de  $x$  après avoir exécuté les intégrations nécessaires.

Mais le calcul deviendra plus simple et plus exact en même temps, si, à l'action du déplacement de l'onde visible et à la réaction des molécules, on substitue la force actuelle capable par elle seule de produire le même mouvement, c'est-à-dire substituer la force

$$-\frac{a}{W} \frac{a^2 \pi}{2 L} \sin \pi \frac{X}{L} = -W \frac{a^2 \pi^2}{4 L^2} \sin \pi \frac{X}{L}$$

en direction horizontale, et

$$\frac{a}{W} a \cos \pi \frac{X}{L} = W \frac{a \pi^2}{2 L^2} \cos \pi \frac{X}{L}$$

en direction verticale, pareillement à ce qui arrive pour l'onde visible, pour laquelle la réaction des molécules est nulle.

Alors il suffira de substituer  $a$  à  $A$  dans les expressions trouvées plus haut pour les molécules à la surface du liquide, et ainsi l'on aura

$$u = W \frac{a^2 \pi^2}{4 L^2} \cos \pi \frac{X}{L},$$

$$x = -\frac{a^2 \pi}{4 L} \sin \pi \frac{X}{L},$$

$$v = W \frac{a \pi}{2 L} \sin \pi \frac{X}{L},$$

$$y = \frac{a}{2} \left( 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right).$$

Ces valeurs démontrent que le mouvement en direction horizontale est proportionnel au carré de la hauteur de l'onde sur laquelle se trouve

la molécule considérée : en direction verticale il est simplement proportionnel à la première puissance de cette même hauteur.

Les vitesses suivront donc, dans un certain rapport, la loi de variation de  $a$ .

29. On pourrait aussi obtenir la valeur de  $x$  en intégrant l'équation qui exprime la continuité et l'incompressibilité du liquide.

Mais, à part les difficultés que l'on pourrait rencontrer dans l'opération, il faut remarquer que, du moment qu'il faut renoncer à une des équations originaires à cause de la nouvelle relation introduite en se donnant les expressions de  $Y$  et  $y$ , il est préférable de s'en tenir aux équations du mouvement pour calculer la valeur de  $x$ , parce qu'elles la donnent en rapport avec la force horizontale, ce qu'il importe précisément d'obtenir.

Dès lors, l'équation de continuité ne se trouvera plus parfaitement satisfaite, et la différentielle du volume de l'élément par rapport au temps, d'où l'on a obtenu cette équation, fera connaître l'erreur provenant des valeurs de  $y$  et de  $x$  obtenues comme il a été dit plus haut, savoir l'excès ou le défaut de volume que l'élément présente en comparaison du volume qu'il devrait avoir dans chaque point.

Le coefficient différentiel

$$\frac{dE}{dX} = \left[ \frac{d^2 x}{dX^2} \frac{dz}{dp} - \left( 1 - \frac{dx}{dX} \right) \frac{d^2 z}{dp dX} \right] dX dp$$

se trouve exprimé au moyen du volume absolu  $dX dp$ .

Comme il importe que ce coefficient soit exprimé par rapport au volume (avec son propre signe) que l'élément a dans la position même où il se trouve, il suffira de multiplier et de diviser en même temps  $dX dp$  par  $(-dX + dx) dz$ .

On obtient

$$\begin{aligned} dX dp \frac{-dX + dx}{-dX + dx} \frac{dz}{dz} &= - \frac{dX}{dX - dx} \frac{dp}{dz} (-dX + dx) dz \\ &= - \frac{dX}{dX - dx} \frac{dp}{\frac{dz}{dp} dp} (-dX + dx) dz \\ &= - \frac{dp}{dz} (-dX + dx) dz, \end{aligned}$$

en observant que le rapport  $\frac{dX}{dX - dx}$  est très approximativement égal à l'unité.

