JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GENTY

Applications mécaniques du Calcul des quaternions

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 49-70.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7__49_0>

Applications mécaniques du Calcul des quaternions ;

PAR M. GENTY.

Préliminaires.

Le Calcul des quaternions commence à prendre faveur en France, grâce aux remarquables travaux de M. Laisant. Cependant il y a encore beaucoup à faire pour arriver à rendre familière aux géomètres français cette méthode si riche en applications, et qui, depuis longtemps déjà, est devenue classique en Angleterre et en Allemagne. Il m'a donc semblé utile et intéressant de prendre pour sujet d'étude, à la suite de M. Laisant, quelques-unes des nombreuses questions de Mécanique auxquelles se prête d'une manière si heureuse la méthode d'Hamilton. Le présent Mémoire est consacré à l'exposition de la théorie de l'équilibre astatique, qui a fait l'objet d'un Mémoire fort intéressant de M. Darboux, présenté à la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.

Théorie de l'équilibre astatique.

Soit un corps en équilibre soumis à l'action de n forces F, F_1, ..., de grandeurs et de directions constantes, appliquées aux points M, M_1, ... respectivement. Cherchons les conditions pour que l'équilibre subsiste quand on fait tourner le corps d'un angle quelconque autour d'un axe arbitraire passant par l'origine.

Le corps étant en équilibre dans son état initial, on a

$$\Sigma\,\mathrm{F} = \mathrm{R} = 0, \tag{1}$$

$$\Sigma\,\mathfrak{V}\mathrm{FM} = 0, \tag{2}$$

en désignant par R la résultante générale (ou de translation) des forces données.

Cela posé, une rotation quelconque du corps autour d'un axe arbitraire pourra être représentée par $Q(\ )Q^{-1}$, Q étant un quaternion unitaire dont le vecteur a la même direction que l'axe de la rotation, et les équations de l'équilibre après la rotation seront

$$\mathrm{R} = 0,$$

$$\Sigma\,\mathfrak{V}Q\mathrm{M}Q^{-1}\mathrm{F} = 0. \tag{3}$$

L'équation (3), devant être vérifiée quel que soit Q, entraîne évidemment

$$\Sigma\,\mathrm{M}Q^{-1}\mathrm{F} = 0.$$

Cette équation se décompose elle-même dans les deux suivantes :

$$\Sigma\,\mathfrak{S}\mathrm{M}Q^{-1}\mathrm{F} = 0,$$

$$\Sigma\,\mathfrak{V}\mathrm{M}Q^{-1}\mathrm{F} = 0.$$

La première donne, en tenant compte de l'équation (2),

$$\Sigma\,\mathfrak{S}\mathrm{FM} = 0, \tag{4}$$

et la seconde

$$\Sigma\,\mathfrak{V}.\mathfrak{V}Q^{-1}\mathrm{FM} = 0,$$

ou, en développant et tenant compte des équations (2) et (4),

$$\Sigma\mathrm{M}\,\mathfrak{S}\mathrm{F}\mathfrak{V}Q^{-1} = \Sigma\mathrm{F}\,\Sigma\mathrm{M}\,\mathfrak{V}Q^{-1} = 0,$$

ou enfin, en posant $\mathfrak{V}Q^{-1} = \mathrm{L}$,

$$\Sigma\mathrm{F}\,\mathfrak{S}\mathrm{MX} = \Sigma\mathrm{M}\,\mathfrak{S}\mathrm{FX} = \Phi_1\mathrm{X},$$

$$\Phi_1\mathrm{L} = 0. \tag{5}$$

Il est facile de voir que l'équation (4) n'est qu'une conséquence de l'équation (5); donc, en résumé, les conditions pour l'équilibre astatique autour du point pris pour origine sont

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma \text{F} &= 0, \\ \Phi_1 \text{L} &= 0. \end{aligned} \right.$$

La fonction $\Phi_1 \text{x}$ est évidemment une fonction linéaire conjuguée à elle-même.

L'équation (4) montre que, dans le cas de l'équilibre astatique, le quaternion ΣFM, auquel Hamilton a donné le nom de *tension totale du système des forces,* est nul dans toutes les positions du corps.

Il est facile de voir maintenant que, si les équations de condition (6) sont satisfaites, le corps restera en équilibre dans toutes les positions qu'il peut prendre.

Si l'on choisit en effet pour origine un nouveau point C, les forces F ne changent pas, et l'on a toujours $\text{R} = 0$; mais leurs points d'application deviennent

$$\text{N} = \text{M} - \text{C}, \quad \text{N}_1 = \text{M}_1 - \text{C}, \quad \ldots,$$

et l'on aura

$$(7) \qquad \Sigma \text{F}\, \mathfrak{S}\text{NL} = \Sigma \text{F}\, \mathfrak{S}(\text{M} - \text{C})\text{L} = \Sigma \text{F}\, \mathfrak{S}\text{ML} - \Sigma \text{F}\, \mathfrak{S}\text{CL}$$

ou enfin

$$\Sigma \text{F}\, \mathfrak{S}\text{NL} = 0,$$

en vertu des équations (6). Donc les conditions de l'équilibre astatique sont ainsi satisfaites pour la nouvelle origine.

L'équation (7) montre que la fonction Φ_1 reste la même, quelle que soit l'origine, toutes les fois que la résultante générale des forces est nulle.

L'équation de condition

$$\Phi_1 \text{L} = 0$$

sera satisfaite pour tout vecteur L si elle l'est pour trois vecteurs non coplanaires, par exemple pour trois vecteurs unitaires $\text{I}_1, \text{I}_2, \text{I}_3$; elle équivaut donc aux trois équations

$$(8) \qquad \Phi_1 \mathrm{I}_1 = 0, \quad \Phi_1 \mathrm{I}_2 = 0, \quad \Phi_1 \mathrm{I}_3 = 0.$$

Chacune des équations ci-dessus équivaut à trois équations algébriques ordinaires; l'équation

$$\mathrm{R} = 0$$

équivaut de même à trois équations ordinaires. Donc, enfin, les conditions (6) constituent un groupe de douze équations algébriques ordinaires, nécessaires et suffisantes pour l'équilibre astatique.

