JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

Recherches sur la théorie mathématique de la capillarité

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 341-374.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7__341_0>

Recherches sur la théorie mathématique de la capillarité;

PAR M. H. RESAL.

1. On s'occupe peu actuellement de la théorie mathématique de la capillarité, fondée réellement par Laplace et développée par Poisson, dont l'Ouvrage, publié en 1831, est un véritable monument.

La lecture de la nouvelle théorie de l'action capillaire de Poisson est pénible; on ne retrouve pas dans ce travail la régularité didactique et la coordination remarquable qui caractérisent les autres publications de l'illustre géomètre ([1]). Il établit d'ailleurs l'équation de la surface capillaire et la constance de l'angle que forme cette surface avec une paroi d'une nature donnée d'une manière telle, que l'étude de sa solution de ce double problème exige un travail considérable. Enfin, lorsqu'il traite les questions soulevées par les physiciens de son époque, parmi lesquels Gay-Lussac joue le premier rôle, il emploie constamment les mêmes variables, au lieu d'approprier le choix des variables à la nature de chaque problème, en vue d'arriver plus rapidement et plus nettement à la solution.

Depuis 1831, le domaine physique de la capillarité s'est considérablement agrandi. Les travaux de M. Plateau sur la forme naturelle des

([1]) Ce qui tendrait à faire supposer que l'ouvrage dont il s'agit est la réunion de Mémoires successifs sans que l'auteur ait eu d'avance un plan bien arrêté liquides et des bulles creuses de liquides visqueux, les expériences de M. Boutigny sur les globules liquides formés sur des plaques portées à une température telle que le contact n'ait pas lieu, etc., font époque dans l'histoire de la Physique.

Il m'a semblé qu'il ne serait pas sans intérêt de mettre la théorie des phénomènes capillaires au courant des progrès réalisés, en la rendant, par sa simplicité, très accessible aux jeunes géomètres, et c'est à ce point de vue que je vais me placer.

I. — *Formules fondamentales.*

2. *Forme de la surface capillaire.* — Soient (*fig.* 1)

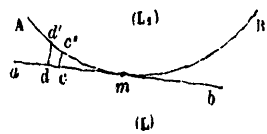
AmB une section normale faite en un point m, dont la masse est représentée par la même lettre, de la surface de séparation de deux fluides (L_1) et (L), la concavité étant tournée vers (L_1);

ab la trace du plan tangent en m;

Π_1, Π les poids spécifiques des deux fluides.

Nous ne considérerons que le cas où les forces extérieures agissant

Fig. 1.



sur chaque point m de (L) et (L_1) dérivent d'un potentiel $m\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ étant une fonction des coordonnées de ce point.

Le point m est en équilibre sous l'action des forces extérieures et des actions qu'il reçoit des molécules de (L_1) et (L).

On peut considérer la résultante des actions moléculaires de (L_1) sur m comme étant due à celle Q_1 de ce fluide, dans l'hypothèse où ab serait la surface de séparation, et à la résultante prise en sens contraire $-Q'_1$ des actions provenant des molécules du ménisque.

Si nous désignons pour (L) par Q et Q' les équivalents de Q_1 et Q'_1, l'action exercée par ce fluide sur m sera de même la résultante de Q

et Q'; de sorte que les forces Q, Q', Q_1, $-Q'_1$ et les forces extérieures doivent se faire équilibre sur le point m.

Nous supposerons, avec Laplace, Gauss et Lamé, que (L), (L_1) sont homogènes dans toute leur masse, tandis que, par des considérations très contestables, Poisson est conduit à admettre que la densité des deux fluides subit une altération dans le voisinage de la surface de séparation. Les forces Q et Q_1 seront ainsi considérées comme normales à AmB.

Il faut donc, pour l'équilibre, que la résultante de Q', $-Q'_1$ et de la force extérieure agissant sur m soit aussi normale à la surface, ou que le travail élémentaire de ces trois forces soit nul pour un déplacement de m sur cette surface ou encore que la somme de $m\mathfrak{F}$ et du potentiel des actions du ménisque de (L) sur m et de celles du ménisque de (L_1) prises en sens contraire soit constante pour tout point de la surface.

Le potentiel de l'action de la molécule m' du ménisque de (L) sur m est de la forme $mm'f(r)$, $f(r)$ étant une certaine fonction de la distance r de ces deux molécules.

Considérons un élément de volume de ce ménisque, limité par deux plans normaux en m faisant entre eux un angle infiniment petit $d\theta$ et par deux cylindres concentriques; soient c, d les intersections avec ab et c', d' les intersections avec AB des génératrices de ces cylindres comprises dans le plan de la figure et situées d'un même côté de m. Si l'on remarque que le rayon γ de la sphère d'activité est extrêmement petit, on peut supposer $r = \overline{mc}$, et par suite $\overline{cd} = dr$; le potentiel dû à l'action de la masse déterminée par l'élément de volume est, par suite,

$$m\frac{\Pi}{g}f(r)\overline{cc'}\,r\,d\theta\,dr,$$

et, pour toute la portion du ménisque limitée par les deux plans normaux,

$$m\frac{\Pi}{g}d\theta\int_0^\gamma f(r)\overline{cc'}\,r\,dr.$$

Mais comme, en appelant ϱ le rayon de courbure de l'une des sections normales, on a

$$\overline{cc'} = \frac{r^2}{2\iota},$$

l'expression ci-dessus devient

$$m\frac{\Pi}{g}\frac{d\theta}{2\iota}\int_0^{\gamma} f(r)\, r^2\, dr = m\frac{d\theta}{\iota}k,$$

en posant

$$\Pi\,\frac{\Pi}{2g}\int_0^{\gamma} f(r) r^2\, dr = k,$$

k étant une constante spécifique.

Soient R, R′ les rayons de courbure principaux en m de la surface; l'angle θ étant censé mesuré à partir de la trace sur le plan tangent du plan normal correspondant au premier de ces rayons, on a

$$\frac{1}{\iota} = \frac{\cos^2\theta}{\mathrm{R}} + \frac{\sin^2\theta}{\mathrm{R}'},$$

et le potentiel pour tout le ménisque est

$$m\frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{R}} + \frac{\sin^2\theta}{\mathrm{R}'}\right) d\theta = mk\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'}\right).$$

Le potentiel du ménisque de (L_1) pourra se représenter de la même manière par

$$mk_1\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'}\right).$$

Si donc on appelle $m\mathrm{C}$ une constante, nous aurons

$$mk\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'}\right) - mk_1\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'}\right) + m\mathcal{S} + m\mathrm{C} = 0,$$

d'où

$$\mathrm{K}\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'}\right) = \frac{\Pi}{g}(\mathcal{S} + \mathrm{C}),$$

en posant

$$\frac{\Pi}{g}(k - k_1) = \mathrm{K}.$$

L'équation ci-dessus est celle de la surface AmB ou de ce que l'on appelle la *surface capillaire*. En la mettant sous la forme

$$\frac{\Pi}{g}\mathcal{J} - K\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \text{const.},$$

on reconnaît sans peine que l'influence du ménisque se traduit par une diminution de pression positive ou négative au point m de la surface, représentée par

$$K\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

En attribuant des signes à R et R' en raison du sens de la courbure de l'une et de l'autre des sections normales, l'équation de la surface peut se mettre sous la forme suivante,

$$(1) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{(\mathcal{J} + C)}{\mu},$$

μ étant une constante positive dépendant de la nature de (L) et (L_1), que l'expérience seule peut faire connaître, et C une constante arbitraire dont on déterminera la valeur dans chaque problème par les conditions aux limites.