Par conséquent, on aura

$$\frac{dE}{dX} = - \left[ \frac{d^2x}{dX^2} - \left( 1 - \frac{dx}{dX} \right) \frac{d^2z}{dp dX} \frac{dp}{dz} \right] (-dX + dx) dz.$$

Le coefficient

$$\delta = \frac{d^2x}{dX^2} - \left( 1 - \frac{dx}{dX} \right) \frac{d^2z}{dp dX} \frac{dp}{dz}$$

indique le degré de grandeur de l'erreur, et offre le moyen de calculer de combien un côté de l'élément se trouve plus allongé ou plus raccourci qu'il ne devrait l'être au point où il se trouve, quand on donne l'allongement ou le raccourcissement de l'autre côté.

En y substituant leurs valeurs à chacune des quantités, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= \frac{2 \frac{dp}{da}}{2 \frac{dp}{da} - 1 - \cos \pi \frac{X}{L}}, \\ \frac{d^2z}{dp dX} &= \frac{\pi}{L} \frac{da}{2 dp} \sin \pi \frac{X}{L}, \\ \frac{dx}{dX} &= - \frac{a^2}{4} \frac{\pi^2}{L^2} \cos \pi \frac{X}{L}, \end{aligned}$$

et

$$\frac{d^2x}{dX^2} = \frac{a^2}{4} \frac{\pi^3}{L^3} \sin \pi \frac{X}{L},$$

on obtient

$$\delta = \frac{a^2}{4} \frac{\pi^3}{L^3} \sin \pi \frac{X}{L} - \frac{\pi}{L} \frac{1 + \frac{a^2}{4} \frac{\pi^2}{L^2} \cos \pi \frac{X}{L}}{2 \frac{dp}{da} - 1 - \cos \pi \frac{X}{L}} \sin \pi \frac{X}{L},$$

et puisque

$$\begin{aligned} - \frac{a^2}{4} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L} &= x, \\ 2 \frac{dp}{da} &= - \frac{L}{AW} \frac{P^{\frac{2W}{L}}}{p^{\frac{2W}{L}-1}} = - \frac{L}{AW} P^{\frac{2W}{L}} p^{\frac{2W}{L}-1}, \end{aligned}$$

on aura

$$\delta = -\frac{\pi^2}{L^3} x + \frac{\pi}{L} \frac{\sin \pi \frac{X}{L} - \frac{\pi}{L} x \cos \pi \frac{X}{L}}{\frac{L}{AW} P \frac{2W}{L} p^{1-\frac{2W}{L}} + 1 + \cos \pi \frac{X}{L}}$$

Pour  $X = L$  et  $X = 0$ , on a  $\delta = 0$ ; la condition de continuité est donc toujours parfaitement satisfaite sur les verticales qui passent par les points les plus bas et par le sommet de l'onde.

Pour  $X = \frac{L}{2}$ ,  $\delta$  prend la valeur maxima

$$\delta' = \frac{a^2 \pi^2}{4 L^3} + \frac{\pi}{L} \frac{AW}{LP \frac{2W}{L} p^{1-\frac{2W}{L}} + AW}$$

A mesure que  $p$  augmente, cette valeur diminue, et d'autant moins rapidement que  $p$  est plus grand; par conséquent, à son tour, elle a un maximum qui correspond à  $p = 0$ , et dont la valeur est

$$\delta'_1 = \frac{A^2 \pi^2}{4 L^3} + \frac{\pi}{L};$$

c'est la limite extrême de l'erreur.

Pour  $p = P$ , la valeur de  $\delta'$  devrait être nulle, parce que là la hauteur de l'onde interne est égale à zéro; au contraire, elle devient

$$\delta'_2 = \frac{\pi}{L} \frac{AW}{LP + AW}.$$

Cette différence, qui provient de ce qu'on a posé  $\frac{dX}{d\lambda - dx} = 1$ , fait voir que la véritable erreur sera encore plus faible que celle que l'on a trouvée.

Eu égard à la petitesse de  $A$ , de  $W$  et de  $\pi$  par rapport à  $L$ , on voit que la valeur de  $\delta'$  sera très petite, pour peu que l'onde atteigne une certaine amplitude  $2L$ ; elle sera, en outre, d'autant plus petite, que l'onde se développera sur des profondeurs d'une certaine grandeur.