Des différentes positions dans lesquelles un corps fixé par un point et soumis à l'action de n forces de grandeurs et de directions constantes peut être en équilibre.

Supposons maintenant le corps fixé par un point sans être en équilibre dans sa position initiale, et cherchons les positions dans lesquelles il sera en équilibre.

Supposons que, par une rotation autour d'un axe passant par l'origine, on ait amené le corps dans une situation telle que les vecteurs des points d'application des forces soient N, N_1, ... Les conditions de l'équilibre seront exprimées par

$$\Sigma \mathfrak{V}\mathrm{NF} = 0,$$

ou bien

$$\Sigma \mathfrak{V}(\mathrm{I}_1 \mathfrak{S}\mathrm{NI}_1 + \mathrm{I}_2 \mathfrak{S}\mathrm{NI}_2 + \mathrm{I}_3 \mathfrak{S}\mathrm{NI}_3)\mathrm{F} = 0,$$

ou encore

$$(9) \qquad \mathfrak{V}\mathrm{I}_1 \Phi \mathrm{I}_1 + \mathfrak{V}\mathrm{I}_2 \Phi \mathrm{I}_2 + \mathfrak{V}\mathrm{I}_3 \Phi \mathrm{I}_3 = 0,$$

en posant

$$\Phi \mathrm{X} = \Sigma \mathrm{F} \mathfrak{S}\mathrm{NX}.$$

La fonction $\Phi \mathrm{X}$ a la même forme que la fonction $\Phi_1 \mathrm{X}$ des paragraphes précédents, mais, en général, elle n'est pas conjuguée à elle-même; l'équation (9) exprime que, pour l'équilibre, cette fonction doit être conjuguée à elle-même, et la réciproque est évidente.

Le problème revient donc à trouver un quaternion unitaire Q tel qu'on ait

$$\Sigma \mathrm{F} \,\mathfrak{S}\, Q^{-1} \mathrm{M} Q \mathrm{x} = \Psi \mathrm{x},$$

Ψ étant une fonction conjuguée à elle-même.

Soit

$$\Phi \mathrm{x} = \Sigma \mathrm{F} \,\mathfrak{S}\, \mathrm{M} \mathrm{x} = \Psi Q^{-1} \mathrm{x} Q. \tag{10}$$

On a

$$\Phi' \mathrm{x} = \Sigma \mathrm{M} \,\mathfrak{S}\, \mathrm{F} \mathrm{x}.$$

Mais $\Psi \mathrm{x}$, étant une fonction vectorielle conjuguée à elle-même, doit être égale à ce que devient $\Phi \mathrm{x}$ après la rotation du corps; donc on a

$$\Psi \mathrm{x} = \Sigma Q^{-1} \mathrm{M} Q \,\mathfrak{S}\, \mathrm{F} \mathrm{x} = Q^{-1} \Phi' \mathrm{x} Q. \tag{11}$$

Des équations (10) et (11) on tire

$$\Phi \Phi' \mathrm{x} = \Psi^2 \mathrm{x}, \tag{12}$$

ce qui détermine Ψ.

Voici comment M. Tait résout cette équation.

Soit

$$\Psi^3 + \mathrm{G} \Psi^2 + \mathrm{G}_1 \Psi + \mathrm{G}_2 = 0 \tag{13}$$

l'équation cubique symbolique à laquelle satisfait identiquement la fonction Ψ. Si l'on connaissait les coefficients G, G_1, G_2 de cette équation, la fonction Ψ serait elle-même déterminée.

Posons

$$\Psi^2 = \Phi \Phi' = \Omega;$$

l'équation (13) pourra se mettre sous la forme

$$(\Psi + G)\Omega + (G_1\Psi + G_2) = 0$$

ou bien

$$\Psi(\Omega + G_1) = -(G\Omega + G_2),$$

d'où

$$\Omega(\Omega + G_1)^2 = (G\Omega + G_2)$$

ou enfin

$$\Omega^3 + (2G_1 - G_2)\Omega^2 + (G_1^2 - 2GG_2)\Omega - G_2^2 = 0. \tag{14}$$

Mais Ω est une fonction conjuguée à elle-même qui satisfait à une équation connue

$$\Omega^3 + M\Omega^2 + M_1\Omega + M_2 = 0. \tag{15}$$

En identifiant les équations (14) et (15), il vient

$$\begin{aligned} 2G_1 - G_2 &= M, \\ G_1^2 - 2GG_2 &= M_1, \\ G_2^2 &= -M_2. \end{aligned}$$

La seconde équation donne

$$G = \frac{G_1^2 - M_1}{2G_2}.$$

En portant cette valeur de G dans la première et remplaçant G_2^2 par sa valeur $-M_2$, il vient

$$2G_1 = M - \frac{(G_1^2 - M_1)^2}{4M_2},$$

équation du quatrième degré en G_1. L'équation (12) a donc quatre solutions.

Soient Ψx l'une d'elles, I_1, I_2 et I_3 les vecteurs unitaires principaux de cette fonction; les trois autres solutions seront

$$\mathrm{I}_1^{-1}\Psi x \mathrm{I}_1, \quad \mathrm{I}_2^{-1}\Psi x \mathrm{I}_2, \quad \mathrm{I}_3^{-1}\Psi x \mathrm{I}_3.$$