Dans le cas où la force extérieure est la pesanteur, l'équation (1) devient, en posant $\frac{g}{\mu} = \frac{1}{a^2}$,

$$(2) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{(y + \lambda)}{a^2},$$

y étant la distance du point m à un plan horizontal déterminé, et λ une constante remplaçant C.

3. *Influence d'une paroi sur la surface de contact.* — Prenons pour plan de la figure le plan normal au point m de l'intersection de la paroi et de la surface.

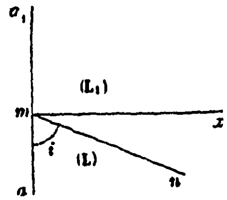
Soient

mn, aa_1 (*fig.* 2) les tangentes en m aux deux sections faites respectivement dans ces deux surfaces par le plan de la figure;
i l'inclinaison de mn sur ma dans (L);
mx la normale à la paroi, dont la substance est censée homogène.

Si la paroi était un plan indéfini, son action $m.\mathrm{N}$ sur m serait dirigée suivant Ox, et N serait une constante.

Quelle que soit la forme de la paroi, on peut également considérer N

Fig. 6.



comme constant, car il est clair que les actions sur m exercées par les molécules du ménisque de la paroi ne peuvent donner, suivant Ox, que des composantes de l'ordre de quantités que l'on peut négliger.

Nous négligerons également l'influence des ménisques de (L) et (L_1), qui est relativement faible, dans la détermination de la composante suivant mx de l'action qu'exercent les deux fluides sur m.

Soient $mm'f(r)$ l'action exercée par une molécule m' de (L) sur m, r étant la distance des deux molécules.

Concevons dans (L) un cône ayant m pour sommet, d'une ouverture infiniment petite $d\omega$, dont les génératrices fassent à un infiniment petit près l'angle α avec mn. La masse élémentaire $\frac{\Pi}{g} r^2\, d\omega\, dr$ de ce cône donne suivant mx la composante

$$m\frac{\Pi}{g} r^2\, d\omega\, dr\, f(r)\cos\alpha,$$

et l'on a pour tout le cône

$$m\frac{\Pi}{g}\, d\omega\cos\alpha \int_0^{\gamma} f(r) r^2\, dr = mq\, d\omega\cos\alpha,$$

q étant une constante dépendant de la nature de (L).

Il vient, par suite, pour la composante normale totale due à l'action de ce fluide,

$$mq\int\cos\alpha\, d\omega,$$

l'intégrale se rapportant au fuseau sphérique de centre m d'un rayon égal à l'unité, limité par les plans mn, ma; mais cette intégrale n'est autre chose que la projection du fuseau sur un plan perpendiculaire à mx, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos i$. L'expression ci-dessus devient donc

$$mq\frac{\pi}{2}(1 - \cos i).$$

En appelant q_1 l'équivalent de q pour (L_1), ce fluide donne de même la composante normale

$$mq\frac{\pi}{2}(1 + \cos i).$$

On a donc, en faisant abstraction des forces extérieures, dont l'influence est relativement très faible,

$$mN + mq\frac{\pi}{2}(1 - \cos i) + mq_1\frac{\Pi}{2}(1 + \cos i) = 0,$$

d'où

$$\cos i = \frac{2N + \pi(q + q_1)}{\pi(q - q_1)},$$

et l'angle i est ainsi constant.

4. *Rappel des résultats de l'expérience.* — Dans tout ce qui suit, nous prendrons le millimètre pour unité linéaire.

D'après l'expérience, on a

	a.	$2a^2$.
	mm	
Pour l'eau	2,826	15,5861
Pour une dissolution saturée de sel marin	2,569	13,20
Pour l'acide azotique	2,366	11,20
Pour l'acide chlorhydrique	2,291	10,50
Pour le mercure	1,811	6,528
Pour l'alcool	1,732	6,00
Pour l'huile de lavande	1,693	5,60

Si nous désignons par α l'angle aigu de raccordement que forme un liquide avec une paroi, on a

	α.
Pour le verre ordinaire et le mercure (surface convexe)	45°.30′
Pour le verre privé d'air et le mercure »	55.00
Pour l'acier et l'alcool »	90.00
Pour le verre et l'eau (surface concave)	0.00

Nous dirons qu'un liquide mouille ou ne mouille pas une paroi, selon que sa surface sera concave ou convexe dans la région du contact avec la paroi.

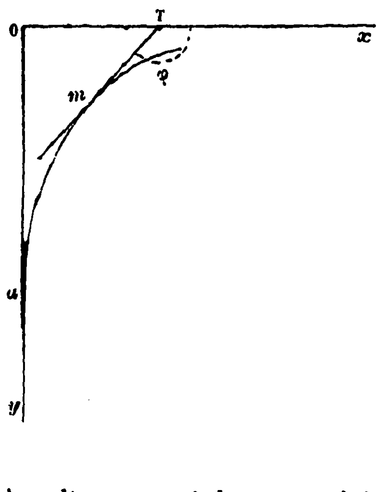
§ II. — *Phénomènes capillaires relatifs aux liquides pesants.*

5. *Forme que prend la surface d'un liquide au contact d'une lame verticale.* — Nous supposerons que la lame est suffisamment longue, dans le sens horizontal, pour que ses extrémités n'influent pas d'une manière sensible sur la forme de la partie moyenne de la surface que l'on peut dès lors regarder comme cylindrique.

Le tout se réduit donc à considérer une section faite dans la surface par un plan perpendiculaire à l'intersection de la lame avec le niveau statique du liquide.

Dans ce qui suit, nous supposerons que la surface est convexe; les

Fig. 3.



formules obtenues s'appliqueront à la concavité en changeant le sens positif de l'axe des y.

Soient (*fig.* 3)

Ox et Oy l'horizontale et la verticale du point d'intersection O de la lame et du niveau;

x, y les coordonnées d'un point quelconque m de la courbe;

φ l'angle que forme la tangente en ce point avec Ox;
a l'intersection de la courbe avec Oy;
s l'arc am;
α l'angle de raccordement en a.

On a évidemment

$$dy = -ds\sin\varphi,\quad dx = -ds\cos\varphi,\quad \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

On doit supposer, dans la formule (2), $R' = \infty$ et, en raison de l'interprétation donnée à la courbure à la surface, $\lambda = 0$, d'où successivement

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{y}{a^2},$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{\sin\varphi}{a^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{ds^2} = \frac{1}{a^2}(1+\cos\varphi),$$

en remarquant que $\frac{d\varphi}{ds}$ est nul avec y, c'est-à-dire pour $\varphi = 180°$. On tire de là

$$ds = \frac{a}{2}\frac{d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}},$$

$$dy = -a\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi,$$

et, comme y est nul pour $\varphi = 180°$, il vient

$$(a)\qquad y = 2a\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Nous avons maintenant

$$dx = -\frac{a}{2}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}} = -a\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right)d\varphi,$$

d'où

$$x = -a\left(2\sin\frac{\varphi}{2} - \log\frac{1+\tang\frac{\varphi}{4}}{1-\tang\frac{\varphi}{4}}\right) + \text{const.}$$

Mais on doit avoir $x = 0$ pour $\varphi = \alpha$, et par suite

$$(b) \qquad x = a\left[2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right) + \log\left(\frac{1+\tang\frac{\alpha}{4}}{1-\tang\frac{\alpha}{4}} \times \frac{1-\tang\frac{\varphi}{4}}{1+\tang\frac{\varphi}{4}}\right)\right].$$

Comme x est infini pour $\varphi = 180°$, on voit qu'au point de vue géométrique la courbe est asymptotique au niveau; cette courbe est d'ailleurs complètement définie par les équations (a) et (b).

