JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. PÉPIN

Sur les surfaces osculatrices

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 71-108.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7__71_0>

Sur les surfaces osculatrices;

PAR LE P. PEPIN, S. J.

---

1. On sait qu'il n'est pas toujours possible de déterminer les coefficients de l'équation générale d'ordre donné m à trois variables de manière à rendre la surface représentée par cette équation osculatrice en un point arbitraire d'une autre surface. Les seules équations que l'on connaisse propres à représenter des surfaces osculatrices sont celles du premier et du cinquième ordre. On peut, en chaque point d'une surface donnée quelconque, déterminer soit un plan osculateur, soit une surface osculatrice du cinquième ordre. Mais ces surfaces sont-elles les seules que l'on puisse rendre osculatrices? La solution de cette question se ramène à celle d'une équation indéterminée du troisième ordre à deux variables. C'est cette équation que je me propose d'étudier. Quoiqu'elle ne semble pas susceptible d'être complètement résolue, qu'on ne puisse assigner aucune limite au delà de laquelle on soit assuré qu'elle n'admette plus de solution, on peut établir sur les nombres propres à la vérifier des théorèmes intéressants; on peut même trouver toutes les solutions possibles, en nombres inférieurs à une limite assignée.

2. M. Hermite définit de la manière suivante les surfaces osculatrices (*Cours d'Analyse*, t. I, p. 144) :

« Une surface reçoit le nom d'*osculatrice* lorsqu'on a disposé de toutes les constantes qui fixent sa position et déterminent sa nature de manière à obtenir avec une surface donnée le contact de l'ordre le plus élevé possible. »

Le nombre des conditions à vérifier pour une osculation d'ordre $n^{\text{ième}}$ est $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$; le nombre des coefficients disponibles dans l'équation générale d'une surface de degré m est $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1$. Par conséquent, une surface de degré m n'est osculatrice en un point arbitraire d'une surface donnée que dans les cas où l'on peut trouver un nombre entier et positif n propre à vérifier l'équation

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$$(1) \qquad m^3 + 6m^2 + 11m = 3(n+1)(n+2).$$

Quand cette condition n'est pas vérifiée, on peut encore, dans certains cas, déterminer une surface de degré m osculatrice en certains points d'une surface donnée, en disposant d'une ou de deux coordonnées du point de contact, de manière à vérifier une ou deux équations de condition; si l'on ne dispose que d'une seule coordonnée, la surface de degré m peut être osculatrice en tous les points d'une ligne tracée sur la surface donnée; si l'on dispose de deux coordonnées, la surface de degré m ne peut être osculatrice qu'en des points déterminés. L'équation à vérifier est

$$(2) \qquad m^3 + 6m^2 + 11m + 6 = 3(n+1)(n+2)$$

dans le premier cas, et

$$(3) \qquad m^3 + 6m^2 + 11m + 12 = 3(n+1)(n+2)$$

dans le second. Nous nous bornerons à discuter l'équation (1).

3. Pour chaque valeur du nombre n qui exprime l'ordre d'osculation, il ne peut y avoir qu'une seule valeur du degré m de la surface osculatrice, et ce degré croît avec l'ordre du contact. On déduit en effet de l'équation (1)

$$\begin{aligned}3(m+1)^3 = (m^3+6m^2+11m)+2m^3+3m^2-2m+3 \\ > 3(n+1)(n+2), \\ m+1 > \sqrt[3]{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

Toutefois le degré de la surface croît moins rapidement que l'ordre d'osculation. Pour $m=1$, on trouve $n=1$. Le plan peut donc avoir une osculation du premier ordre en un point quelconque d'une surface donnée. Pour $m=2$, l'équation (1) est impossible en nombres entiers, mais on vérifie l'équation (2) en faisant $n=3$. Ainsi une surface du second degré ne peut pas être osculatrice en un point arbitraire d'une surface donnée, mais elle peut le devenir en des points dont les coordonnées satisfont à une équation de condition. Pour $m=3$, les équations (1) et (2) sont impossibles, mais on satisfait à l'équation (3) en prenant $n=5$. On conclut de là qu'une surface du troisième ordre ne peut être osculatrice à une surface donnée qu'en des points dont les coordonnées vérifient deux équations de condition; l'osculation est alors du cinquième ordre. On trouve de même qu'une surface du quatrième degré ne peut être osculatrice qu'en des points dont les coordonnées vérifient deux équations de condition, et que l'osculation est du septième ordre. Enfin, en faisant $m=5$, on trouve que l'équation (1) est résolue par la valeur $n=9$. C'est, avec le plan osculateur, la seule solution connue de notre problème. Il aurait fallu poursuivre ces essais jusqu'à la valeur $m=20$ pour trouver une nouvelle solution ; on aurait vu que l'équation (1) est vérifiée lorsqu'on y fait $m=20$, $n=58$. On pourrait, par des essais successifs, trouver toutes les solutions en nombres inférieurs à une limite assignée, mais les calculs seraient fastidieux si cette limite était tant soit peu élevée. Nous verrons plus loin qu'on peut parvenir au même résultat par une méthode beaucoup plus expéditive. Mais, avant d'aborder cette question, nous établirons quelques théorèmes généraux sur les diverses formes que le nombre m peut affecter.

I.

4. En écrivant l'équation (1) sous la forme

$$(1) \qquad m[(m+3)^2+2] = 3(n+1)(n+2),$$

on voit que tous les facteurs premiers impairs de $n+1$ et de $n+2$ qui ne sont pas diviseurs de m sont de l'une des deux formes $8l+1$, $8l+3$, puisque -2 en est résidu quadratique. Si m est impair, le produit $(n+1)(n+2)$ est impairement pair; si m est pair, le quotient $\frac{(n+1)(n+2)}{m}$ est impair.

Nous distinguerons deux cas, suivant que m est premier avec 3 ou multiple de 3. Dans le premier cas, nous poserons $m = hk$, en désignant par h le plus grand diviseur commun des deux nombres m et $n+1$, par k celui de m et $n+2$. Nous déduirons de l'équation (1)

$$(4) \qquad (hk+3)^2+2 = 3\frac{n+1}{h}\,\frac{n+2}{k} = 3pq,$$

en désignant par p et q les deux quotients $\frac{n+1}{h}$, $\frac{n+2}{k}$. Ces deux quotients sont des nombres entiers dont tous les facteurs premiers sont de l'une des deux formes $8x+1$, $8x+3$.