Dans le cas particulier qui sera traité dans la suite, on a

Pour $p = 0$ .....	$\delta'_1 = 0,0378,$
Pour $p = 1^m$ .....	$\delta'_2 = 0,0035,$



c'est-à-dire déjà moins de  $\frac{1}{10}$  de  $\delta_1$ ,

Pour  $p = P$ .....  $\delta_2 = 0,000014$ .

Considérant en outre que l'erreur varie entre zéro et le maximum relatif  $\delta'$ , et d'un autre côté que l'erreur calculée est plus grande que l'erreur réelle, on doit conclure que, avec les valeurs de  $x$  et de  $y$  qu'on a prises, la condition de continuité est suffisamment bien satisfaite pour les ondes d'une certaine amplitude, qui sont précisément celles qui intéressent davantage l'ingénieur.

Et, quand même, pour les petites ondes, le coefficient  $\delta'$  serait plus élevé, les mouvements des molécules sont alors si faibles, surtout en direction horizontale, qu'au point de vue absolu, dans les cas ordinaires de la pratique, on pourra encore conserver les mêmes valeurs de  $y$  et de  $x$ , qui, à cause de cela, peuvent être adoptées dans tous les cas.

La faiblesse des erreurs trouvées en adoptant pour l'onde une forme approximative confirme la justesse du procédé qu'on a suivi.

50. On doit remarquer la particularité que l'erreur de volume des éléments représentés par  $\frac{dE}{dX}$  est toujours positive, aussi bien dans la période montante que, dans la descendante, comme on peut facilement le reconnaître, en observant que, pour  $X$  négatif, les deux facteurs  $\sin \pi \frac{X}{L}$  et  $x$  du coefficient  $-\delta$  et de  $(-dX + dx)$ , largeur de l'élément, changent tous les deux de signe.

Cela indique qu'avec la valeur adoptée de  $y$  et avec celle de  $x$  que l'on en a déduite, chaque élément de volume absolu  $(dX - dx) d'z$  possède à chaque instant un excès de volume qui ne devrait pas se présenter si la condition de continuité était parfaitement satisfaite.

En d'autres termes, afin que cette condition fût toujours complètement satisfaite, il faudrait en chaque point raccourcir l'un ou l'autre côté de l'élément, ou tous les deux ensemble, en corrélation avec l'excès de volume qu'il présente à ce même point; ce volume se réduit à zéro au sommet et aux points les plus bas de l'onde, et acquiert une valeur maxima au milieu de la demi-amplitude de l'onde.

Ceci posé, il est à remarquer que, si l'on réduisait même d'une ma-

nière sensible, d'après la même loi, les ordonnées seules des ondes, les valeurs de  $x$  que l'on obtiendrait avec les nouvelles courbes ne différaient pas sensiblement de celles qu'on a déjà trouvées, attendu que le seul facteur variable,  $\frac{dy}{dX}$ , qui entre dans l'expression de l'action du déplacement de l'onde visible en direction horizontale, et qui avec la sinusoïde a pour valeur

$$- \frac{\alpha}{2} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L},$$

changerait très peu, à cause de la petitesse du rapport limite  $\frac{A}{L}$ .

Suivant les observations faites, le rapport  $\frac{A}{L}$  descend bien souvent au-dessous de 0,04; généralement il est compris entre 0,06 et 0,13, et très rarement il dépasse cette dernière limite.

Par conséquent, en portant les réductions sur les ordonnées, les vraies courbes des ondes devraient être plus déprimées vers le milieu des deux branches que ne le sont les sinusoïdes.

Cela est parfaitement d'accord avec ce que l'on observe dans la nature, où les courbes des ondes visibles apparaissent un peu plus minces et plus aiguës à leur sommet et plus plates dans le creux, abstraction faite, bien entendu, de la forme plus aiguë que les ondes présentent dans des circonstances spéciales, comme, par exemple, quand elles se forment sous l'action du vent.