Si nous désignons par y_0 l'abaissement du liquide au contact de la lame, nous avons

$$(c) \qquad y_0 = 2a\cos\frac{\alpha}{2},$$

soit $y_0 = 3^{\text{mm}},22$ pour le mercure et une lame de verre.

L'élévation de l'eau au contact d'une lame de verre est

$$y_0 = 5^{\text{mm}},652.$$

6. *Forme de la surface d'un liquide entre deux lames verticales parallèles, dont l'une est mouillée et l'autre non mouillée par le liquide.*

Soient (*fig.* 4)

xx' le profil du niveau;

aOa' celui de la surface du liquide entre les deux lames, la partie Oa de ce profil correspondant à la direction de Ox se trouvant au-dessus du niveau;

Oy, Oy' les portions de la verticale du point O situées respectivement au-dessus et au-dessous du niveau.

Nous rapporterons respectivement les courbes Oa, Oa' aux axes Oy, Ox et Oy', Ox', en conservant les notations du numéro précédent.

Nous avons, pour Oa,

$$\frac{dy}{ds} = \sin\varphi, \quad \frac{dx}{ds} = \cos\varphi$$

et

$$(a) \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{y}{a^2},$$

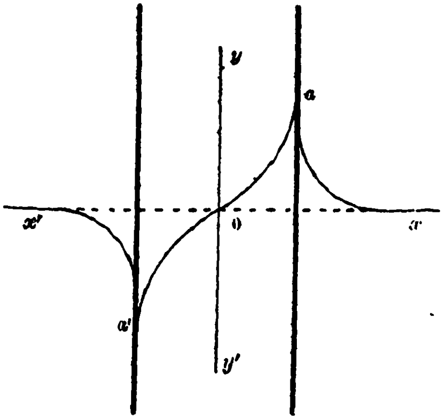
d'où

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{\sin\varphi}{a^2},$$

$$(b) \qquad \frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{ds^2} = -\frac{\cos\varphi}{a^2} + \text{const.}$$

Si nous désignons par φ_0 la valeur de φ correspondant au point O,

Fig. 4.



comme, d'après la formule (a), on a $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ pour $y = 0$, la formule (b) se réduit à

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{ds^2} = \frac{1}{a^2}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi),$$

d'où

$$ds = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}},$$

$$dx = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}},$$

$$dy = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}}$$

et

$$(c) \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a}{\sqrt{2}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\cos\varphi_0\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right), \\ y &= a\sqrt{2}\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Soit x_1 la distance du point O à la lame considérée; nous aurons

$$(f)\quad x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\cos\varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\frac{\Pi}{2}-\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\frac{\Pi}{2}-\alpha} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right).$$

En accentuant les lettres a, x_1 et α pour l'autre lame, nous aurons de même

$$x'_1 = \frac{a'}{\sqrt{2}}\left(\cos\varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\frac{\Pi}{2}-\alpha'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\frac{\Pi}{2}-\alpha'} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right).$$

Enfin, si nous désignons par $2e$ la distance $x_1 + x'_1$ des deux lames, l'angle φ_0 sera déterminé par l'équation

$$(g)\quad \left\{\begin{aligned} & a\left(\cos\varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\frac{\Pi}{2}-\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\frac{\Pi}{2}-\alpha} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right) \\ & \quad + a'\left(\cos\varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\frac{\Pi}{2}-\alpha'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_{\varphi_0}^{\frac{\Pi}{2}-\alpha'} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right) = 2e\sqrt{2}, \end{aligned}\right.$$

qui dépend généralement de s fonctions elliptiques, et dont la solution ne peut se trouver que dans chaque cas particulier.

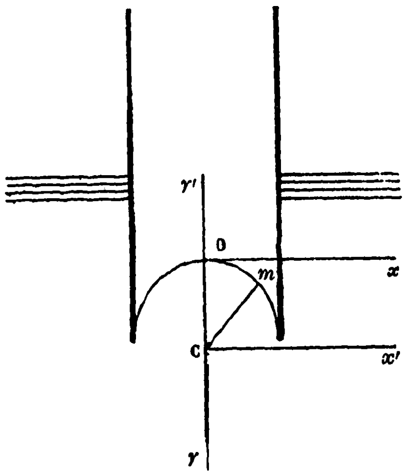
Supposons que les deux liquides soient l'eau et le mercure et que les deux lames soient en verre; nous aurons $\alpha = 0$ et, à $30'$ près, $\alpha' = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$\begin{aligned} & \frac{2{,}286}{\sqrt{2}}\left(2\log\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} + 4\cos\frac{\pi}{2} - 2\log\operatorname{tang}\frac{\varphi_0}{2} - 4\cos\frac{\varphi_0}{2}\right) \\ & \quad - 1{,}811\left(\cos\varphi_0 \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} - \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}\, d\varphi\right) = 2e\sqrt{2}, \end{aligned}$$

équation dont il nous paraîtrait superflu de faire des applications numériques.

7. *Forme d'un liquide entre deux lames parallèles de même nature.* — Prenons pour origine des coordonnées le point maximum O du profil de la surface, et soient Ox la tangente en ce point et Oy la verticale

Fig. 5.



du même point. Conservons d'ailleurs les notations précédentes. L'équation (2) nous donne

$$(a) \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{a^2}(y + \lambda),$$

λ désignant ici la hauteur du point O en contre-bas du niveau.

On déduit de là

$$(b) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{ds^2} &= \frac{1}{a^2}\sin\varphi, \\ \frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{ds^2} &= \frac{1}{a^2}(C - \cos\varphi), \end{aligned} \right.$$

C étant une constante au moyen de laquelle λ s'exprimera, en remarquant que les formules (a), (b) doivent donner la même valeur pour $\frac{d\varphi}{ds}$, en y supposant $y = 0$ et $\varphi = 0$, d'où

$$(c) \qquad \lambda = a\sqrt{2(C - 1)}.$$

De l'équation (b) on déduit successivement

$$
(d)\ .\qquad \left\{
\begin{aligned}
ds &= \frac{a}{\sqrt{2}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{C-\cos\varphi}},\\
dy &= \frac{a}{\sqrt{2}}\,\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{C-\cos\varphi}},\\
y &= a\sqrt{2}\left(\sqrt{C-\cos\varphi}+\sqrt{C-1}\right),\\
dx &= \frac{a}{\sqrt{2}}\,\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{C-\cos\varphi}},\\
x &= \frac{a}{2}\left(e\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{C-\cos\varphi}}-\int_0^{\varphi}\sqrt{-C\cos\varphi}\,d\varphi\right),
\end{aligned}
\right.
$$

et x s'exprime au moyen de fonctions elliptiques. Si $2e$ désigne la largeur des lames, on a, pour déterminer C et par suite λ, l'équation

$$
e=\frac{a}{2}\left(C\int_0^{\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{-C\cos\varphi}}-\int_0^{\alpha}\sqrt{C-\cos\varphi}\,d\varphi\right),
$$

que l'on ne pourra résoudre que par tâtonnements.

Mais, lorsque les lames sont très rapprochées l'une de l'autre, on peut éluder l'emploi des fonctions elliptiques en opérant par approximation, comme nous allons le faire voir.