Si le nombre m est multiple de 3, nous posons $m = 3hk$, h désignant le plus grand diviseur commun de $\frac{m}{3}$ et de $n+1$, k celui de $\frac{m}{3}$ et de $n+2$; puis nous déduisons de l'équation (1)

$$(5) \qquad 9(hk+1)^2+2 = \frac{n+1}{h}\,\frac{n+2}{k} = pq.$$

Dans les deux cas, les quatre nombres h, k, p et q sont liés entre eux par la relation

$$(6) \qquad kq - hp = 1.$$

Au moyen de ces formules nous démontrerons que les valeurs de m propres à vérifier l'équation (1) ne peuvent être ni des nombres premiers, ou des puissances de nombres premiers autres que 1 et 5, ni des puissances de nombres premiers multipliées par l'un des nombres 2, 4, 8, 16, 6, 12 et 24.

5. Examinons d'abord si le nombre m peut être premier avec l'un des deux nombres $n+1$, $n+2$. Il peut se présenter deux cas, suivant que m est premier avec 3 ou multiple de 3. Dans le premier cas, on a $m=h$, le nombre h étant diviseur de l'un des deux nombres $n+1$, $n+2$. Les équations (4) et (6) deviennent respectivement

$$(h+3)^2+2=3pq, \quad hp-q=\pm 1,$$

et l'on a $n+2=hp$ ou $n+1=hp$, suivant que la dernière équation est vérifiée avec le signe supérieur ou avec le signe inférieur.

L'élimination du nombre q entre les deux dernières équations donne

$$(h+3)^2+2=3(hp^2\mp p).$$

Nous pouvons nous borner au signe supérieur, en convenant de déterminer le nombre n par la formule $n+2=hp$ si p est positif et par la formule $n+1=-hp$ si p est négatif. Sous cette réserve, il nous suffit de résoudre l'équation

$$h^2-3(p^2-2)h+11+3p=0, \tag{7}$$

en nombres entiers h, p, le premier, h, positif, le second, p, positif ou négatif.

On ne peut pas supposer $11+3p<0$, car, les deux racines de l'équation (7) étant de signes contraires, h serait la racine positive, et, la racine négative étant désignée par $-l$, on aurait

$$3(p^2-2)=h-l, \quad -11-3p=hl,$$
$$(hl+11)^2=9p^2=3(h-l)+18,$$
$$h^2l^2+22hl<3(h-l)<3h.$$

Or cette inégalité est évidemment impossible en nombres entiers et positifs. Si donc l'équation (7) est possible, les valeurs de p vérifient la condi ion

$$11 + 3p > 0.$$

Les valeurs de p comprises entre $-\frac{11}{3}$ et $\frac{11}{3}$ sont ± 2, ± 3, car, si l'on suppose $p = \pm 1$, les racines de l'équation (7) sont imaginaires. Soit $p = -2$. L'équation (7) devient $h^2 - 6h + 5 = 0$, et l'on en déduit

$$h = 3 \pm \sqrt{9 - 5} = 5, 1.$$

Si l'on prend $p = 2$, les valeurs de h sont irrationnelles. Il en est de même pour $p = -3$; mais, en faisant $p = 3$, on obtient l'équation

$$h^2 - 21h + 20 = 0,$$

dont les racines sont 20 et 1.

Nous trouvons ainsi trois solutions de notre problème : $m = 1$, 5 et 20. Comme, pour les deux premières, la valeur de p est négative, -2, nous devons déterminer la valeur correspondante de n par la formule $n + 1 = -hp = 2h$, ce qui donne $n = 1$ pour $h = 1$ et $n = 9$ pour $h = 5$. Ces deux solutions ($m = 1$, $n = 1$; $m = 5$, $n = 9$) sont connues. La troisième ($m = 20$) me semble nouvelle. Comme elle correspond à une valeur positive de p, on doit déterminer la valeur correspondante de n au moyen de la formule $n + 2 = hp$; on trouve ainsi $n = 20 \times 3 - 2 = 58$.

Il nous reste à examiner si l'équation (7) est possible en supposant $p > 3$. Les deux racines étant alors positives, désignons-les par h et par l; elles vérifieront les deux relations

$$h + l = 3(p^2 - 2), \quad hl = 11 + 3p.$$

Comme la racine entière h divise le dernier terme $11 + 3p$, l'autre racine l est aussi un nombre entier. Or les deux nombres h et l étant entiers et positifs, on a évidemment $2hl > h + l$; donc

$$6p + 22 > 3p^2 - 6, \quad 3p^2 - 6p - 28 < 0.$$

Cette inégalité exige que p soit inférieur à la plus grande racine du trinôme $p^2 - 2p - \frac{28}{3}$; ce nombre doit donc être inférieur à 5, et, puisqu'il est supposé supérieur à 3, il doit être égal à 4. Comme, en faisant $p = 4$, on trouve pour les racines h et l des valeurs irrationnelles, nous pouvons conclure que l'équation (7) n'a pas d'autre solution que les trois ci-dessus indiquées.

Nous pouvons résumer cette discussion dans le théorème suivant :

I. *Parmi les solutions de l'équation* (1), *les seules valeurs de m qui soient en même temps premières avec l'un des facteurs* $n+1$, $n+2$ *et non multiples de* 3 *sont* $m = 1$, $m = 5$ *et* $m = 20$, *auxquelles correspondent respectivement* $n = 1$, $n = 9$ *et* $n = 58$.