D'après cela, si l'on représente par  $d\lambda$  l'augmentation de longueur du côté  $d'z$  correspondant à l'augmentation de volume  $\frac{dE}{dX} dX$  de l'élément à un instant donné, la somme de toutes ces augmentations  $d\lambda$  sur une verticale donnée à partir du fond jusqu'à l'onde interne correspondante à la profondeur  $p$ , c'est-à-dire  $\int_p^p d\lambda$ , fera connaître en chaque point de combien il faut raccourcir l'ordonnée de la sinusoïde correspondante, afin d'avoir la courbe de l'onde corrigée, ou, pour mieux dire, plus approchée.

La nouvelle ordonnée  $\varepsilon$  aura pour valeur

$$\varepsilon = \gamma - \lambda.$$

En procédant d'une manière analogue, on arrivera à l'approximation que l'on veut.

Or, par rapport au volume  $(-dX + dx)d'z$  de l'élément avec son propre signe, on a

$$\frac{dE}{dX} = -\delta(-dX + dx)d'z,$$

par suite,

$$d\lambda = -\delta d'z = -\left[\frac{d^2x}{dX^2} \frac{dz}{dp} - \left(1 - \frac{dx}{dX}\right) \frac{d^2z}{dp dX}\right] dp,$$

ou encore

$$d\lambda = -\left[\frac{a^2}{4} \frac{\pi^3}{L^3} \frac{2 \frac{dp}{da} - 1 - \cos \pi \frac{X}{L}}{2 \frac{dp}{da}} \sin \pi \frac{X}{L} - \left(1 + \frac{a^2}{4} \frac{\pi^2}{L^2} \cos \pi \frac{X}{L}\right) \frac{\pi}{L} \frac{da}{2 dp} \sin \pi \frac{X}{L}\right] dp,$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda = & -\frac{A^2}{4} \frac{\pi^3}{L^3} \sin \pi \frac{X}{L} \int_p^P \left[1 - 2 \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{2W}{L}} + \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{4W}{L}}\right] dp \\ & + \frac{\pi^3}{8L^3} \sin \pi \frac{X}{L} \int_0^a a^2 da \\ & + \frac{\pi^3}{4L^3} \cos \pi \frac{X}{L} \sin \pi \frac{X}{L} \int_0^a a^2 da + \frac{\pi}{2L} \sin \pi \frac{X}{L} \int_0^a da + \text{const.}, \end{aligned}$$

puisque à  $p$  correspond  $a$ , et que pour  $p = P$ ,  $a = 0$ .

En observant en outre que, pour  $p = P$ ,  $\lambda = 0$ , on aura définitivement

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{A^2}{4} \frac{\pi^3}{L^3} \sin \pi \frac{X}{L} \left[ (P - p) - \frac{2L}{2W + L} \frac{P^{\frac{2W}{L} + 1} - p^{\frac{2W}{L} + 1}}{P^{\frac{2W}{L}}} \right. \\ & \left. + \frac{L}{4W + L} \frac{P^{\frac{4W}{L} + 1} - p^{\frac{4W}{L} + 1}}{P^{\frac{4W}{L}}} \right] + \frac{a^3}{24} \frac{\pi^3}{L^3} \sin \pi \frac{X}{L} \\ & + \frac{a^3}{12} \frac{\pi^3}{L^3} \sin \pi \frac{X}{L} \cos \pi \frac{X}{L} + \frac{a}{2} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L}. \end{aligned}$$

A  $X = L$  et  $X = 0$  correspond toujours  $\lambda = 0$ .

Dans le cas de  $X = \frac{L}{2}$ , auquel correspond l'augmentation maxima du volume des éléments, et par conséquent le raccourcissement maximum de l'ordonnée de l'onde sera

$$\lambda' = \frac{A^2 \pi^3}{4 L^3} \left[ (P - p) - \frac{2L}{2W + L} \frac{P^{\frac{2W}{L} + 1} - p^{\frac{2W}{L} + 1}}{P^{\frac{2W}{L}}} + \frac{L}{4W + L} \frac{P^{\frac{4W}{L} + 1} - p^{\frac{4W}{L} + 1}}{P^{\frac{4W}{L}}} \right] + \frac{a^3 \pi^3}{24 L^3} + \frac{a \pi}{2 L}.$$