8. *Deux lames parallèles et verticales sont très rapprochées l'une de l'autre.* — L'ordonnée y étant très petite par rapport à e, le profil de la surface est peu différent d'un arc de cercle, dont le centre C est situé sur Oy, et dont nous déterminerons le rayon ι par la double condition que l'arc de cercle passe par le point O et les points de raccordement.

Soient

Oy' le prolongement de Oy au delà de O;
Cx' l'horizontale du centre C;
$r=\iota(1+u)$ le rayon vecteur mené de ce centre au point m;
θ l'angle formé par ce rayon avec Cy'.

Nous supposerons que u et ses dérivées sont assez petits pour que l'on puisse s'en tenir aux termes du premier ordre.

Si λ continue à désigner la hauteur du niveau au-dessus du sommet O, la hauteur au-dessus du point m est, à très peu de chose près,

$$\lambda + \iota - \iota \cos\theta.$$

Nous avons ainsi

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\iota} - \frac{1}{\iota}\left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u\right) = \frac{\lambda + \iota - \iota\cos\theta}{a^2}.$$

Si nous posons, pour abréger,

$$(a) \qquad \frac{\iota(\lambda + \iota)}{a^2} - 1 = \frac{\iota^2 \beta}{a^2},$$

nous aurons

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u + \frac{\iota^2}{a^2}(\beta - \cos\theta) = 0,$$

d'où

$$(b) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\iota^2}{a^2}\left(-\beta + \dfrac{\theta}{2}\sin\theta + \mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B}\sin\theta\right), \\[2ex] \dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{\iota^2}{a^2}\left[\dfrac{\theta}{2}\cos\theta + \sin\theta\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{A}\right) + \mathrm{B}\cos\theta\right], \end{cases}$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Mais pour $\theta = 0$ nous devons avoir $u = 0$ par hypothèse, et de plus $\dfrac{du}{d\theta} = 0$, pour exprimer que la tangente en O est horizontale.

Les formules (b) se réduisent alors aux suivantes :

$$(b') \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\iota^2}{a^2}\left[\beta(\cos\theta - 1) + \dfrac{\theta}{2}\sin\theta\right], \\[2ex] \dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{\iota^2}{a^2}\left[\dfrac{\theta}{2}\cos\theta + \sin\theta\left(\dfrac{1}{2} - \beta\right)\right]. \end{cases}$$

L'angle ψ, formé par la tangente en m avec Cy', est donné par la formule

$$(c) \qquad \psi = \frac{\pi}{2} - \frac{du}{d\theta} + \theta.$$

Si θ' est la valeur de θ correspondant au raccordement pour lequel on a $\psi = \pi - \alpha$, nous aurons

$$\theta' = \frac{\pi}{2} - \alpha + \left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta'},$$

ou, aux termes du second ordre près,

$$\theta' = \frac{\pi}{2} - \alpha + \varepsilon,$$

ε étant la valeur de $\frac{du}{d\theta}$ pour $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Désignons par u' la valeur de u pour $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$; comme u est nul au point de raccordement, nous aurons

$$u' + \varepsilon^2 = 0$$

ou

$$\beta(\sin\alpha - 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\alpha + \frac{\iota^2}{a^2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\alpha + \cos\alpha\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\right]^2 = 0.$$

Une première approximation donne

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$$

et, en tenant compte des termes du premier ordre et remarquant que

$$\iota = \frac{e}{\sin\theta'} = \frac{e\cos\alpha}{\cos\alpha},$$

$2e$ étant la distance des lames,

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} + \frac{e^2}{a^2\cos\alpha}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}\right) + \frac{\cos\alpha}{2}\right]^2.$$

L'équation (a) donne alors

$$(d) \qquad \lambda = \frac{a^2}{e}\cos\alpha + \frac{e}{2}\,\frac{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 - \sin\alpha},$$

aux termes du second ordre près.

Pour l'eau et le verre on trouve, pour la hauteur du sommet du ménisque au-dessus du niveau,

$$\lambda = \frac{a^2}{e} + \frac{e\Pi}{4} = \frac{7,79}{e} + 0,78e.$$

Pour le mercure et le verre on trouve, pour la hauteur du sommet du ménisque en contre-bas du niveau,

$$\lambda = 0,701\,\frac{a^2}{e} + 1,21\,e = \frac{2,29}{e} + 1,21\,e.$$

9. *De la surface capillaire dans un tube circulaire d'un faible diamètre.* — La forme du ménisque étant très sensiblement sphérique, nous rapporterons sa surface à celle d'une sphère tangente dont la position du centre et la grandeur du rayon peuvent être, dans certaines limites, considérées comme indéterminées, et que nous fixerons en raison des circonstances qui se produiront.

Considérons une section faite par un plan passant par l'axe, et conservons les notations du numéro précédent; nous aurons toujours

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\iota} - \frac{1}{\iota}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right), \quad \psi = \theta + 90^\circ - \frac{du}{d\theta}.$$

La surface étant de révolution, R' est la portion de la normale déterminée par l'axe Cy', et nous avons

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin\psi}{\iota(1+u)\cos\theta} = \frac{1}{\iota}\left(-u + \frac{du}{d\theta}\operatorname{tang}\theta + 1\right).$$

La hauteur du point m en contre-bas du niveau étant

$$\lambda + \iota - \iota\cos\theta,$$

nous aurons

$$\frac{2}{\iota} - \frac{1}{\iota}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{du}{d\theta}\operatorname{tang}\theta + 2u\right) = \frac{\lambda + \iota(1-\cos\theta)}{a^2},$$

d'où

$$(a) \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} - \operatorname{tang}\theta\frac{du}{d\theta} + 2u + \frac{\lambda r + \iota^2[(1-\cos\theta) - 2a^2)}{a^2} = 0.$$

Posant

$$(b) \qquad \frac{\lambda r + \iota^2 - 2a^2}{a^2} = \frac{\iota^2\beta}{a^2},$$

l'équation (a) devient

$$(c) \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} - \operatorname{tang}\theta\frac{du}{d\theta} + 2u + \frac{\iota^2}{a^2}(\beta - \cos\theta) = 0.$$

Plus généralement, considérons l'équation

$$(3) \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} - \operatorname{tang}\theta\frac{du}{d\theta} + 2u + \mathrm{F}(\theta) = 0,$$

$\mathrm{F}(\theta)$ étant une fonction quelconque de θ, en raison de ce qu'elle se présentera plusieurs fois dans ce qui suit, et proposons-nous d'en trouver l'intégrale générale.