Or, si m est une puissance d'un nombre premier autre que 3, il est nécessairement premier et avec 3 et avec l'un des deux facteurs $n+1$, $n+2$. Nous pouvons donc conclure, relativement à la question géométrique proposée :

II. *Parmi les surfaces dont le degré est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier, pair ou impair, mais autre que* 3, *les seules que l'on puisse rendre osculatrices en un point arbitraire d'une surface donnée sont le plan et la surface du cinquième degré.*

6. Supposons $m = 3hk$ et cherchons dans quels cas l'un des facteurs h ou k se réduit à l'unité. Cela aura nécessairement lieu si $m = 3A^\alpha$, A désignant un nombre premier quelconque, car, l'équation (1) devenant dans ce cas

$$A^\alpha[9(A^\alpha + 1)^2 + 2] = (n+1)(n+2),$$

un seul des deux facteurs $n+1$, $n+2$ sera divisible par A et l'autre sera premier avec m. Ainsi, en résolvant la question proposée, nous sommes assurés de trouver toutes les solutions de l'équation (1) qui peuvent être renfermées dans la formule $m = 3A^\alpha$, où A désigne un nombre premier quelconque, égal à 3 ou différent de 3.

Suivant que $\frac{m}{3}$ divise le facteur $n+2$ ou le facteur $n+1$, on a

$$m = 3h, \quad \frac{n+2}{h} = p \quad \text{ou} \quad \frac{n+1}{h} = p,$$

de sorte que, l'autre facteur étant désigné par q, les trois nombres p, q, h doivent vérifier les deux équations

$$hp - q = \pm 1, \quad (3h + 3)^2 + 2 = pq = p(hp \mp 1).$$

Comme dans le cas précédent, on peut ne conserver que le signe supérieur, en convenant d'accepter les valeurs négatives de p et de déterminer n par la formule $n + 2 = ph$ si p est positif, et par la formule $n + 1 = -ph$ si p est négatif. Sous cette restriction, nous n'avons plus qu'à chercher les solutions en nombres entiers de l'équation

$$(8) \qquad 9h^2 - (p^2 - 18)h + 11 + p = 0.$$

On ne peut pas supposer $p + 11 < 0$, car, en posant dans cette hypothèse $p = -p_1$, p_1 serait un nombre entier et positif. Comme le nombre h est positif et diviseur de $p + 11 = -(p_1 - 11)$, on ferait $p_1 - 11 = hl$, l désignant un quotient entier et positif, et l'on déduirait de la formule (8)

$$9h - l = p_1^2 - 18, \quad 9hl = 9p_1 - 99 = l(p_1^2 - 18 + l).$$

Comme l est entier et positif, on déduirait de la dernière formule

$$p_1^2 - 18 < 9p_1 - 99; \quad (p_1 - \tfrac{9}{2})^2 + 81(1 - \tfrac{1}{4}) < 0,$$

ce qui est évidemment impossible.

La somme $p + 11$ est donc positive. Soit donc $p + 11 = hl$; le nombre l est entier et positif; de plus, l'équation (8) divisée par h donne

$$9h + l = p^2 - 18.$$

Si l'on suppose $l = 1$, on déduit des deux formules précédentes, $9h = p^2 - 19 = 9p + 99$,

$$p^2 - 9p - 118 = 0.$$

Or on reconnaît aisément que cette équation n'a pas de racine entière. Comme le nombre l est résidu quadratique de 3 et qu'il est supérieur à 1, il ne peut pas être inférieur à 4. Le produit $3lh$ est donc supérieur à $9h+l$, car, si l'on suppose $l < 3h$, $9h+l$ est $< 12h$; si, au contraire, on suppose $l > 3h$, $9h+l$ est $< 4l < 3hl$, si h est > 1, et l'on reconnaît aisément que l'on ne peut pas supposer $h = 1$. On a donc

$$3lh = 3p + 33 > p^2 - 18, \quad p^2 - 3p - 51 < 0.$$

Comme les racines du trinôme $p^2 - 3p - 51$ sont comprises entre 14 et -11, la valeur de p doit être comprise entre les mêmes limites. D'ailleurs la valeur numérique de p doit être supérieure à 4, car autrement l'équation (8) n'aurait que des racines négatives. Le nombre p est donc compris entre 14 et 4 ou entre -4 et -11. D'un autre côté, le nombre p étant diviseur de $9(h+1)^2+2$ ne peut être que simplement pair ou impair, et ses diviseurs premiers ne peuvent être d'aucune des deux formes $8l+5$, $8l+7$. Les valeurs comprises entre les limites assignées et vérifiant ces conditions sont 6, 9, 11, -6, -9. Or l'équation (8) exige que p soit premier avec 3. Il ne reste donc que la valeur $p = 11$, pour laquelle l'équation (8) devient

$$9h^2 - 103h + 22 = 0.$$

Comme les racines de cette équation sont irrationnelles, nous concluons :

I. *Parmi les solutions de l'équation* (1), *il n'en est aucune où le nombre m soit en même temps divisible par* 3 *et premier avec l'un des deux nombres* $n+1$, $n+2$.

Cela aurait lieu nécessairement si l'on pouvait vérifier l'équation (1) en prenant $m = 3A^\alpha$; donc :

II. *L'équation* (1) *ne peut être vérifiée par aucune valeur de m comprise dans la formule $m = 3A^\alpha$, où* A *désigne un nombre premier quelconque, et α un exposant entier et positif.*

Relativement à la question géométrique proposée, nous avons ce théorème :

III. *Aucune surface de degré triple d'un nombre premier ou d'une puissance de nombre premier ne peut être osculatrice en un point arbitraire d'une surface donnée.*

7. Le facteur commun du nombre m et de l'un des deux nombres $n+1$ ou $n+2$ peut-il être une puissance de 2? La solution de cette question renferme implicitement celle de la question suivante : le nombre m qui satisfait à l'équation (1) peut-il être de la forme $2^\lambda A^\alpha$, A désignant un nombre premier impair? Car, si $m = 2^\lambda A^\alpha$ et que m ne soit pas premier avec l'un des deux facteurs $n+1$, $n+2$, le nombre 2^λ sera le plus grand diviseur de m et de l'un des deux nombres $n+1$, $n+2$.