A la surface du liquide pour laquelle  $p = 0$  et  $a = A$ , on aura

$$\lambda'_1 = \frac{A^2 \pi^3}{4 L^3} \left( P - \frac{2LP}{2W + L} + \frac{LP}{4W + L} \right) + \frac{A^3 \pi^3}{24 L^3} + \frac{A \pi}{2 L}.$$

En faisant l'application de cette formule au cas numérique traité plus loin, on obtient

$$\lambda'_1 = 0^m, 451,$$

et, par suite, l'ordonnée du milieu des branches de l'onde visible qui, avec la sinusoïde, était de  $4^m, 000$  avec la courbe corrigée, devient de  $3^m, 549$ .

**31.** En substituant  $y' + \frac{a}{2}$  à  $y$  dans les expressions

$$x = -\frac{a^2 \pi}{4 L} \sin \pi \frac{X}{L},$$

$$y = \frac{a}{2} \left( 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right),$$

c'est-à-dire en élevant de la quantité  $\frac{a}{2}$  l'origine des coordonnées, on obtient

$$\frac{4}{a^2} y'^2 + \frac{16L^2}{\pi^2 a^4} x^2 = 1,$$

équation qui montre que, en adoptant les sinusoïdes pour courbes des

ondes, les trajectoires des molécules sont des ellipses ayant

Le demi-axe vertical.....  $= \frac{a}{2}$ ,

Le demi-axe horizontal.....  $= \frac{\pi a^2}{4 L} = \frac{b}{2}$ ,

$b$  dénotant l'axe horizontal.

La valeur des axes de ces orbites s'obtient également à l'aide des expressions de  $x$  et de  $y$ , dans lesquelles on fait respectivement

$$X = \frac{L}{2} \text{ et } X = 0.$$

32. Si l'on représente par  $q$  la profondeur rapportée au niveau moyen de la surface du liquide, savoir à la surface du liquide en repos, on aura

$$p + \frac{\Lambda}{2} = q,$$

et, par rapport à ce niveau, la profondeur à laquelle se trouve

L'extrémité inférieure des orbites est...  $q = p + \frac{\Lambda}{2}$ ,

Leur centre.....  $q' = p + \frac{\Lambda - a}{2}$ ,

Et leur sommet.....  $q'' = p + \frac{\Lambda}{2} - a$ .

La vitesse horizontale maxima a lieu :

A la profondeur  $q$ , à l'abscisse  $X = L$ , où elle a pour valeur

$$u_1 = - W \frac{a^2 \pi^2}{4 L^2};$$

A la profondeur  $q''$ , à l'abscisse  $X = 0$ , avec une valeur

$$u_2 = + W \frac{a^2 \pi^2}{4 L^2},$$

c'est-à-dire égale et en sens contraire à celle qui correspond à la profondeur  $q$ .

La vitesse verticale est maxima à la profondeur  $q'$ , et a pour valeur,

$$v_1 = + W \frac{a}{2} \frac{\pi}{L} \text{ à l'abscisse } X = \frac{L}{2},$$

et

$$v_2 = - W \frac{a}{2} \frac{\pi}{L} \text{ à l'abscisse } X = - \frac{L}{2},$$

c'est-à-dire égale et en sens opposé à celle qui correspond à l'abscisse  $X = \frac{L}{2}$ .

V.

**33.** En résumé, on tire les conclusions suivantes :

1° *Les ondes visibles d'une masse liquide  $\gamma$  déterminent des ondes internes d'une hauteur de plus en plus petite à partir de la surface jusqu'au fond, toutes de la même amplitude et d'une certaine ressemblance entre elles.*

2° *Les molécules ont un mouvement périodique et décrivent des orbites dont le grand axe est vertical.*

3° *Les ondes internes et l'onde visible, ainsi que les orbites des molécules situées sur la même verticale dans le liquide en repos, sont toutes des courbes synchrones et isochrones.*