On a en effet, N, N_1, ... étant les points d'application des forces après la rotation qui a donné Ψ,

$$\Psi x = \Sigma F \mathfrak{S} N x = \Sigma N \mathfrak{S} F x.$$

Si l'on fait subir au corps la rotation $I_1^{-1}(\ )I_1$, on aura une nouvelle fonction $\Psi_1 x$, déterminée par l'équation

$$\Psi_1 x = \Sigma I_1^{-1} N I_1 \mathfrak{S} F x = I_1^{-1} \Psi x I_1.$$

Or $I_1^{-1}\Psi x I_1$ est une fonction conjuguée à elle-même qui a les mêmes directions principales que Ψx. Si l'on a, par exemple,

$$\Psi x = A_1 I_1 \mathfrak{S} I_1 x + A_2 I_2 \mathfrak{S} I_2 x + A_3 I_3 \mathfrak{S} I_3 x,$$

on aura

$$I_1^{-1} \Psi x I_1 = A_1 I_1 \mathfrak{S} I_1 x - A_2 I_2 \mathfrak{S} I_2 x - A_3 I_3 \mathfrak{S} I_3 x.$$

Donc, enfin, il y a quatre positions d'équilibre. L'une d'elles étant donnée, on obtient les trois autres par des rotations de 180° ou des *renversements,* autour des axes principaux, de la fonction Ψ ou $\Phi\Phi'$ dans la position donnée.

Il reste maintenant, pour compléter la solution du problème, à déterminer le quaternion unitaire Q.

On a, d'après l'équation (11),

$$Q\Psi x = \Phi' x Q,$$

quel que soit x, ou bien

$$(\mathfrak{S} Q + \mathfrak{V} Q)\Psi x = \Phi' x(\mathfrak{S} Q + \mathfrak{V} Q),$$

et l'on a, en prenant la partie algébrique de cette équation,

$$\mathfrak{S}\mathfrak{V} Q \Psi x = \mathfrak{S}\Phi' x \mathfrak{V} Q, \tag{16}$$

ou bien

$$\mathfrak{S} x \Psi \mathfrak{V} Q = \mathfrak{S} x \Phi \mathfrak{V} Q,$$

ou enfin

$$\mathfrak{S}\mathrm{x}(\Psi - \Phi)\mathfrak{V}Q = 0.$$

Cette équation, devant être satisfaite quel que soit x, exige qu'on ait

$$(\Psi - \Phi)\mathfrak{V}Q = 0.$$

La fonction linéaire vectorielle $(\Psi - \Phi)\mathrm{x}$ est donc binaire et de la forme

$$\mathrm{B}\,\mathfrak{S}\mathrm{AX} + \mathrm{B}_1\mathfrak{S}\mathrm{A}_1\mathrm{X};$$

et l'on a

$$\mathfrak{V}Q = \mathfrak{V}\mathrm{AA}_1.$$

L'équation (16) permet aussi d'écrire

$$\mathfrak{V}Q = \mathfrak{V}(\Psi - \Phi')\mathrm{A}(\Psi - \Phi')\mathrm{B},$$

A et B étant deux vecteurs quelconques.

Les résultats qui précèdent peuvent être énoncés de la manière suivante :

Étant donné un système de forces appliquées à un corps solide, il existe quatre positions du corps pour lesquelles le système des forces se réduit à une résultante passant en un point donné.

Comme cas particulier, si les forces ont une résultante générale nulle, la fonction $\Phi\mathrm{x}$ est la même, ainsi que nous l'avons remarqué ci-dessus, quel que soit le point pris pour origine. Il en est de même, par suite, des fonctions $\Phi\Phi'$ et Ψ^2, et l'on voit que la position du corps qui correspond à l'équilibre est la même, quelle que soit l'origine des vecteurs. Donc, si les forces données ont une résultante générale nulle, il y a quatre orientations du corps pour lesquelles elles se font équilibre.

Diverses réductions du système des forces. — Interprétation de la fonction Φx.

L'axe du couple résultant du système des forces pour l'origine est

$$\Sigma \mathfrak{V} \text{FM};$$

mais, si I_1, I_2 et I_3 sont trois orienteurs rectangulaires, on a

$$M = I_1 \mathfrak{S} M I_1 + I_2 \mathfrak{S} M I_2 + I_3 \mathfrak{S} M I_3 \quad (^1),$$

et par suite

$$\begin{aligned} \Sigma \mathfrak{V} \text{FM} &= \Sigma \mathfrak{S} M I_1 \mathfrak{V} M I_1 + \Sigma \mathfrak{S} M I_2 \mathfrak{V} M I_2 + \Sigma \mathfrak{S} M I_3 \mathfrak{V} M I_3 \\ &= \mathfrak{V} \Phi I_1 I_1 + \mathfrak{V} \Phi I_2 I_2 + \mathfrak{V} \Phi I_3 I_3, \end{aligned}$$

et l'on voit que le couple résultant est remplacé par trois autres, dont le premier $\mathfrak{V}\Phi I_1 I_1$ peut être regardé comme produit par une force ΦI_1 appliquée à l'extrémité du vecteur unitaire I_1, et de même pour les autres.

La fonction linéaire Φ étant entièrement indépendante du trièdre (I_1, I_2, I_3) choisi, la réduction précédente est unique et déterminée. Ainsi, dans le système de réduction considéré, la force appliquée à l'extrémité d'un vecteur unitaire L est ΦL. Pour l'équilibre astatique, cette force doit être nulle pour un vecteur unitaire quelconque.

Cherchons s'il est possible de trouver un système de vecteurs unitaires rectangulaires A, B, C tel que les forces correspondantes ΦA, ΦB et ΦC soient aussi rectangulaires.