Nous distinguerons deux cas, suivant que m sera premier avec 3 ou multiple de 3. Dans le premier cas, on aura les équations

$$(2^\lambda h + 3)^2 + 2 = 3pq, \quad n+1 = 2^\lambda p, \quad n+2 = hq,$$

ou bien

$$n+1 = hq, \quad n+2 = 2^\lambda p.$$

L'élimination du nombre n donne l'une des deux équations

$$hq - 2^\lambda p = \pm 1.$$

Multipliant cette équation par $3q$ et remplaçant $3pq$ par l'expression donnée dans la première formule, on a l'équation

$$(9) \qquad 2^{3\lambda} h^2 - 3(q^2 - 2^{2\lambda+1})h + 11 . 2^\lambda \pm 3q = 0.$$

Soit d'abord $\lambda = 1$. L'équation à résoudre devient

$$(\text{A}) \qquad 8h^2 - 3(q^2 - 8)h + 22 \pm 3q = 0.$$

1° Si $22 \pm 3q$ est > 0, comme le nombre h doit être diviseur du dernier terme, nous poserons

$$(a) \qquad 22 \pm 3q = hl,$$

de sorte que l'équation (A), divisée par h, donnera

$$(b) \qquad 8h + l = 3q^2 - 24.$$

Le nombre l est entier et positif; on déduit de l'équation (a) qu'il est premier avec 3 et de l'équation (b) qu'il est de la forme $8\xi + 3$. D'ailleurs, le nombre h est un nombre impair supérieur à 3. Le produit hl est donc supérieur à la somme $8h + l$, de sorte que l'on a

$$22 \pm 3q > 3q^2 - 24, \quad 3q^2 \mp 3q - 46 < 0.$$

La valeur de $\pm q$ doit donc être comprise entre les deux racines du trinôme $x^2 - x - \frac{46}{3}$, et par conséquent entre les deux nombres 3 et -2. Mais l'équation (b) exige que q^2 soit > 8. L'équation (A) est donc impossible dans l'hypothèse admise.

2° Soit $22 \pm 3q < 0$, ce qui exige qu'on prenne le signe inférieur et que l'on ait $3q > 22$. Posons $3q - 22 = hl$; l'équation (A), divisée par h, donne

$$8h - l = 3q^2 - 24.$$

Les deux nombres h et l sont entiers et positifs, et l'on déduit de la dernière équation que le nombre l est de la forme $8\xi + 5$. Enfin de l'hypothèse $q > \frac{22}{3}$ on conclut

$$q^2 > 49, \quad 8h - l > 0 \quad \text{et} \quad 8h - l < 8h < 2lh.$$

On a donc

$$3q^2 - 24 < 6q - 44, \quad 3(q-1)^2 + 17 < 0,$$

ce qui est évidemment impossible. Ainsi, quel que soit le signe adopté dans l'équation (A), il est impossible de la vérifier par des valeurs entières et positives de h et de p. Donc :

I. *L'équation* (1) *n'admet aucune solution où le plus grand diviseur commun de m et de l'un des nombres* $n+1$, $n+2$ *soit égal à* 2.

Or cela aurait nécessairement lieu si le nombre m pouvait être de la forme $2A^{\alpha}$, A désignant un nombre premier supérieur à 3, car, le nombre m ne pouvant être premier avec aucun des deux facteurs $n+1$, $n+2$ (n° 5, I), l'un de ces deux nombres aurait avec m le nombre 2 comme plus grand commun diviseur. Donc :

II. *Le degré d'une surface osculatrice en un point arbitraire d'une surface donnée ne peut être égal au double d'un nombre premier supérieur à* 3 *ni au double d'une puissance d'un pareil nombre.*

8. Reprenons l'équation (9) et montrons que, si λ n'est pas supérieur à 4, on ne peut pas supposer $11.2^{\lambda} \pm 3q < 0$. Dans cette hypothèse, il faut prendre le signe inférieur et faire $3q > 11.2^{\lambda}$. Posons

$$(a) \qquad 3q - 11.2^{\lambda} = hl;$$

l'équation (9), divisée par h, donnera

$$(b) \qquad 3q^2 - 6.2^{2\lambda} = 2^{3\lambda}h - l,$$

l désignant aussi bien que h un nombre entier et positif. On déduit de la dernière formule que l doit être de la forme $8x+5$ et de l'équation (a) que ce nombre est premier avec 3.

En multipliant l'équation (a) par $3q+11.2^{\lambda}$ et l'équation (b) par 3, on obtient les deux formules

$$\begin{aligned} 9q^2 - 121.2^{2\lambda} &= hl(2q + 11.2^{\lambda}), \\ 9q^2 - 18.2^{2\lambda} &= 3.2^{3\lambda}h - 3l, \end{aligned}$$

dont la comparaison donne l'inégalité

$$l(3q + 11.2^{\lambda}) < 3.2^{3\lambda},$$

d'où, ayant égard à l'hypothèse $3q > 11.2^\lambda$, on déduit

$$(c) \qquad l < \frac{3.2^{2\lambda-1}}{11},$$

1° $\lambda = 2$:

$$l < \frac{3.8}{11} < 3;$$

2° $\lambda = 3$:

$$l < \frac{3.32}{11} < 9;$$

3° $\lambda = 4$:

$$l < \frac{3.128}{11} < 36$$

Comme le nombre l doit être de la forme $8x + 5$ et non divisible par 3, la limite obtenue exclut toute valeur de l dans le premier cas; elle ne laisse que la valeur $l = 5$ quand $\lambda = 3$ et les valeurs 5, 13, 29 quand $\lambda = 4$.

Or, en éliminant h entre les équations (a) et (b), on obtient

$$(d) \qquad 3lq^2 - 3.2^{3\lambda}q + l^2 - 6.2^{2\lambda}l + 11.2^{4\lambda} = 0,$$

et l'on constate aisément que cette équation n'est pas vérifiée par une valeur entière de q, soit lorsqu'on fait $\lambda = 3$, $l = 5$, soit lorsqu'on prend $\lambda = 4$ et qu'on donne à l l'une des trois valeurs 5, 13 ou 19. Donc, si l'équation (9) est possible pour des valeurs de λ inférieures à 5, on a nécessairement

$$11.2^\lambda \pm 3q > 0.$$

9. La vérification que nous venons d'indiquer relativement à l'équation (d) n'offre pas de difficulté; mais, dans les deux cas où, λ étant égal à 4, le nombre l est égal à 13 ou à 29, le calcul direct est un peu long. On peut l'éviter de la manière suivante.