Posant

$$u = \mathrm{U}\sin\theta,$$

l'équation (3) se transforme dans la suivante,

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{d\theta^2} + \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}(2\cot\theta - \operatorname{tang}\theta) + \frac{\mathrm{F}(\theta)}{\sin\theta} = 0,$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta\cos\theta}\left[\mathrm{A} - \int \mathrm{F}(\theta)\sin\theta\cos\theta\, d\theta\right],$$

$$\mathrm{U} = \mathrm{B} + \mathrm{A}\left(-\frac{1}{\sin\theta} + \log\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}\right) - \int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}\int \mathrm{F}(\theta)\sin\theta\cos\theta\, d\theta,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

On a enfin, pour l'intégrale cherchée,

$$(4)\qquad \begin{cases} u = \mathrm{B}\sin\theta + \mathrm{A}\left(-1 + \sin\theta\log\dfrac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}\right) \\ \qquad - \sin\theta\displaystyle\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}\int\mathrm{F}(\theta)\sin\theta\cos\theta\,d\theta. \end{cases}$$

Revenons maintenant à l'équation (c); comme elle est satisfaite par $u = -\frac{\iota^2\beta}{2a^2}$, son intégrale s'obtiendra en ajoutant à cette valeur l'expression (4), en y supposant

$$\mathrm{F}(\theta) = -\frac{\iota^2}{a^2}\cos\theta,$$

ce qui donne

$$u = -\frac{\iota^2\beta}{2a^2} + \mathrm{B}\sin\theta + \mathrm{A}\left(-1 + \sin\theta\log\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}\right) + \frac{\iota^2}{3a^2}(\theta\sin\theta + \cos\theta).$$

Il faut que A soit nul, car autrement u deviendrait infini pour $\theta = 90°$; il nous reste donc

$$(d)\qquad u = -\frac{\iota^2\beta}{2a^2} + \mathrm{B}\sin\theta + \frac{\iota^2}{3a^2}(\theta\sin\theta + \cos\theta),$$

d'où

$$(e)\qquad \frac{du}{d\theta} = \mathrm{B}\cos\theta + \frac{\iota^2}{3a^2}\theta\cos\theta.$$

Or cette dernière valeur doit être nulle pour $\theta = 0$, puisqu'au point correspondant la tangente est horizontale, ce qui exige que B soit nul. Nous avons donc finalement

$$(d')\qquad u = \frac{\iota^2}{a^2}\left(-\frac{\beta}{2} + \frac{\theta\sin\theta + \cos\theta}{3}\right),$$

$$(e')\qquad \frac{du}{d\theta} = \frac{\iota^2}{3a^2}\theta\cos\theta.$$

Soit θ' la valeur de θ correspondant au point de raccordement par lequel il nous est permis de faire passer le cercle de comparaison; nous aurons

$$(f)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\beta}{2}+\frac{\theta'\sin\theta'+\cos\theta'}{3}=0,\\ &\theta'=\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\iota^2}{3a^2}\theta'\cos\theta',\end{aligned}\right.$$

équations qui feront connaître θ' et β. Mais comme, dans la formule (d), β est multiplié par le facteur $\frac{\iota^2}{a^2}$ supposé très petit, nous l'obtiendrons avec une approximation suffisante en supposant $\theta'=\frac{\pi}{2}-\alpha$ dans la première des formules (f), ce qui donne

$$\beta=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\alpha+\sin\alpha\right].$$

En appelant $2e$ le diamètre du tube, on a

$$\iota=\frac{e}{\sin\theta'}=\frac{e}{\cos\alpha},$$

et la formule (b) donne

$$\lambda=\frac{2a^2}{e}\cos\alpha+\frac{e}{\cos\alpha}\left\{\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\alpha+\sin\alpha\right]-1\right\}$$

pour la distance du sommet du ménisque au niveau.

10. *Expression du volume d'un liquide compris entre sa surface libre et un plan horizontal déterminé, quelle que soit la forme de la section du tube.* — Nous supposerons que la surface libre (S) présente sa convexité vers le plan, et nous désignerons par A la section du tube et par P le périmètre du contour de la surface (S).

En nous reportant au n° **1**, nous pourrons écrire

$$(a)\qquad \mathrm{K}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}'}\right)=\Pi y-\mathrm{C},$$

$\frac{C}{\Pi}$ étant la hauteur du plan au-dessus du niveau du liquide extérieur au tube.

Concevons que l'on décompose la surface capillaire en éléments par des lignes de courbure infiniment voisines dans chacune des deux séries, et soient $d\omega$ un de ces éléments et χ l'angle que forme sa normale avec la verticale. Nous aurons pour le volume cherché, en ayant égard à la formule (a),

$$(b)\qquad V = \int y\cos\chi\, d\omega = \frac{K}{\Pi}\int\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\cos\chi\, d\omega + \frac{C}{\Pi}A.$$

Considérons maintenant une surface (S′) parallèle à (S) et qui en soit distante d'une quantité infiniment petite ε. Les normales aux sommets de $d\omega$ détermineront dans (S′) un élément $d\omega'$ dont les côtés seront dans les rapports $\frac{R-\varepsilon}{R}$, $\frac{R'-\varepsilon}{R'}$ avec ceux de $d\omega$.

On a donc

$$\frac{d\omega'}{d\omega} = \frac{(R-\varepsilon)(R'-\varepsilon)}{RR'} = 1 - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\varepsilon,$$

et la formule (b) peut s'écrire ainsi :

$$V = \frac{K}{\Pi\varepsilon}\int(d\omega - d\omega')\omega\chi + \frac{C}{\Pi}A.$$

Or l'intégrale représente la différence des projections horizontales des aires de (S) et (S′), ou la projection de la zone déterminée dans (S) par les normales menées aux points du contour de (S′), qui est égale à $P\varepsilon\cos\alpha$. On a donc

$$(5)\qquad V = \frac{KP}{\Pi}\cos\alpha + \frac{C}{\Pi}A.$$

Si le tube est circulaire et si le plan sécant est le niveau extérieur du liquide, on a

$$C = 0, \quad P = 2\pi r,$$

et, en posant comme plus haut $\frac{K}{\Pi} = a^2$, on a

$$V = a^2 \times 2\pi e\cos\alpha.$$

En désignant par λ la hauteur moyenne de (S) au-dessus du niveau, on aura

$$V = \Pi e^2 \lambda,$$

d'où

$$\lambda = \frac{2a^2 \cos\alpha}{e},$$

ce qui est conforme au résultat obtenu au numéro précédent, aux termes en e près.

Dans le cas de deux lames parallèles on a

$$V = a^2 \Pi e \cos\alpha,$$

d'où λ, qui est moitié moindre que dans le cas d'un tube.

11. *Liquides superposés dans un tube circulaire capillaire.* — Considérons un tube plongé dans un liquide (A_1) dont la portion comprise dans ce tube soit surmontée d'un volume déterminé d'un autre liquide (A) de moindre densité.

Nous supposerons que (A) mouille et que (A_1) ne mouille pas la paroi intérieure du tube. Le même raisonnement s'appliquera à toute autre hypothèse.

Considérons une section faite par un plan passant par l'axe du tube.

Soient

aOa, $a_1O_1a_1$ les profils des ménisques supérieur et inférieur;
OO_1 l'axe du tube;
II l'intersection, avec sa paroi intérieure, du plan de niveau extérieur;
y, y_1 les distances de deux points m, m_1 de aOa, $a_1O_1a_1$ situés sur la même verticale à la droite II;
n l'intersection de mm_1 avec II;
C la pression censée constante exercée sur la section II.

Nous admettrons pour (A) les notations qui précèdent, en les affectant de l'indice 1 pour (A_1).

Concevons un cylindre vertical d'une section infiniment petite dont mm_1 serait l'axe.