([1]) On voit que nous donnons son véritable signe à l'expression $\mathfrak{S}$AB, qu'on peut appeler le *produit projectif* des deux vecteurs A et B, et qui est définie par l'équation

$$\mathfrak{S}\text{AB} = \mathfrak{T}\text{A}\,\mathfrak{T}\text{B}\cos(\text{A}, \text{B}).$$

On devra avoir en même temps

$$(17)\qquad \mathfrak{S}\mathrm{BC} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{CA} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{AB} = 0$$

et

$$\mathfrak{S}\Phi\mathrm{B}\,\Phi\mathrm{C} = 0, \quad \mathfrak{S}\Phi\mathrm{C}\,\Phi\mathrm{A} = 0, \quad \mathfrak{S}\Phi\mathrm{A}\,\Phi\mathrm{B} = 0,$$

ou bien

$$(18)\qquad \mathfrak{S}\mathrm{B}\,\Phi'\Phi\mathrm{C} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{C}\,\Phi'\Phi\mathrm{A} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{A}\,\Phi'\Phi\mathrm{B} = 0.$$

Les équations (17) et (18) montrent que le système que nous cherchons est unique et déterminé, et que les vecteurs unitaires A, B, C sont les vecteurs unitaires principaux de la fonction $\Phi'\Phi\mathrm{X}$, c'est-à-dire qu'ils sont dirigés suivant les axes de l'ellipsoïde

$$(19)\qquad \mathfrak{S}\mathrm{X}\,\Phi'\Phi\mathrm{X} = 1,$$

que M. Darboux appelle l'*ellipsoïde central* du système pour l'origine choisie.

Comme on peut toujours, par une rotation convenable, faire coïncider deux trièdres trirectangles ayant le même sommet, on voit qu'on pourra, par une rotation convenable du corps, amener les bras A, B, C des couples principaux à coïncider avec les directions correspondantes $\Phi\mathrm{A}$, $\Phi\mathrm{B}$, $\Phi\mathrm{C}$, et par suite les couples à se détruire. Cette position du corps obtenue, on en obtiendra trois autres semblables par des renversements autour des trois bras; nous retrouvons ainsi l'un des résultats qui précèdent.

L'ellipsoïde central dont il vient d'être question peut être construit en portant sur chaque vecteur unitaire L une longueur égale à l'inverse de l'intensité de la force correspondante $\Phi\mathrm{L}$. On a, en effet, pour le point obtenu ainsi,

$$\mathrm{X} = \frac{\mathfrak{U}\mathrm{X}}{\mathfrak{T}\Phi\,\mathfrak{U}\mathrm{X}},$$

ou bien

$$\mathfrak{T}^2\Phi\mathrm{X} = 1,$$

ou enfin

$$\mathfrak{S}x\,\Phi'\Phi x = 1,$$

équation de l'ellipsoïde central.

On peut encore regarder cet ellipsoïde comme le lieu de l'extrémité du vecteur $\Phi^{-1}L$, car on a pour ce point

$$x = \Phi^{-1}\mathfrak{U}x,$$
$$\Phi x = \mathfrak{U}x,$$

ce qui donne encore

$$\mathfrak{T}^2\Phi x = \mathfrak{S}x\,\Phi'\Phi x = 1.$$

M. Darboux a encore considéré un ellipsoïde lieu des vecteurs-forces menés par l'origine. Si x est l'extrémité du vecteur correspondant au vecteur unitaire L, on a successivement

$$x = \Phi L,$$
$$\Phi^{-1}x = L,$$
$$\mathfrak{T}^2\Phi^{-1}x = 1$$

ou enfin

$$\mathfrak{S}x\,\Phi'^{-1}\Phi^{-1}x = 1. \tag{19}$$

On reconnaît sans peine que cet ellipsoïde est égal à l'ellipsoïde réciproque de l'ellipsoïde central, dont il ne diffère que par l'orientation. Les directions des forces de deux couples de bras rectangulaires sont conjuguées par rapport à cet ellipsoïde.

Si, par une rotation convenable autour de l'origine, on a amené le corps dans une situation telle que le système des forces se réduise à une résultante unique, la fonction Φ est conjuguée à elle-même; on a donc $\Phi' = \Phi$, $\Phi'\Phi = \Phi\Phi' = \Phi^2$. L'ellipsoïde central a pour équation

$$\mathfrak{S}x\,\Phi^2 x = 1$$

et l'ellipsoïde des forces

$$\mathfrak{S}x\,\Phi^{-2}x = 1;$$

ils sont polaires réciproques par rapport à la sphère dont le rayon est égal à l'unité.

Dans ce cas, mais dans ce cas seulement, les directions des forces sont les normales à un troisième ellipsoïde ayant pour équation

$$\mathfrak{S}x\Phi x = 1.$$

Dans le système de réduction des forces que nous venons d'étudier, on décompose le couple résultant en trois autres dont les bras sont perpendiculaires et les axes situés dans un même plan. Nous allons examiner maintenant un nouveau mode de réduction dans lequel les bras des couples sont situés dans un même plan et les forces correspondantes rectangulaires.

Projetons d'abord chacune des forces sur une parallèle à un vecteur unitaire quelconque L mené par son point d'application. Les forces projetées seront

$$L\mathfrak{S}FL,\quad L\mathfrak{S}F_1L,\quad \ldots,$$

et leur résultante, qui est égale à leur somme, sera

$$L\mathfrak{S}\Sigma FL = L\mathfrak{S}RL.$$

Je dis que le centre de ces forces parallèles est situé dans un plan fixe du corps.

On a en effet, en appelant x le vecteur de ce point,

$$(19\,bis)\qquad x\mathfrak{S}RL = \Sigma M\mathfrak{S}FL = \Phi'L,$$

d'où

$$L = \mathfrak{S}RL\,\Phi'^{-1}x,$$

et, en opérant avec $\mathfrak{S}Rx$,

$$\mathfrak{S}R\Phi'^{-1}x = 1,$$

ou enfin

$$(20) \qquad \mathfrak{S}\,x\,\Phi^{-1}\,\mathrm{R} = 1 \quad [1],$$

équation d'un plan auquel Hamilton a donné le nom de *plan central.*

Si l'on projette les forces sur la direction de leur résultante générale, le point obtenu ainsi s'appelle le *point central* du système des forces, et il a pour vecteur

$$(21) \qquad \mathrm{G} = \frac{\Sigma\mathrm{M}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{F}\,\mathfrak{U}\,\mathrm{R}}{\mathfrak{S}\,\mathrm{R}\,\mathfrak{U}\,\mathrm{R}} = \frac{\Phi'\,\mathrm{R}}{\mathfrak{T}^2\,\mathrm{R}}.$$

Le point central est évidemment situé dans le plan central, et l'équation (21) montre que, si on le prend pour origine, la fonction Φ' s'annule pour la valeur R du vecteur. Nous reviendrons plus loin sur cette remarque importante.