D'abord, en considérant l'équation (d) suivant le module 2^9, on a entre l et q la congruence

$$3q^2 + l \equiv 0 \pmod{512},$$

dont les solutions sont données par la formule $q = 2^8\theta \pm 217$ si $l = 13$ et par la formule $q = 2^8\theta \pm 209$ si $l = 29$. Mais, comme le nombre q ne peut être de la forme $8x + 7$, on doit exclure les signes inférieurs.

On déduit aussi de l'équation (d)

$$3q \equiv 11.2^4 \pmod{l}.$$

Si $l = 13$, on en déduit

$$q = 2^8\theta + 217 \equiv 11 \pmod{13},$$
$$\theta = 13\xi + 6.$$

Si $l = 29$, on a

$$3q = 2^8 3\theta + 627 \equiv 11.16 \pmod{29},$$
$$\theta = 29\xi + 3.$$

Enfin, comme la somme des trois derniers termes de l'équation (d) est positive, il faut que la somme des deux autres soit négative, ce qui exige que l'on ait

$$lq < 2^{12}, \quad l(2^8\theta + a) < 2^{12} \quad (a = 217, 209).$$

On a donc *a fortiori*

$$\theta < \frac{16}{l},$$

et, par conséquent, $\theta < 2$ si $l = 13$, $\theta < 1$ si $l = 29$. Or cela est impossible, puisque θ ne peut être inférieur à 3. Ainsi, dans les deux cas énoncés, l'équation (d) n'admet pas de solution entière, ce qui justifie la conclusion du numéro précédent.

10. Examinons si l'équation (9) peut être résolue en supposant $11.2^\lambda \pm q > 0$. Nous ferons

$$(a) \qquad 11.2^\lambda \pm 3q = hl,$$

et nous déduirons de l'équation (9), divisée par h,

$$(b) \qquad 2^{2\lambda}h + l = 3(q^2 - 2^{2\lambda+1}).$$

On conclut de la dernière formule que l est de la forme $8x + 3$.

On ne peut pas prendre le signe inférieur dans l'équation (a), car avec ce signe on devrait vérifier l'inégalité $q < \frac{11 . 2^\lambda}{3}$. Mais on déduit de l'équation (b)

$$q > 2^\lambda \sqrt{\frac{2^\lambda h + b}{3}},$$

de sorte que le nombre q serait compris entre les deux limites

$$(c) \qquad 2^\lambda \sqrt{\frac{2^\lambda h + 6}{3}} < q < 2^\lambda \frac{11}{3},$$

ce qui exige, avant tout, que l'on ait

$$2^\lambda h + 6 < \frac{121}{3}, \quad 2^\lambda h < \frac{103}{3}.$$

Comme le nombre h ne peut être inférieur à 5, il faut que λ soit inférieur à 3. Soit $\lambda = 1$. Puisque l'on a $h \geqq 5$, $2h + 6 \geqq 16$, et l'on déduit de la formule (c)

$$4 < q < \frac{22}{3} < 8.$$

Le nombre q devrait donc être égal à l'un des deux nombres 5 ou 7, ce qui est impossible, puisque -2 est résidu quadratique de q.

Soit $\lambda = 2$. On aura

$$2^\lambda h + 6 \geqq 26,$$

et la formule (c) donnera

$$11 < 4\sqrt{\frac{26}{3}} < q < 4\,\frac{11}{3} < 15.$$

Le seul nombre impair compris entre ces deux limites est 13; or,

-2 n'étant pas résidu quadratique de 13, la valeur $q = 13$ est inacceptable.

Ainsi, quelle que soit la valeur de λ, on doit prendre le signe supérieur dans les équations (9) et (a).

L'élimination de q entre les deux équations (a) et (b) donne

$$h^2 l^2 - 22.2^\lambda hl + 103.2^{2\lambda} - 2^{3\lambda}3h - 3l = 0.$$

Nous déduisons immédiatement de cette équation qu'on ne peut pas supposer $l < 2^{2\lambda+1}$, car, dans cette hypothèse, il faut que les deux racines de l'équation en l soient de même signe, sans quoi on aurait

$$2^{2\lambda+1} > l > 22.2^\lambda h + 3, \quad h < \frac{2^\lambda}{11},$$

ce qui est impossible, λ étant inférieur à 5 et h supérieur à 5. Or, si les deux racines de l'équation en l sont positives, on a

$$h < \frac{103}{3.2^\lambda}.$$

Si $\lambda > 2$, on a

$$h < \frac{103}{24} < 5,$$

ce qui est impossible. Si $\lambda = 2$, h est < 9; enfin si $\lambda = 1$, h est < 18. Comme le nombre h est au moins égal à 5 et premier avec 3, il n'a que l'une des valeurs 5, 7 si $\lambda = 2$ et l'une des valeurs 5, 7, 11, 13 et 17 si $\lambda = 1$. Or, on reconnaît aisément que ces valeurs sont inadmissibles. En effet, prenons l'équation (9) sous la forme

$$(e) \qquad 3(hq^2 - q) = 2^\lambda[(2^\lambda h + 3)^2 + 2];$$

en y faisant $\lambda = 2$ et $h = 5$ ou 7, on obtient les deux équations

$$5q^2 - q = 4.3.59, \quad 7q^2 - q = 4.3.107,$$

qui ne peuvent être vérifiées en nombres entiers. De même, si l'on fait $\lambda = 1$ dans l'équation (e) et qu'on y substitue les valeurs 5, 7, 11, 13 et 17 de h, on trouve

$$5q^2 - q = 2.3.19, \quad 7q^2 - q = 2.97,$$
$$11q^2 - q = 2.209, \quad 13q^2 - q = 2.281,$$
$$17q^2 - q = 2.457.$$

Or, on constate sans peine l'impossibilité de ces équations en nombres entiers; comme 97, 281, 457 sont des nombres premiers et que q doit être impair, ce nombre ne pourrait recevoir que l'une des deux valeurs 1 ou 97 dans la seconde équation, l'une des valeurs 1 ou 281 dans la quatrième et l'une des valeurs 1 ou 457 dans la dernière, ce qui est manifestement impossible. Dans la troisième équation, q devrait être multiple de 11; on aurait donc

$$121 q_1^2 - q_1 = 2.19,$$

ce qui est impossible. Enfin, dans la première équation, on ne peut donner à q que l'une des deux valeurs 3 ou 19, et l'on reconnait immédiatement que ces valeurs ne vérifient pas l'équation.