L'action du ménisque aOa s'ajoute à la réaction C en n pour faire équilibre au poids de ce cylindre, d'où la relation

$$(a) \qquad K\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=\Pi y - C.$$

On a de même

$$(b) \qquad K_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R'_1}\right)=\Pi_1 y_1 - C.$$

Le volume compris entre les surfaces aOa et $a_1O_1a_1$ est donné et peut être représenté par

$$(c) \qquad \Pi e^2 H,$$

H étant la portion de la longueur du tube qu'occuperait le liquide dans le tube sans les effets de la capillarité. D'après le numéro précédent, les volumes $IaOaI$, $I_1a_1O_1a_1I_1$ ont respectivement pour expressions

$$\frac{K.2\frac{\pi}{2}e}{\Pi}\cos\alpha+\frac{C\frac{\pi}{2}e^2}{\Pi},$$

$$\frac{K.2\pi e}{\Pi_1}\cos\alpha_1+\frac{C\pi e^2}{\Pi_1};$$

en égalant leur somme à l'expression (c), on trouve

$$(d) \qquad C=\frac{H-\frac{2}{e}\left(\frac{K\cos\alpha}{\Pi}+\frac{K_1\cos\alpha_1}{\Pi_1}\right)}{\frac{1}{\Pi}+\frac{1}{\Pi_1}}.$$

En portant cette valeur dans la formule (b), on obtiendra une équation analogue à celle que nous avons intégrée par approximation au n° 9.

Si par approximation on prend $R_1=R'_1=e\cos\alpha_1$, la formule (b) donne, pour la valeur moyenne de la distance du ménisque inférieur au niveau,

$$y_1=\frac{2K\cos\alpha_1}{\Pi e}+\frac{H-\frac{2}{e}\left(\frac{\cos K\alpha}{\Pi}+\frac{K_1}{\Pi_1}\cos\alpha_1\right)}{\frac{1}{\Pi}+\frac{1}{\Pi_1}},$$

ou encore

$$y_1 = \frac{2a_1^2 a_1 \alpha_1}{e} + \frac{\mathrm{H} - \frac{2}{e}(a^2\cos\alpha + a_1^2\cos\alpha_1)}{1 + \frac{\Pi_1}{\Pi}}.$$

La même méthode s'applique au cas où plusieurs liquides se superposeraient dans un tube.

12. *Forme d'une très petite goutte d'un liquide reposant sur un plan horizontal qu'elle ne mouille pas.* — Nous aurons dans ce cas

$$a^2\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'}\right) = y + \lambda,$$

λ étant une constante dont la valeur résultera de la solution du problème. Si les dimensions de la goutte sont très petites, il en sera de même de y et en dehors de sa zone de contact avec le plan.

En nous reportant au n° 9, on voit que la forme de la goutte est donnée par l'équation (c), dans laquelle β remplace l'inconnue λ. On en déduit de la même manière

$$(a)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\iota^2}{a^2}\left(-\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\theta\sin\theta + \cos\theta}{3}\right), \\ \dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{\iota^2}{3a^2}\theta\cos\theta. \end{cases}$$

Si V désigne l'angle que forme la tangente avec le rayon vecteur, on a

$$\mathrm{V} = 90^\circ - \frac{du}{d\theta}.$$

Soit θ' la valeur de θ correspondant au raccordement avec le plan; on a

$$\mathrm{V} = \theta' - 90^\circ + \alpha,$$

d'où

$$(b)\qquad \theta' = 180^\circ - \alpha - \frac{\iota^2}{3a^2}\theta'\cos\theta,$$

et, en négligeant le carré de $\frac{\iota^2}{a^2}$,

$$\theta' = 180^\circ - \alpha + \frac{\iota^2}{23a^2}(\pi - \alpha)\sin\alpha.$$

Nous supposerons que l'on prenne pour ι le rayon de la sphère équivalente à la goutte, et qui est par conséquent une donnée de la question.

Nous devrons exprimer que l'excès de l'aire de la section méridienne sur celle d'un grand cercle est nulle, ou que l'on a

$$\iota \int_0^{\theta'} u\,d\theta - \frac{\iota(1+u')\sin\theta'\cos\theta'}{2} - \frac{\iota}{2}(\pi - \theta') = 0,$$

u' étant la valeur de u correspondant à $\theta = \theta'$.

On déduit de là

$$\frac{\beta}{2}\frac{\iota^2}{a^2}(-\theta' + \sin\theta'\cos\theta') - \frac{\sin 2\theta'}{4} - \frac{\pi - \theta'}{2}$$
$$+ \frac{\iota^2}{a^2}\left[\frac{2\sin\theta' - \theta'\cos\theta'}{3} - \frac{1}{6}(\theta'\sin\theta' + \cos\theta')\sin\theta'\cos\theta'\right] = 0,$$

équation d'où l'on déduira $\frac{\beta\iota^2}{a^2}$ qui, comme on devait s'y attendre, n'est pas une quantité très petite, puisque c'est devant son équivalent λ que nous avons négligé des termes.

13. *Goutte très large.* — L'équation de la section méridienne de la surface capillaire de révolution peut se mettre sous la forme

$$(a) \qquad \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\sin\varphi}{x} = \frac{y+\lambda}{a^2},$$

φ étant l'angle que forme la tangente avec l'axe des x; cette équation ne paraît pas pouvoir s'intégrer, et, dans ce qui suit, nous devrons nous contenter d'approximations.

Nous placerons l'origine au sommet de la courbe, en prenant pour origine l'horizontale de ce point.

Si une étendue assez grande φ reste suffisamment petite pour que l'on puisse négliger le carré de cet angle, ce qui permet de supposer $ds = dx$, $\varphi = \sin\varphi = \operatorname{tang}\varphi = \frac{dy}{dx}$, l'équation (a) prend alors la forme suivante,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{(y+\lambda)}{a^2} = 0,$$

équation dont l'intégrale est

$$y + \lambda = A_1 \int_0^\pi \left(e^{\frac{x}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{x}{\omega}\cos\omega}\right) d\omega$$
$$+ A_2 \int_0^\pi \left(e^{\frac{x}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{x}{a}\cos\omega}\right) \log(x \sin^2\omega)\, d\omega,$$

A_1 et A_2 étant deux constantes arbitraires. Mais A_2 est nul, car autrement y serait infini pour $x = 0$, et, comme y est nul pour $x = 0$, il vient

$$(b) \qquad y + \lambda = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\pi \left(e^{\frac{x}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{x}{a}\cos\omega}\right) d\omega \quad (^1),$$

d'où

$$(c) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\lambda}{2\pi a} \int_0^\pi \left(e^{\frac{x}{a}\cos\omega} - e^{-\frac{x}{a}\cos\omega}\right) \cos\omega\, d\omega,$$

et l'on voit que $\frac{dy}{dx}$ est nul pour $x = 0$, ce qui devait être.

Supposons que la goutte soit assez large pour qu'une valeur de φ_1 de φ, inférieure à 20°, corresponde à une valeur l relativement grande de x, et soit y_1 la valeur correspondante de y. Nous aurons

$$(d) \qquad \left\{ \begin{aligned} & y_1 + \lambda = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\pi \left(e^{\frac{l}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{l}{a}\cos\omega}\right) d\omega \\ & \operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{\lambda}{2\pi a} \int_0^\pi \left(e^{\frac{l}{a}\cos\omega} + e^{-\frac{l}{a}\cos\omega}\right) \cos\omega\, d\omega. \end{aligned} \right.$$

---

(1) Poisson (p. 213) pose une formule tout autre, sans faire connaître de quelle manière il y est arrivé; mais elle est inexacte, car elle ne satisfait pas à l'équation différentielle.

Mais, comme λ est inconnue, la valeur de l ne peut pas être fixée *a priori* et est subordonnée à la solution du problème.