D'après ce qui précède, on voit que, en décomposant les forces suivant trois directions rectangulaires I_1, I_2, I_3, le système entier se trouvera réduit à trois forces, dont les points d'application, indépendants de la position du corps, seront trois points du plan central, savoir :

1° Une force $\mathrm{I}_1\,\mathfrak{S}\,\mathrm{RI}_1$ appliquée au point $\dfrac{\Phi'\,\mathrm{I}_1}{\mathfrak{S}\,\mathrm{RI}_1}$;

2° Une force $\mathrm{I}_2\,\mathfrak{S}\,\mathrm{RI}_2$ appliquée au point $\dfrac{\Phi'\,\mathrm{I}_2}{\mathfrak{S}\,\mathrm{RI}_2}$;

3° Une force $\mathrm{I}_3\,\mathfrak{S}\,\mathrm{RI}_3$ appliquée au point $\dfrac{\Phi'\,\mathrm{I}_3}{\mathfrak{S}\,\mathrm{RI}_3}$.

On aurait pu arriver immédiatement à ce résultat en remarquant qu'on a

$$\mathrm{F} = \mathrm{I}_1\,\mathfrak{S}\,\mathrm{FI}_1 + \mathrm{I}_2\,\mathfrak{S}\,\mathrm{FI}_2 + \mathrm{I}_3\,\mathfrak{S}\,\mathrm{FI}_3,$$

et par suite

$$\begin{aligned} \Sigma\,\mathfrak{V}\,\mathrm{FM} &= \Sigma\,\mathfrak{V}(\mathrm{I}_1\,\mathfrak{S}\,\mathrm{FI}_1 + \mathrm{I}_2\,\mathfrak{S}\,\mathrm{FI}_2 + \mathrm{I}_3\,\mathfrak{S}\,\mathrm{FI}_3)\,\mathrm{M} \\ &= \Sigma\,\mathfrak{S}\,\mathrm{FI}_1\,\mathfrak{V}\,\mathrm{I}_1\,\mathrm{M} + \Sigma\,\mathfrak{S}\,\mathrm{FI}_2\,\mathfrak{V}\,\mathrm{I}_2\,\mathrm{M} + \Sigma\,\mathfrak{S}\,\mathrm{FI}_3\,\mathfrak{V}\,\mathrm{I}_3\,\mathrm{M} \\ &= \mathfrak{V}\,\mathrm{I}_1\,\Phi'\,\mathrm{I}_1 + \mathfrak{V}\,\mathrm{I}_2\,\Phi'\,\mathrm{I}_2 + \mathfrak{V}\,\mathrm{I}_3\,\Phi'\,\mathrm{I}_3. \end{aligned}$$

---

[1] On reconnaît facilement que la fonction Φ'^{-1} a pour réciproque Φ^{-1}. Soit, en effet, $\Phi'^{-1} = \Psi$; on aura $\Phi'\Psi = 1$, et par suite, pour la fonction conjuguée, $\Psi'\Phi = 1$, d'où $\Psi' = \Phi^{-1}$.

Le couple composant, qui a pour axe $\mathfrak{V}\mathrm{I}_1\Phi'\mathrm{I}_1$, peut être regardé comme constitué par une force I_1 appliquée au point $\Phi'\mathrm{I}_1$, ou, ce qui est la même chose (si $\mathfrak{S}\mathrm{I}_1\mathrm{R}$ est différent de zéro), par une force $\mathrm{I}_1\,\mathfrak{S}\mathrm{RI}_1$ appliquée au bras $\frac{\Phi'\mathrm{I}_1}{\mathfrak{S}\mathrm{RI}_1}$, et de même pour les deux autres couples. Nous retrouvons ainsi la même réduction que ci-dessus.

Si l'on a $\mathfrak{S}\mathrm{RI}_1 = 0$, c'est-à-dire si l'on prend les composantes des forces sur un vecteur unitaire normal à la résultante générale, elles n'auront plus de résultante unique et se réduiront à un couple $\mathfrak{V}\mathrm{I}_1\Phi'\mathrm{I}_1$, dont le bras $\Phi'\mathrm{I}_1$ est parallèle au plan central. On a, en effet,

$$\mathfrak{S}\Phi^{-1}\mathrm{R}\Phi'\mathrm{I}_1 = \mathfrak{S}\mathrm{R}\Phi'^{-1}\Phi'\mathrm{I}_1 = \mathfrak{S}\mathrm{RI}_1 = 0.$$

Nous allons enfin étudier la réduction du système des forces à quatre forces appliquées aux sommets d'un tétraèdre quelconque.

Soient A, B, C, D les sommets du tétraèdre donné. Une force F, appliquée au point M, peut être remplacée par une force égale et parallèle appliquée au point D et par le couple $\mathfrak{V}\mathrm{F}(\mathrm{M}-\mathrm{D})$. Le système de toutes les forces pourra donc être remplacé par une force R appliquée au point D et par le couple résultant $\Sigma\mathfrak{V}\mathrm{F}(\mathrm{M}-\mathrm{D})$.