Si l'on admet que les courbes des ondes internes et de l'onde visible soient des sinusoides simples de l'équation

$$y = \frac{a}{2} \left( 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right),$$

la hauteur des ondes internes est

$$a = A \left[ 1 - \left( \frac{p}{P} \right)^{\frac{2W}{L}} \right].$$

La vitesse des molécules, à un instant déterminé  $t = \frac{L-X}{W}$ , est :

En direction horizontale.....  $u = W \frac{a^2}{4} \frac{\pi^2}{L^2} \cos \pi \frac{X}{L},$

En direction verticale.....  $v = W \frac{a}{2} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L}.$

Les orbites sont des ellipses représentées par l'équation

$$\frac{4}{a^2} y^2 + \frac{16L^2}{\pi^2 a^4} x^2 = 1,$$

rapportées à leur centre.

Les courbes des ondes, après une première correction, ont pour équation

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{a}{2} \left( 1 + \cos \pi \frac{X}{L} \right) - \frac{A^2}{4} \frac{\pi^3}{L^3} \sin \pi \frac{X}{L} \\ & \times \left[ (P - p) - \frac{2L}{2W + L} \frac{P^{\frac{2W}{L} + 1} - p^{\frac{2W}{L} + 1}}{P^{\frac{2W}{L}}} + \frac{L}{4W + L} \frac{P^{\frac{4W}{L} + 1} - p^{\frac{4W}{L} + 1}}{P^{\frac{4W}{L}}} \right] \\ & - \frac{a^3}{24} \frac{\pi^3}{L^3} \sin \pi \frac{X}{L} - \frac{a^3}{12} \frac{\pi^3}{L^3} \sin \pi \frac{X}{L} \cos \pi \frac{X}{L} - \frac{a}{2} \frac{\pi}{L} \sin \pi \frac{X}{L}. \end{aligned}$$

**34.** De ces conclusions découlent les corollaires suivants :

La vitesse est dirigée :

Horizontalement dans le sens de la marche des ondes dans le deuxième et le troisième intervalle, et en sens contraire dans le premier et le quatrième;

Verticalement, elle est dirigée de bas en haut dans la période montante, et de haut en bas dans la période descendante.

Les vitesses, dans les deux directions horizontale et verticale, ont respectivement deux maxima égaux et en sens opposés; ceux en direction horizontale se trouvent à des profondeurs différentes.

À la vitesse maxima dans une direction correspond une vitesse nulle et un déplacement maximum dans l'autre.

La vitesse a une valeur maxima :

En direction horizontale, sur les verticales qui passent par le sommet et par les points les plus bas de l'onde;

En direction verticale, sur les verticales qui passent par le milieu des demi-amplitudes de l'onde.

Les vitesses et les déplacements maxima des molécules sont et correspondent respectivement aux profondeurs et aux abscisses sui-

vantes :

$$\begin{aligned} X = L, \quad q &= p + \frac{A}{2}, \quad u_1 = -W \frac{a^2}{4} \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \gamma_1 = -\frac{a}{2}, \\ X = 0, \quad q'' &= p + \frac{A}{2} - a, \quad u_2 = +W \frac{a^2}{4} \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \gamma_2 = +\frac{a}{2}, \\ X = \frac{L}{2}, \quad q' &= p + \frac{A-a}{2}, \quad v_1 = +W \frac{a}{2} \frac{\pi}{L}, \quad x_1 = -\frac{a^2}{4} \frac{\pi}{L}, \\ X = -\frac{L}{2}, \quad q' &= p + \frac{A-a}{2}, \quad v_2 = -W \frac{a}{2} \frac{\pi}{L}, \quad x_2 = +\frac{a^2}{4} \frac{\pi}{L}. \end{aligned}$$

**35.** Comme on le voit, le mouvement des molécules est orbitaire, ainsi que l'a pressenti Newton, en disant qu'il avait lieu *per circumulum* : bien entendu, le grand géomètre n'a jamais voulu dire par là que les trajectoires des molécules fussent des cercles parfaits, mais simplement que les molécules retournaient périodiquement à la même position, sans quoi il y aurait transport de liquide dans le sens de la marche des ondes, ce qui est contraire aux faits observés.