L'équation (a) donne alors, par approximation,

$$(e)\qquad \sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dy}+\frac{1}{l}\right)=\frac{y+\lambda}{a^2}.$$

Quoique sous une forme plus simple, elle ne paraît pas pouvoir s'intégrer. Nous sommes ainsi réduit à déterminer des valeurs approchées de φ et de x en fonction de y, en négligeant le carré de $\frac{1}{l}$.

Si nous posons $\varphi = u + \frac{v}{l}$, et si nous identifions après la substitution dans (c) les termes indépendants et dépendants de $\frac{1}{l}$, nous trouvons

$$(f)\qquad \sin u\frac{du}{dy}=\frac{y+\lambda}{a^2},$$

$$(f')\qquad \frac{dv}{dy}\sin u + v\cos u\frac{du}{dy}=0.$$

Si C′ est une constante arbitraire, la dernière de ces équations donne

$$v=\frac{C'}{\sin u},$$

et l'on a, par suite,

$$(g)\qquad \sin\varphi=\sin u+\frac{C'}{l}\cot u.$$

Mais u déduit de (f) renfermera une constante arbitraire C, et l'on sera libre d'établir entre C et C′ telle relation que l'on jugera convenable, pourvu que $y=y_1$, l'équation (g) donne $\varphi=\varphi_1$. Il nous est donc permis de supposer $C'=0$, et, en intégrant l'équation (f), on trouve

$$\cos u=\cos\varphi=\cos\varphi_1-\frac{1}{2a^2}[(y+\lambda)^2-(y_1+\lambda)^2],$$

d'où

$$(h)\qquad x-l=\int_{y_1}^{y}\cot\varphi\,d\varphi=\int_{y_1}^{y}\frac{\cos\varphi_1-\frac{1}{2a^2}[(y+\lambda)^2-(y_1+\lambda)^2]}{\sqrt{1-\left\{\cos\varphi_1-\frac{1}{2a^2}[(y+\lambda)^2-(y_1+\lambda)]^2\right\}^2}}dy,$$

intégrales réductibles en fonctions elliptiques.

Soient h la hauteur de la goutte ou l'ordonnée du point de raccordement correspondant à $\cos\varphi = -\cos\alpha$. Nous aurons

$$(i) \qquad \cos\varphi_1 - \frac{1}{2a^2}[(h+\lambda)^2 - (y_1+a)^2] = -\cos\alpha,$$

et l'équation (h) fera connaître la valeur x' de x du point de raccordement.

On conçoit que l'on puisse exprimer que le volume de la goutte est donné, ce qui établira entre λ et l une relation qui, jointe à la seconde des formules (2), permettra de déterminer ces constantes. Il faudra s'assurer ultérieurement que l est relativement grand, comme on l'a supposé.

14. *Liquides soustraits à l'action de la pesanteur.* — Dans ce qui suit, nous considérerons avec M. Plateau une masse liquide en suspension dans un autre liquide de même densité avec laquelle elle ne peut se mélanger.

Si la masse considérée est en repos, elle affectera la forme sphérique. Mais si on lui imprime un mouvement de rotation, selon que la vitesse sera au-dessous ou au-dessus d'une certaine limite, elle deviendra un sphéroïde aplati, ou elle se décomposera en sphéroïde et un anneau tournant autour de ce sphéroïde.

Soient n la vitesse de rotation; x la distance d'un point quelconque de la surface à l'axe, le potentiel de la force centrifuge sera $\frac{n^2x^2}{2}$; si l'on attribue à a la même signification que ci-dessus, et si l'on pose $b^3 = \frac{2a^2y}{n^2}$, l'équation de la surface sera

$$(1) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} = \frac{1}{b^3}(x^2 + \lambda),$$

λ étant une constante.

Elle peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d\varphi}{ds} + \frac{\sin\varphi}{x} = \frac{1}{b^3}(x^2 + \lambda),$$

ou, en multipliant par x,

$$\frac{dx\sin\varphi}{dx} = \frac{1}{b^3}(x^2+\lambda).$$

On déduit de là, en appelant C une constante arbitraire,

$$\sin\varphi = \frac{1}{b^3}\left(\frac{x^3}{4}+\frac{\lambda x}{2}+\frac{C}{x}\right) \tag{2}$$

et

$$y = \int \operatorname{tang}\varphi\, dx = \frac{1}{b^3}\int \frac{\frac{x^3}{4}+\frac{\lambda x}{2}+\frac{C}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{b^6}\left(\frac{x^3}{4}+\frac{\lambda x}{2}+\frac{C}{x}\right)}}\, dx$$

pour l'intégrale de l'équation proposée.

15. *La surface diffère peu d'une sphère.* — C'est ce qui a lieu quand la vitesse angulaire est suffisamment faible, et alors l'équation de la surface pourra se mettre sous la forme

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} - \operatorname{tang}u\frac{du}{d\theta} + 2u + \frac{\iota^3}{b^3}(\sin^2\theta+\lambda) = 0,$$

et a pour intégrale

$$u = B\sin\theta - \frac{\lambda\iota^3}{2b^3} + A\left(-1+\sin\theta\log\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$-\frac{\iota^3}{4b^3}\sin\theta\log\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}} + \frac{\iota^3}{4b^3}\sin^2\theta.$$

Pour que u ne soit pas infini pour $\theta = 90^\circ$, il faut que les termes $\log\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}$ disparaissent ou que l'on ait

$$A = \frac{\iota^3}{4b^3},$$

et alors, en comprenant la constante de $-\frac{\iota^3}{4b^3}$ dans l'indéterminée $-\frac{\lambda\iota^3}{2b^3}$, il vient

$$u = B\sin\theta - \frac{\lambda\iota^3}{2b^3} + \frac{\iota^3}{4b^3}\sin^2\theta$$

et

$$\frac{du}{d\theta} = B\cos\theta - \frac{\iota^3}{2b^3}\sin\theta\cos\theta.$$

Pour que la tangente au sommet soit perpendiculaire à l'axe de rotation, il faut que B soit nul ou que l'on ait $B = 0$, et par suite

$$u = -\frac{\lambda\iota^3}{2b^3} + \frac{\iota^3}{4b^3}\sin^2\theta.$$

Si nous prenons pour ι le rayon de la sphère équivalent au sphéroïde, il faut que $\int_0^\Pi u^2\,d\theta$ soit nul, ce qui donne

$$\gamma = \frac{1}{4}$$

et

$$u = -\frac{\iota^3}{4b^3}\left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta\right),$$

En coordonnées rectangulaires, nous aurons pour l'équation de la surface,

$$x^2 + y^2 = \iota^2(1+u)^2 = \iota^2(1+2u)$$

ou

$$x^2 + y^2 = \iota^2\left(1 - \frac{\iota^3}{4b^3}\right) + \frac{\iota^3}{b^3}\,\frac{x^2}{x^2+y^2},$$

ou encore, aux termes près du second ordre,

$$x^2 + y^2 = \iota^2\left(1 - \frac{\iota^3}{4b^3}\right) + \frac{\iota}{b^3}x^2,$$

ce qui est l'équation d'un ellipsoïde en révolution aplati dont il est facile de trouver les axes.

16. *La surface diffère d'un tore.* — Nous supposerons qu'il est ainsi, sauf vérification ultérieure, lorsque la distance de la masse à l'axe de rotation est très grande par rapport aux dimensions transversales de l'anneau.