Or on a

$$\begin{aligned}(\mathrm{M}-\mathrm{D})\mathfrak{S}(\mathrm{A}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D}) \\ = (\mathrm{A}-\mathrm{D})\mathfrak{S}(\mathrm{M}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D}) + (\mathrm{B}-\mathrm{D})\mathfrak{S}(\mathrm{M}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D})(\mathrm{A}-\mathrm{D}) \\ + (\mathrm{C}-\mathrm{D})\mathfrak{S}(\mathrm{M}-\mathrm{D})(\mathrm{A}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D}),\end{aligned}$$

et l'on voit que le couple résultant pourra être remplacé par trois autres, dont l'un,

$$\frac{\Sigma\mathfrak{V}\mathrm{F}(\mathrm{A}-\mathrm{D})\mathfrak{S}(\mathrm{M}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D})}{\mathfrak{S}(\mathrm{A}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D})},$$

pourra être regardé comme ayant pour bras $\mathrm{A}-\mathrm{D}$ et pour force

$$\mathrm{F}_a = \frac{\Sigma\mathrm{F}\mathfrak{S}(\mathrm{M}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D})}{\mathfrak{S}(\mathrm{A}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D})}.$$

Nous aurons ainsi réduit le système à sept forces, dont quatre appliquées au point D et les trois autres aux autres sommets du tétraèdre. En remplaçant enfin les quatre forces qui agissent au point D par leur résultante, on aura réduit le système à quatre forces appliquées aux sommets du tétraèdre donné.

Soient a l'aire de la face du tétraèdre de référence opposée au point A, A_1 le vecteur unitaire normal à cette face et V le volume du tétraèdre donné; on aura

$$\mathfrak{V}(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D}) = 2a\mathrm{A}_1,$$
$$\mathfrak{S}(\mathrm{A}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D}) = 6\mathrm{V},$$

et, par suite, l'expression de la force qui agit au point A peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{F}_a = \frac{2a\Phi\mathrm{A}_1 - \mathrm{R}\,\mathfrak{S}\mathrm{BCD}}{6\mathrm{V}},$$

et l'on reconnaît immédiatement que la direction de la force en un sommet quelconque du tétraèdre ne varie pas avec ce sommet quand la face opposée reste fixe.

Ellipsoïde central du point central. — Ellipsoïde central pour les divers points du corps. — Conique centrale.

Nous allons maintenant revenir à l'étude de l'ellipsoïde central, qui a servi à M. Darboux dans la plus grande partie de ses recherches.

Nous avons vu précédemment que, si l'on prend le point central pour origine, la fonction $\Phi\mathrm{x}$ s'annule pour $\mathrm{x} = \mathrm{R}$; cette fonction peut donc se réduire à une fonction à deux termes, qui, en général, n'est pas conjuguée à elle-même. Mais, comme dans le cas d'une origine quelconque, étudié précédemment, on peut la rendre telle en faisant tourner le corps d'un angle déterminé autour d'un axe convenablement choisi. Dans le cas particulier qui nous occupe, l'équation (11) devient

$$(22)\qquad \Phi\mathrm{x} = Q^{-1}\,\Phi'\mathrm{x}\,Q,$$

et elle montre, ce qui était évident, que la fonction Φx s'annule, comme la fonction Φ', pour $x = R$. On voit d'ailleurs sans difficulté que l'équation

$$\Phi^2 = \Phi\Phi'$$

n'a que deux solutions, dont l'une se déduit de l'autre par une rotation de 180° autour de R.

Si l'on pose, en effet,

$$\Phi^2 x = \Phi'\Phi x = a_1^2 I_1 \mathfrak{S} I_1 x + a_2^2 I_2 \mathfrak{S} I_2 x, \tag{23}$$

les valeurs de Φ qui conviennent à la question seront

$$\Phi_1 x = a_1 I_1 \mathfrak{S} I_1 x + a_2 I_2 \mathfrak{S} I_2 x,$$
$$\Phi_2 x = K^{-1} \Phi_1 x K = - a_1 I_1 \mathfrak{S} I_1 x - a_2 I_2 \mathfrak{S} I_2 x,$$

en posant

$$K = \mathfrak{V} I_1 I_2 = \mathfrak{U} R,$$

ou bien

$$\Phi_1 x = a_1 I_1 \mathfrak{S} I_1 x - a_2 I_2 \mathfrak{S} I_2 x,$$
$$\Phi_2 x = K^{-1} \Phi x K = - a_1 I_1 \mathfrak{S} I_1 x + a_2 I_2 \mathfrak{S} I_2 x.$$

L'ellipsoïde central du point central se réduit, en conséquence, à un cylindre parallèle à R et dont l'équation est

$$\mathfrak{S} x \Phi\Phi' x = 1 \quad \text{ou bien} \quad \mathfrak{S} x \Phi^2 x = 1,$$

ou enfin

$$a_1^2 (\mathfrak{S} I_1 x)^2 + a_2^2 (\mathfrak{S} I_2 x)^2 = 1. \tag{24}$$

Le vecteur x du centre des composantes des forces parallèles à un vecteur unitaire L a pour expression

$$x = \frac{\Phi L}{\mathfrak{S} R L},$$

et l'on voit que le lieu de ce point, c'est-à-dire le plan central, a pour équation

$$\mathfrak{S}\mathrm{X}\mathrm{R} = 0.$$

Ainsi, dans cette position du corps, le plan central est le plan de la section droite du cylindre (24) menée par le point central.

Cherchons maintenant l'ellipsoïde central pour un autre point P. La fonction $\Phi\mathrm{x}$ relative à ce point sera

$$(25)\qquad \Phi\mathrm{X} = \Sigma\mathrm{F}\,\mathfrak{S}(\mathrm{M}-\mathrm{P})\mathrm{X} = \Phi\mathrm{X} - \mathrm{R}\,\mathfrak{S}\mathrm{P}\mathrm{X},$$

et l'on aura

$$(\Phi\mathrm{X})^2 = \mathfrak{S}\mathrm{X}\,\Phi^2\mathrm{X} + (\mathfrak{T}\mathrm{R})^2(\mathfrak{S}\mathrm{P}\mathrm{X})^2,$$

puisque

$$\mathfrak{S}\mathrm{R}\,\Phi\mathrm{X} = \mathfrak{S}\mathrm{X}\,\Phi\mathrm{R} = 0.$$

Donc l'équation de l'ellipsoïde central pour le point considéré sera

$$\mathfrak{S}\mathrm{X}\,\Phi^2\mathrm{X} + (\mathfrak{T}\mathrm{R})^2(\mathfrak{S}\mathrm{P}\mathrm{X})^2 = 1$$

ou bien

$$\mathfrak{S}\mathrm{X}\Psi\mathrm{X} = 1,$$

en posant

$$\Psi\mathrm{X} = \Phi^2\mathrm{X} + \mathrm{P}(\mathfrak{T}\mathrm{R})^2\,\mathfrak{S}\mathrm{P}\mathrm{X}.$$

Cherchons les vecteurs unitaires principaux et les longueurs des axes de cet ellipsoïde.