Si donc l'équation (9) est possible, on doit supposer $l > 2^{2\lambda+1}$. Or, dans ce cas, $2^\lambda(11.2^\lambda + 3q) = 2^\lambda lh > 2.2^{3\lambda}h$; si donc $l < 2^{3\lambda}h$, on a

$$2^\lambda lh > 2^{3\lambda}h + l,$$

et, si $l > 2^{3\lambda}h$, on a *a fortiori*

$$2^\lambda lh > 2l > 2^{3\lambda}h + l.$$

La comparaison des deux formules (a) et (b) donne donc

$$11.2^{2\lambda} + 3.2^\lambda q < 3q^2 - 6.2^{2\lambda}, \quad 3q^2 - 3.2^\lambda q - 2^{2\lambda}.17 < 0$$

Cette inégalité peut s'écrire

$$3(q^2 - 2^{\lambda-1})^2 - 2^{2\lambda-2}(3 + 4.17) < 0,$$

et l'on en déduit

$$q < 2^{\lambda-1}\left(1+\sqrt{1+\frac{68}{3}}\right) < 3.2^{\lambda}.$$

D'ailleurs on déduit de la formule (b), en ayant égard à l'inégalité $l > 2^{2\lambda+1}$,

$$3q^2 > 2^{2\lambda}(7+2^{\lambda}h), \quad q > 2^{\lambda}\sqrt{\frac{7+2^{\lambda}h}{3}}.$$

Le nombre q est donc compris entre les deux limites

$$2^{\lambda}\sqrt{\frac{7+2^{\lambda}h}{3}} < q < 3.2^{\lambda},$$

ce qui exige, avant tout, que l'on ait

$$7+2^{\lambda}h < 27, \quad h < \frac{20}{2^{\lambda}}.$$

Comme le nombre h ne peut être inférieur à 5, il faut que λ soit égal à 1. Dans ce cas, le nombre q doit être compris entre 4 et 6, c'est-à-dire qu'il doit être égal à 5. Mais cette valeur est inadmissible, parce que -2 est résidu quadratique de q. Ainsi, dans toute hypothèse, l'équation (9) est impossible lorsque l'exposant λ est inférieur à 5.

11. Le résultat obtenu dans les quatre numéros précédents peut s'énoncer de la manière suivante :

I. *Parmi les valeurs de m propres à vérifier l'équation* (1), *il n'en est aucune qui soit première avec* 3 *et dont le plus grand diviseur commun avec l'un des deux nombres $n+1$, $n+2$ soit égal à* 2, 4, 8 *ou* 16.

En réunissant cette conclusion avec le théorème I du n° 5, on reconnaît que les formules $2A^{\alpha}$, $8A^{\alpha}$, $16A^{\alpha}$ ne renferment aucune valeur de m propre à vérifier l'équation (1) et que la formule $4A^{\alpha}$ n'en renferme qu'une seule, $m=20$. En effet, le nombre m étant diviseur du produit $(n+1)(n+2)$, dont les facteurs sont premiers entre eux, il faut ou bien qu'il divise l'un des facteurs et qu'il soit premier avec l'autre, ou bien qu'il se décompose en deux facteurs premiers entre eux. Dans le premier cas, il résulte des nos **5** et **6** que le nombre m ne peut avoir que l'une des trois valeurs 1, 5 et 20; dans le second, il est impossible qu'il soit de la forme $2^\lambda A^\alpha$, λ désignant un nombre inférieur à 5 et A un nombre premier supérieur à 3, car alors il ne pourrait se décomposer que d'une seule manière en deux facteurs premiers entre eux, et 2^λ serait le plus grand diviseur de m et de l'un des deux nombres $n+1$, $n+2$, ce qui a été démontré impossible. Donc :

II. *Si l'on désigne par* A *un nombre premier supérieur à* 3, *par* α *un exposant entier et positif, les trois formules* $2A^\alpha$, $8A^\alpha$, $16A^\alpha$ *ne renferment aucune valeur de m propre à vérifier l'équation* (1).

III. *La seule valeur de m, propre à vérifier l'équation* (1), *qui soit renfermée dans la formule* $4A^\alpha$, *est* $m = 20$.

Relativement au problème géométrique proposé, nous concluons que :

IV. *Parmi les surfaces que l'on peut rendre osculatrices en un point arbitraire d'une surface donnée, celle du vingtième ordre est la seule dont le degré soit égal au produit d'une puissance d'un nombre premier supérieur à* 3, *multipliée par l'un des nombres* 2, 4, 8 *ou* 16.

12. Si le nombre m est de la forme $3.2^\lambda h$, h désignant un nombre impair, et si le plus grand diviseur commun de m et de l'un des deux nombres $n+1$, $n+2$ est égal à 2^λ, l'équation (5) devient

$$9(2^\lambda h+1)^2+2=\frac{(n+1)(n+2)}{2^\lambda h}=pq,$$

et donne lieu à l'une des deux décompositions suivantes :

$$\begin{aligned} n+1&=2^\lambda q, & n+2&=hp, & hp-2^\lambda q&=\ \ 1,\\ n+1&=hp, & n+2&=2^\lambda q, & hp-2^\lambda q&=-1. \end{aligned}$$

Le problème de trouver les valeurs de m divisibles par 3 qui vérifient l'équation (1), de manière que le plus grand diviseur commun de m et de l'un des deux nombres $n+1$, $n+2$ soit 2^λ, revient donc à résoudre en nombres entiers et positifs le système des deux équations

$$hp - 2^\lambda q = \pm 1, \quad pq = 9(2^\lambda h + 1)^2 + 2\,;$$

c'est ce que nous allons faire, en nous bornant aux valeurs 1, 2 et 3 de λ.