Par un procédé graphique et en partant de considérations purement géométriques d'invariabilité du volume de la masse liquide agitée par des ondes, le colonel Emy en a décrit, comme on l'a vu, le mouvement.

Ses appréciations étaient justes quant à la nature du mouvement, mais naturellement le procédé qu'il a suivi ne lui a pas permis de le mesurer, et ne devait donner autre chose qu'une idée générique du mode suivant lequel le phénomène devait s'accomplir.

**36.** Voulant passer à quelque application pratique, on doit noter d'abord qu'on n'a pas d'observations complètes d'ondes dans la Méditerranée.

Parmi celles qui furent mesurées dans les autres mers, on choisira celle qui a été relevée par Scoresby sur l'Atlantique du Nord, pour laquelle

$$A = 8^m, 00, \quad L = \frac{170^m}{2}, \quad W = 14^m, 6.$$

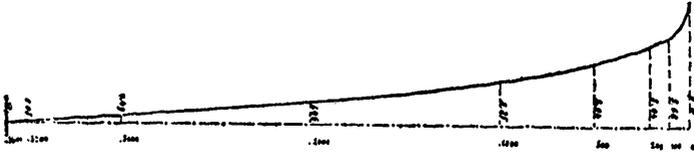
On choisit cette onde de préférence à d'autres, d'abord parce que,

indépendamment du grand soin de l'observateur, c'est celle qui se rapproche davantage des plus grandes de la Méditerranée, et ensuite parce que le rapport  $\frac{W}{\sqrt{2L}} = 1,12$  s'approche, sans le dépasser, du coefficient limite 1,25 donné par la formule d'Airy,  $W = 1,25\sqrt{2L}$ , dans le cas de très grandes profondeurs.

La profondeur de l'Atlantique du Nord, sur la plus grande partie de la ligne entre Liverpool et Boston, le long de laquelle Scoresby fit ses observations, peut être évaluée à 2000 brasses anglaises environ, comme on le relève sur la *Carte de la Géographie physique de la mer*, par Maury; on peut donc adopter approximativement  $P = 3600^m$ .

Avec ces données, on obtient les résultats du Tableau suivant; avec

Fig. 3.



les valeurs de  $a$  et de  $p$  données dans ce Tableau, on a construit la courbe représentée *fig. 3*.

L'inspection de ce Tableau et de cette courbe démontre, ce qui du reste était déjà apparu par l'examen de l'expression de  $a$ , que l'agitation produite par le mouvement des ondes diminue bien considérablement d'énergie à peu de distance au-dessous de la surface du liquide, mais qu'elle s'étend à de très grandes profondeurs, s'il y en a.

Port-Maurice, 16 novembre 1879.

Tableau des vitesses et des déplacements maxima de l'eau, produits à des profondeurs déterminées dans l'Atlantique du Nord par l'onde levée par Scoresby.