Soit L l'un des vecteurs unitaires principaux; on aura

$$(26)\qquad \Phi^2\mathrm{L} + \mathrm{P}(\mathfrak{T}\mathrm{R})^2\,\mathfrak{S}\mathrm{P}\mathrm{L} = l\mathrm{L}$$

ou bien

$$(\Phi^2 - l)\mathrm{L} = -\,\mathrm{P}(\mathfrak{T}\mathrm{R})^2\,\mathfrak{S}\mathrm{P}\mathrm{L},$$

d'où

$$(27)\qquad \mathrm{L} = -(\mathfrak{T}\mathrm{R})^2\,\mathfrak{S}\mathrm{P}\mathrm{L}(\Phi^2 - l)^{-1}\mathrm{P}.$$

Pour éliminer L, opérons par $\mathfrak{S}\,\mathrm{P}\times$, et nous aurons, en supprimant le facteur $\mathfrak{S}\,\mathrm{PL}$,

$$(28)\qquad (\mathfrak{T}\mathrm{R})^2\,\mathfrak{S}\,\mathrm{P}(\Phi^2 - l)^{-1}\mathrm{P} = -1,$$

équation du troisième degré en l.

Le terme tout connu de cette équation est égal à $\mathfrak{S}\,\Psi\mathrm{A}\Psi\mathrm{B}\Psi\mathrm{C}$, A, B, C étant trois vecteurs unitaires rectangulaires quelconques. Si l'on suppose que A, B, C soient les vecteurs unitaires principaux I_1, I_2, I_3 du cylindre central du point central, on aura

$$\begin{aligned}
\Psi\mathrm{I}_1 &= a_1^2\,\mathrm{I}_1 + \mathrm{P}(\mathfrak{T}\mathrm{R})^2\,\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_1\mathrm{P},\\
\Psi\mathrm{I}_2 &= a_2^2\,\mathrm{I}_2 + \mathrm{P}(\mathfrak{T}\mathrm{R})^2\,\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_2\mathrm{P},\\
\Psi\mathrm{I}_3 &= \mathrm{P}(\mathfrak{T}\mathrm{R})^2\,\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_3\mathrm{P},
\end{aligned}$$

et l'on trouve sans difficulté

$$\mathrm{M} = \mathfrak{S}\,\Psi\mathrm{I}_1\Psi\mathrm{I}_2\Psi\mathrm{I}_3 = a_1^2 a_2^2 (\mathfrak{T}\mathrm{R})^2 (\mathfrak{S}\,\mathrm{I}_3\mathrm{P})^2.$$

Cette équation montre que le produit des axes de l'ellipsoïde central d'un point quelconque est égal au produit des axes de la section droite du cylindre central, divisé par le produit de l'intensité de la résultante et par la distance du point donné au plan central.

Ainsi, le produit des axes est le même pour tous les points qui sont situés à la même distance du point central. Ce produit est infini pour un point du plan central, de sorte que pour tout point central l'ellipsoïde central est un cylindre : c'est ce qu'on aurait pu voir de suite en remarquant que pour un point du plan central on a (25)

$$\phi\mathrm{R} = \Phi\mathrm{R} - \mathrm{R}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{PR} = 0.$$

Soit l l'une des racines de l'équation (28), et considérons la quadrique qui a pour équation

$$(29)\qquad (\mathfrak{T}\mathrm{R})^2\,\mathfrak{S}\,\mathrm{X}(\Phi^2 - l)^{-1}\mathrm{X} = -1.$$

On voit que cette surface passe au point P, en vertu de l'équation (28), et sa normale en ce point est

$$(\Phi^2 - l)^{-1}\text{P};$$

elle est donc parallèle à L (27).

Donc, si nous appelons *couples principaux* de chaque point du corps ceux dont les bras et les forces constituent deux systèmes de directions rectangulaires, axes principaux les bras de ces couples, on voit que les axes principaux sont les normales aux trois surfaces d'un système de quadriques homofocales qui passent par le point donné.

L'équation (29) développée est

$$\frac{(\mathfrak{S}\text{XI}_1)^2}{l-a_1^2} + \frac{(\mathfrak{S}\text{XI}_2)^2}{l-a_2^2} + \frac{(\mathfrak{S}\text{XI}_3)^2}{l} - \frac{1}{(\mathfrak{T}\text{R})^2} = 0.$$

La conique située dans le plan central qui fait partie du système de surfaces a donc pour équation

$$\frac{(\mathfrak{S}\text{XI}_1)^2}{a_1^2} + \frac{(\mathfrak{S}\text{XI}_2)^2}{a_2^2} + \frac{1}{(\mathfrak{T}\text{R})^2} = 0.$$

C'est une ellipse imaginaire que M. Darboux appelle la *conique centrale* du système.

Les deux autres coniques focales du système ont pour équations

$$\frac{(\mathfrak{S}\text{XI}_1)^2}{a_2^2-a_1^2} + \frac{(\mathfrak{S}\text{XI}_3)^2}{a_2^2} - \frac{1}{(\mathfrak{T}\text{R})^2} = 0, \tag{30}$$

$$\frac{(\mathfrak{S}\text{XI}_2)^2}{a_1^2-a_2^2} + \frac{(\mathfrak{S}\text{XI}_3)^2}{a_1^2} - \frac{1}{(\mathfrak{T}\text{R})^2} = 0; \tag{31}$$

ce sont les *focales* de Minding.

Théorème de Minding.

Nous allons enfin démontrer le théorème de Minding, qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Dans toutes les positions du corps où les forces se réduisent à une résultante unique, les lignes d'action de ces résultantes vont toujours rencontrer les deux courbes définies ci-dessus sous le nom de focales de Minding.