En multipliant la première équation par p et remplaçant pq par sa valeur en fonction de h, nous trouvons

$$(10) \qquad 9.2^{3\lambda}h^2 - (p^2 - 18.2^{2\lambda})h + (11.2^\lambda \pm p) = 0.$$

Nous devons distinguer deux cas, suivant que le dernier terme de cette équation est positif ou négatif.

1° Soit d'abord $11.2^\lambda \pm p < 0$, ce qui exige que l'on prenne le signe inférieur et qu'on suppose $p > 11.2^\lambda$. Comme le nombre h doit être diviseur du dernier terme, nous aurons, en désignant par l un nombre entier et positif,

$$(a) \qquad p - 11.2^\lambda = hl,$$
$$(b) \qquad 9.2^{3\lambda}h - l = p^2 - 18.2^{2\lambda}.$$

Nous concluons de l'équation (b) que le nombre l doit vérifier les deux congruences

$$l \equiv -p^2 \pmod{8}, \quad l \equiv -p^2 \pmod{9},$$

et que, par conséquent, il est de la forme $24x + 23$. Si, après avoir multiplié l'équation (a) par $p + 11.2^\lambda$, on la combine avec l'équation (b), on trouve

$$-103.2^{2\lambda} = h[l(p + 11.2^\lambda) - 9.2^{3\lambda}] + l,$$

et l'on en conclut, en ayant égard à l'hypothèse $p > 11.2^\lambda$,

$$l < \frac{9.2^{\lambda-1}}{11}.$$

Si $\lambda = 1$ ou 2, le nombre l doit être inférieur à 23, ce qui est impossible. Si $\lambda = 3$, l est < 32; or, la seule valeur inférieure à cette limite qui soit renfermée dans la formule $24x + 23$ est $l = 23$. Faisant donc $\lambda = 3$ et $l = 23$ dans les équations (a) et (b), et éliminant p, on obtient l'équation

$$529h^2 - 16.35h + 103.2^6 + 23 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$h < \frac{16.35}{529} < 2$$

Comme le nombre h ne peut être inférieur à 3, nous concluons que l'hypothèse est impossible.

13. Soit donc $11.2^\lambda \pm p = hl > 0$. Nous déduisons de l'équation (10)

$$(a) \qquad 11.2^\lambda \pm p = hl,$$

$$(b) \qquad 9.2^{3\lambda}h + l = p^2 - 18.2^{2\lambda}.$$

La dernière formule exige que l soit résidu quadratique de 8 et de 3 et que, conséquemment, il soit de la forme $24x + 1$.

On ne peut pas supposer $h = 1$, parce que le nombre m serait alors premier avec l'un des deux nombres $n + 1$, $n + 2$, contrairement au théorème I du n° 6. On ne peut pas non plus prendre $h = 3$, car, en éliminant p entre les équations (a) et (b), on aurait l'équation

$$9l^2 - (66.2^\lambda + 1)l + 2^{2\lambda}(103 - 27.2^\lambda) = 0,$$

dont l'impossibilité se constate aisément de la manière suivante. Le nombre l compris dans la formule $24x + 1$ doit diviser $103 - 27.2^\lambda$. Or, en faisant $\lambda = 1$, 2 et 3, on trouve que ce dernier nombre est égal à 49, -5, -113; comme aucun de ces nombres n'admet de diviseur de la forme voulue $24x + 1$ autre que 1, on devrait prendre $l = 1$, et l'on reconnaît aisément que cette valeur ne satisfait pas à l'équation.

Ainsi, le nombre h ne peut pas être inférieur à 5.

On ne peut pas supposer $l > 9.2^{2\lambda}$, car, en multipliant l'équation (a)

par $2^{\lambda+1}$, on aurait

$$22.2^{2\lambda} \pm 2^{\lambda+1}p = 2\ 2^{\lambda}lh > 9.2^{2\lambda}h + l,$$
$$22.2^{2\lambda} \pm 2^{\lambda+1}p > p^2 - 18.2^{2\lambda},$$
$$(p \mp 2^{\lambda})^2 \quad < 2^{2\lambda}.41.$$

On a donc

$$\pm p < 2^{\lambda}(1+\sqrt{41}) < 8.2^{\lambda}.$$

D'ailleurs on déduit de l'équation (b), en ayant égard à l'hypothèse $l > 9.2^{2\lambda}$, que la valeur numérique de p doit être inférieure à $3.2^{\lambda}\sqrt{3+2^{\lambda}h}$. On devrait donc avoir

$$3.2^{\lambda}\sqrt{3+2^{\lambda}h} < 8.2^{\lambda},$$
$$9(3+2^{\lambda}h) < 64,$$

ce qui est impossible, même en supposant $\lambda = 1$, puisque le nombre h n'est pas inférieur à 5.

Si donc l'équation (10) est possible, on a

$$l < 9.2^{2\lambda}.$$

On ne peut pas supposer $l = 1$, car, en éliminant p entre les équations (a) et (b), on obtient la formule

$$(c) \qquad h^2l^2 - 2^{\lambda+1}(11l + 9.2^{2\lambda-1})h + 103.2^{2\lambda} - l = 0,$$

d'où, en supposant $l = 1$, et en faisant successivement $\lambda = 1$, 2 et 3, on déduit

$$h^2 - 4.\ 29h + 3.137 = 0,$$
$$h^2 - 8.\ 83h + 27.\ 61 = 0,$$
$$h^2 - 16.229h + 3.\ 13.169 = 0.$$

L'impossibilité de ces équations se reconnaît aisément, sans effectuer le calcul des racines. D'abord, l'une des racines ne peut pas être entière sans que l'autre le soit également. Le dernier terme de chacune de ces équations doit donc se décomposer en deux facteurs dont la somme soit égale au coefficient du second terme changé de signe. Comme ce dernier coefficient n'est divisible par 3 dans aucune de ces équations, tandis que le dernier terme est multiple de 3, il faut que l'une des racines soit multiple de 3 et que l'autre soit première avec 3. Les deux racines seraient donc $h=3$, $h'=137$ pour la première équation, 27 et 61 pour la deuxième, 3 et 13^3 pour la troisième; comme aucun de ces trois couples de racine ne présente la somme voulue, l'hypothèse est inadmissible; le nombre l doit être compris entre les deux limites 1 et $9.2^{2\lambda}$.