$$A = 8,00, \quad L = 85,0, \quad W = 14,6, \quad P = 3600^m.$$

p.	a.	X = L = 85,0.			X = 0		X = $\frac{L}{2} = 42,5$			X = $-\frac{L}{2}$
		q.	$u_1$ .	$\gamma_1$ .	$q^n$ .	$u_2, \gamma_2$ .	q'.	$v_1$ .	$x_1$ .	$v_2, x_2$ .
0	8,0	4,0	- 0,319	- 4,0	- 4,0		0,0	2,158	- 0,591	
1	7,520	5,0	- 0,282	- 3,760	- 2,5		1,2	2,029	- 0,523	
2	7,391	6,0	- 0,272	- 3,696	- 1,4		2,3	1,994	- 0,505	
4	7,227	8,0	- 0,260	- 3,614	+ 0,8		4,4	1,950	- 0,483	
6	7,111	10,0	- 0,252	- 3,556	2,9		6,4	1,919	- 0,467	
8	7,019	12,0	- 0,246	- 3,510	5,0		8,5	1,894	- 0,455	
10	6,941	14,0	- 0,240	- 3,471	7,1		10,5	1,873	- 0,445	
15	6,783	19,0	- 0,229	- 3,392	12,2		15,6	1,830	- 0,425	
20	6,656	24,0	- 0,221	- 3,328	17,3		20,7	1,796	- 0,409	
50	6,159	54,0	- 0,189	- 3,080	47,8		50,9	1,662	- 0,351	
100	5,664	104,0	- 0,160	- 2,832	98,3		101,2	1,528	- 0,296	
200	5,036	204,0	- 0,126	- 2,518	199,0		201,5	1,359	- 0,234	
500	3,940	504,0	- 0,077	- 1,970	500,1		502,0	1,063	- 0,143	
1000	2,848	1004,0	- 0,040	- 1,424	1001,2		1002,6	0,768	- 0,075	
2000	1,463	2004,0	- 0,011	- 0,732	2002,5		2003,3	0,395	- 0,020	
3000	0,486	3004,0	- 0,0012	- 0,243	3003,8		3003,8	0,131	- 0,002	
3500	0,077	3504,0	- 0,00003	- 0,039	3503,9		3504,0	0,021	- 0,00005	
3600	0,0	3604,0	0,0	0,0	3604,0		3604,0	0,0	0,0	

Égaux à  $u_1, \gamma_1$  en valeur absolue,  
mais de signe contraire.

Égaux à  $v_1, x_1$  en valeur absolue,  
mais de signe contraire.

SOMMAIRE.

I. — QUESTIONS.

1. Phénomènes physiques sur l'extension de l'agitation dans le sens de la profondeur. — 2. Explication du mécanisme des ondes donnée par le colonel *Emy*. — 3. Phénomènes physiques sur le synchronisme des mouvements. — 4. Termes du problème..... 289-295

II. — FORCES.

5. Forces qui agissent sur la masse liquide. — 6. Axes des coordonnées. — 7. Trajectoires des molécules et courbes des ondes internes. — 8. Distances horizontale et verticale de deux ondes internes consécutives. — 9. Excès de pression, ou *charge*, auquel les molécules se trouvent soumises suivant la direction verticale. — 10. Excès de pression, ou *charge*, auquel les molécules se trouvent soumises suivant la direction horizontale. — 11. Influence de la forme d'une courbe en mouvement sur son action sur les molécules effleurées. — 12. Modification des charges due à la forme des courbes des ondes en mouvement. — 13. Action produite par le déplacement de l'onde visible. — 14. Compression dans une direction, et extension dans l'autre, auxquelles sont soumis les éléments de la masse liquide. — 15. Réaction des molécules suivant la direction verticale. — 16. Cette réaction croît avec la profondeur, et, dans cette direction, elle est toujours opposée au mouvement. — 17. Réaction des molécules suivant la direction horizontale..... 296-310

III. — ÉQUATIONS.

18. Équations du mouvement. — 19. Conditions de continuité et d'incompressibilité du liquide. — 20. Équations générales pour la résolution du problème. — 21. Résolution par la méthode de fausse position en partant de la sinusoïde simple pour courbe des ondes. — 22. Équations du mouvement dans ce cas. — 23. Mouvement orbitaire des molécules..... 310-317

## IV. — CALCULS.

24. Résolution des équations pour les molécules à la surface du liquide. —  
 25. Modification des charges résultant de la vitesse de translation et de  
 l'amplitude des ondes. — 26. Hauteur des ondes internes. — 27. Variations  
 de cette hauteur suivant la profondeur. — 28. Résolution des équations  
 pour les molécules dans l'intérieur de la masse liquide. — 29. Évaluation  
 de l'erreur commise en adoptant la sinusoïde pour courbe des ondes. —  
 30. Correction des sinusoïdes pour obtenir les vraies courbes des ondes. —  
 31. Équation des trajectoires des molécules. — 32. Maximum de vitesse  
 des molécules dans les deux directions..... 317-334

## V. — CONCLUSIONS.

33. Lois du mouvement. — 34. Particularités du mouvement. — 35. Justesse  
 des prévisions de Newton et des explications données par le colonel Emy.  
 — 36. Application à une onde de l'Atlantique..... 334-338