Soient c le centre du cercle générateur; l sa distance à l'axe, nous avons

$$x = l + \iota \sin\theta\,;$$

en désignant par C une constante

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin\theta}{l + \iota\sin\theta} = \frac{1}{l}\left[\sin\theta - \frac{\iota}{2l}(1 - \cos 2\theta)\right].$$

Par suite,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \left(\frac{2l\iota^2}{b^3} - \frac{1}{l}\right)\sin\theta - \frac{\iota^2}{2l^2}\cos 2\theta - C = 0;$$

d'où

$$u = C + \frac{1}{2}\left(\frac{2l\iota^2}{b^3} + \frac{\iota}{l}\right)\theta\cos\theta - \frac{\iota^2}{8l^2}\cos 2\theta + A\cos\theta + B\sin\theta,$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{2l\iota^2}{b^3} - \frac{\iota}{l}\right)(\cos\theta - \theta\sin\theta) + \frac{\iota^2}{4l^2}\sin 2\theta - A\sin\theta + B\cos\theta.$$

On doit avoir $\dfrac{du}{d\theta} = 0$ pour $\theta = 90^\circ$, d'où

$$A = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{2l\iota^2}{b^3} - \frac{\iota}{l}\right).$$

Par suite,

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{2l\iota^2}{b^3} - \frac{\iota}{l}\right)\left(\cos\theta - \theta\sin\theta - \frac{\pi}{2}\sin\theta\right) + \frac{\iota^2}{8l^2}\cos 2\theta + B\sin\theta + C;$$

B et C restent indéterminés, en raison même de l'origine qui n'a pas été fixée. Si nous la plaçons au milieu du diamètre horizontal, u devra avoir la même valeur pour $\theta = 90^\circ$ et $\theta = -90^\circ$, d'où

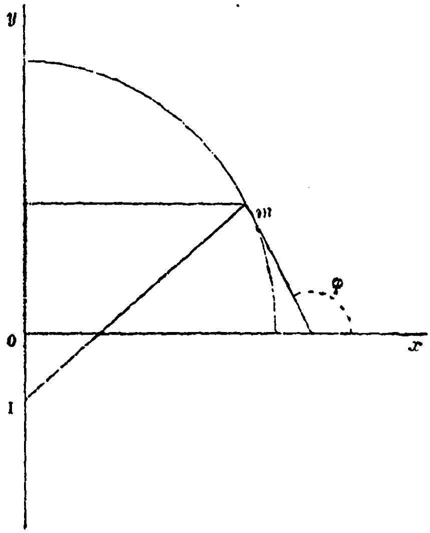
$$C = 0,\quad B = \frac{1}{2}\left(\frac{2b\iota^2}{b^3} - \frac{\iota}{l}\right)\Pi + \frac{\iota^2}{8l^2}.$$

§ III. — *Des liquides uniquement soumis à leurs actions mutuelles.*

Si l'on introduit une masse déterminée M d'un liquide A dans un milieu formé d'un autre liquide B de même densité que le précédent, mais avec lequel il ne peut pas se mélanger, A se trouve dans les conditions d'un liquide uniquement soumis à ses actions mutuelles, et c'est ainsi que M. Plateau a obtenu expérimentalement, suivant les conditions qu'il imposait à M, les différentes formes que peut affecter un solide de révolution dont la moyenne courbure est constante. Nous avons ainsi à nous poser un problème résolu déjà depuis longtemps par bien des savants, mais en nous efforçant à en simplifier la solution.

17. *Équation générale des surfaces de révolution dont la moyenne courbure est constante.* — L'équation (1) du n° **2** nous donnera l'équa-

Fig. 6.



tion différentielle de la surface de révolution que peut affecter une masse liquide soustraite à l'action des forces extérieures en y supposant $\mathcal{J} = 0$, et, en représentant la constante $\frac{C}{\mu}$ par $2A$, nous aurons

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 2A.$$

Soient (*fig.* 6)

Oy l'axe de révolution;
Ox la perpendiculaire en un point quelconque déterminant avec Ox une section méridienne que nous allons considérer;
φ l'angle que forme avec Ox la tangente en un point m dont les coordonnées sont x et y;
mI la normale en m limitée à Ox;
s l'arc de la courbe mesurée à partir de Oy.

Nous avons

$$dx = -ds\cos\varphi,\quad \frac{1}{R} = -\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{dx},\quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{mI} = \frac{\sin\varphi}{x},$$

d'où

$$\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{dx} = \frac{\sin\varphi}{x} = 2A$$

ou

$$\frac{dx\sin\varphi}{dx} = 2Ax.$$

En intégrant et désignant par B une constante arbitraire, on trouve

$$\sin\varphi = \frac{Ax^2+B}{x}. \tag{1}$$

Remarque. — Si la surface est fermée, on a $\varphi = 0$ pour $x = 0$, par suite $B = 0$ et

$$\sin\varphi = Ax.$$

On déduit de là, en désignant par C une constante,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi = \frac{Ax}{\sqrt{1-A^2x^2}},$$

$$y + C = -\frac{1}{A}\sqrt{1-A^2x^2}$$

et enfin

$$(y+C)^2 + x^2 = \frac{1}{A^2},$$

équation d'un cercle. D'où il suit que *la sphère est la seule surface de révolution à courbure moyenne constante qui soit fermée.*

Revenons maintenant à l'équation (1), et désignons par x_1 et x_2 les valeurs de x qui correspondent à $\varphi = 90^\circ$, $\varphi = -90^\circ$. Nous aurons

$$x_1 = A x_1^2 + B,$$
$$-x_2 = A x_2^2 + B,$$

d'où

$$A = \frac{1}{x_1 - x_2}, \quad B = -\frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2},$$

et, en substituant x_1 et x_2 aux constantes A et B, nous aurons

$$\sin\varphi = \frac{x^2 - x_1 x_2}{(x_1 - x_2)x},$$
$$\cos\varphi = \pm \frac{1}{x(x_1 - x_2)} \sqrt{(x_1^2 - x^2)(x^2 - x_2^2)},$$
$$\operatorname{tang}\varphi = \pm \frac{x^2 - x_1 x_2}{\sqrt{(x_1^2 - x)(x^3 - x_2^2)}}.$$

Si nous posons

$$x^2 = x_1^2 \cos^2\psi + x_2^2 \sin^2\psi,$$

ψ étant un angle auxiliaire, ce qui est permis puisque x_1 et x_2 sont les valeurs extrêmes des x, nous aurons

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm \frac{x_1^2 \cos^2\psi + x_2^2 \sin^2\psi - x_1 x_2}{(x_1^2 - x_2^2)\sin\psi\cos\psi} = \frac{dy}{dx},$$
$$dx = -\frac{(x_1^2 - x_2^2)\sin\psi\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{x_1^2\cos^2\psi + x_2^2\sin^2\psi}},$$

d'où

$$dy = \pm \sqrt{x_1^2 \cos^2\psi + x_2^2 \sin\psi}\, d\psi \mp \frac{x_1 x_2\, d\psi}{\sqrt{x_1^2\cos^2\psi + x_2^2\sin^2\psi}}.$$

Si nous plaçons l'origine des coordonnées de manière que l'on ait $y = 0$ pour $x = 0$, nous aurons

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \pm y = x_1 \left\{ E\left[\sqrt{\frac{(x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2}}\,\varphi\right] - E\left[\sqrt{\frac{(x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2}}\,\frac{\pi}{2}\right]\right\} \\ - x_2\left[F\left(\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2}}\,\varphi\right)\right] - F\left[\left(\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2}}\,\frac{\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Nous aurons ainsi deux systèmes de courbes selon que x_2 sera de même signe que x_1 ou sera de signe contraire.