Prenons le corps dans l'une de ses situations d'équilibre par rapport au point central. Le système des forces se réduit alors à la résultante générale $\mathrm{R} = \mathfrak{T}\mathrm{R}\mathrm{I}_3$, à un couple dont la force $a_1\mathrm{I}_1$ est appliquée à l'extrémité du vecteur unitaire I_1 et à un couple dont la force $a_2\mathrm{I}_2$ est appliquée à l'extrémité de I_2.

Nous allons chercher quelle est la rotation à faire subir au corps pour que le système se réduise à une résultante unique, appliquée en un point quelconque P. Soit $Q^{-1}(\ )Q$ l'opérateur qui représente cette rotation : en faisant d'abord tourner le corps, le système se réduira à la résultante générale R, à un couple de forces $a_1\mathrm{I}_1$ appliqué au point $Q^{-1}\mathrm{I}_1Q$ ou I'_1, et à un couple dont la force $a_2\mathrm{I}_2$ est appliquée au point $Q^{-1}\mathrm{I}_2Q$ ou I'_2. La somme des moments des forces pour l'origine sera donc

$$a_1\mathfrak{V}\mathrm{I}_1\mathrm{I}'_1 + a_2\mathfrak{V}\mathrm{I}_2\mathrm{I}'_2,$$

et, pour un autre point quelconque P, elle sera

$$a_1\mathfrak{V}\mathrm{I}_1\mathrm{I}'_1 + a_2\mathfrak{V}\mathrm{I}_2\mathrm{I}'_2 - \mathfrak{V}\mathrm{R}\mathrm{P}.$$

Pour que, dans la nouvelle position du corps, le système se réduise à une résultante unique appliquée au point P, il faudra qu'on ait

$$(32)\qquad a_1\mathfrak{V}\mathrm{I}_1\mathrm{I}'_1 + a_2\mathfrak{V}\mathrm{I}_2\mathrm{I}'_2 - \mathfrak{V}\mathrm{R}\mathrm{P} = 0,$$

ou, en opérant successivement par $\mathfrak{S}\iota'_1$, $\mathfrak{S}\iota'_2$, $\mathfrak{S}\iota'_3$,

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} a_2\mathfrak{S}\iota'_3\iota_2 + \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3\rho\iota'_1 &= 0,\\ a_1\mathfrak{S}\iota'_3\iota_1 - \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3\rho\iota'_2 &= 0,\\ a_1\mathfrak{S}\iota_1\iota'_2 - a_2\mathfrak{S}\iota_2\iota'_1 + \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3\rho\iota'_3 &= 0.\end{aligned}\right.$$

Ces trois équations suffisent pour déterminer le quaternion unitaire Q. On peut en déduire très simplement l'équation

$$(34)\qquad a_1\mathfrak{S}\iota'_1\iota_2 - a_2\mathfrak{S}\iota_1\iota'_2 = 0,$$

qu'on obtient d'ailleurs immédiatement en opérant sur l'équation (32).

Si, dans les équations (33), nous remplaçons ρ par x, nous aurons

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3 x\iota'_1 &= -a_2\mathfrak{S}\iota'_3\iota_2,\\ \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3 x\iota'_2 &= a_1\mathfrak{S}\iota'_3\iota_1,\\ \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3 x\iota'_3 &= a_2\mathfrak{S}\iota_2\iota'_1 - a_1\mathfrak{S}\iota_1\iota'_2,\end{aligned}$$

équations de trois plans dont l'intersection commune est évidemment l'une des résultantes uniques lorsqu'on y remplace Q par l'une des valeurs tirées des équations (33). Cherchons l'intersection de cette droite avec le plan

$$(35)\qquad \mathfrak{S}x\iota'_1 = 0,$$

qui est, dans la nouvelle situation du corps, le plan de l'une des focales de Minding.

Les deux dernières équations ci-dessus peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{V}\iota_3 x\,\mathfrak{V}\iota'_3\iota'_1 &= -a_1\mathfrak{S}\iota'_3\iota_2,\\ \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{V}\iota_3 x\,\mathfrak{V}\iota'_1\iota'_2 &= a_2\mathfrak{S}\iota'_1\iota_2 - a_1\mathfrak{S}\iota_1\iota'_2.\end{aligned}$$

ou, en développant et tenant compte de l'équation (35),

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3\iota'_1\,\mathfrak{S}x\iota'_3 &= a_1\mathfrak{S}\iota'_3\iota_1,\\ \mathfrak{T}\mathrm{R}\,\mathfrak{S}\iota_3\iota'_1\,\mathfrak{S}x\iota'_2 &= a_2\mathfrak{S}\iota'_1\iota_2 - a_1\mathfrak{S}\iota_1\iota'_2,\end{aligned}$$

ou, en élevant au carré et tenant compte de l'équation (34),

$$(\mathfrak{T}R)^2(\mathfrak{S}I_3I'_1)^2(\mathfrak{S}XI'_3)^2 = a_1^2(\mathfrak{S}I'_3I_1)^2,$$
$$(\mathfrak{T}R)^2(\mathfrak{S}I_3I'_1)^2(\mathfrak{S}XI'_2)^2 = (a_1^2 - a_2^2)[(\mathfrak{S}I_1I'_2)^2 - (\mathfrak{S}I'_1I_2)^2].$$

d'où enfin

$$\frac{(\mathfrak{S}XI'_3)^2}{a_1^2} + \frac{(\mathfrak{S}XI'_2)^2}{a_1^2 - a_2^2} - \frac{1}{(\mathfrak{T}R)^2} = 0,$$

équation de la focale (31).

On démontrerait de même que les résultantes uniques rencontrent toutes la focale située dans le plan

$$\mathfrak{S}XI'_3 = 0.$$

Enfin, on voit sans peine que les plans tangents aux focales aux deux points où elles sont coupées par une droite sont rectangulaires.