La somme des deux derniers termes étant positive dans l'équation (c), il faut que la somme des autres termes soit négative; on a donc

$$l^2 - \frac{22.2^\lambda}{h} l - \frac{9.2^{3\lambda}}{h} < 0,$$

et, par conséquent, le nombre l doit être inférieur à la plus grande racine de ce trinôme, c'est-à-dire qu'il doit vérifier la formule

$$(d) \qquad l < \frac{11.2^\lambda}{h} + 2^\lambda \sqrt{\frac{121}{h^2} + \frac{9.2^\lambda}{h}}.$$

Comme le nombre h ne peut être inférieur à 5, il faut que l'on ait

$$l < \frac{11.2^\lambda}{5} + 2^\lambda \sqrt{5 + 2^{\lambda+1}}.$$

Si $\lambda = 1$, l est $< 5 + 2.3$; si $\lambda = 2$, on trouve

$$l < 9 + 4\sqrt{13} < 25;$$

enfin, si $\lambda = 3$, le nombre l doit être inférieur à $\frac{88}{5} + 8\sqrt{5+16} < 58$.

Les deux premières valeurs de λ ne laissent pour l aucune valeur admissible, puisque ce nombre doit être de la forme $24x+1$, sans se réduire à 1. Quand $\lambda = 3$, le nombre l ne peut avoir que l'une des deux valeurs 25 et 49, auxquelles correspondent, par la formule (c), les deux équations

$$(25h)^2 - 16.563h + 6567 = 0,$$
$$(49h)^2 - 16.827h + 6543 = 0.$$

La première n'admet pas de racine rationnelle, parce que l'on en déduit en même temps

$$h < \frac{16.563}{625} < 16, \quad 3h \equiv 7 \pmod{5}, \quad h = 10x + 9;$$

or le dernier terme $6567 = 3.11.199$ n'admet pas de diviseur qui vérifie en même temps ces deux conditions. La deuxième équation est également impossible, parce qu'on en déduit la congruence impossible

$$h^2 - 2h + 3 = (h-1)^2 + 2 \equiv 0 \pmod{5}.$$

En joignant ce résultat à celui du numéro précédent, nous sommes en droit de conclure que l'équation (10) est impossible en nombres entiers. Donc :

I. *Parmi les valeurs de m qui satisfont à l'équation* (1), *il n'en est aucune qui soit multiple de* 3 *et dont le plus grand diviseur commun avec l'un des nombres* $n+1$, $n+2$ *soit égal à* 2, 4 *ou* 8.

C'est cependant ce qui aurait lieu si l'équation (1) admettait quelque solution de la forme $3.2^\lambda A^\alpha$, A désignant un nombre premier impair, α un exposant entier et positif, λ l'un des trois nombres 1, 2 ou 3, car le produit $(n+1)(n+2)$ étant divisible par $\frac{m}{3} = 2^\lambda A^\alpha$ sans qu'aucun des deux facteurs soit premier avec m (n° **6**), il est nécessaire que l'un de ces facteurs soit divisible par 2^λ et l'autre par A^α. Nous avons donc, relativement à la question géométrique proposée, le théorème suivant :

II. *Aucune des surfaces dont le degré est compris dans l'une des formules* $6A^\alpha$, $12A^\alpha$, $24A^\alpha$, *où* A *désigne un nombre premier impair et* α *un exposant entier et positif, ne peut être rendue osculatrice en un point arbitraire d'une surface donnée.*

II.

14. En procédant d'une manière analogue, on trouvera des théorèmes semblables à ceux que nous venons d'établir, mais dans lesquels le facteur 2 sera remplacé par quelque facteur premier impair. Nous nous bornerons, sur ce sujet, aux résultats obtenus, afin de construire certaines formes linéaires où se trouvent renfermées toutes les solutions de l'équation (1), ce qui nous permettra de trouver aisément toutes les solutions en nombres inférieurs à une limite assignée.

L'équation (1), multipliée par 4, peut s'écrire

$$(1)\qquad 4m^3+24m^2+44m+3=3(2n+3)^2=3y^2.$$

Suivant le module 5, y^2 ne peut avoir que l'une des valeurs 0, 1, -1; le nombre m doit donc vérifier l'une des trois congruences

$$f(m)=m^3+m^2+m\equiv 3-3y^2\equiv 3,\ 0,\ 1.$$

Or

$$f(\pm 1)=1\pm 2\equiv 3,\ 4,\quad f(\pm 2)\equiv 4.$$

On doit donc exclure toutes les valeurs de m renfermées dans les formes linéaires

$$5x+(2,3,4).$$

Soit $m=5\theta+1$. L'équation (1), considérée suivant le module 25, donne la congruence

$$4(15\theta+1)-(10\theta+1)-6(5\theta+1)+3\equiv 3y^2\ (\text{mod. } 25),$$
$$20\theta\equiv 3y^2\quad (\text{mod. } 25).$$

Cette congruence exige que y et conséquemment θ soient multiples de 5. Toutes les valeurs admissibles de m dans la formule $5\theta+1$ sont donc de la forme $25l+1$. Les valeurs comprises dans la formule 5θ se distribuent dans les cinq formes linéaires $25l+(0, 5, 10, 15, 20)$. Les valeurs de m qui satisfont à l'équation (1) sont donc toutes renfermées dans les six formules

$$(2) \qquad 25l + (0, 1, 5, 10, 15, 20).$$

15. En réduisant l'équation (1) suivant le module 27, on trouve que le nombre m doit vérifier la congruence

$$f(m) = 4m^3 - 3m^2 - 10m \equiv 3(y^2 - 1) \pmod{27}.$$

Or, on a

$$y^2 \equiv 0, 1, 4, 7 \pmod{9}, \quad 3(y^2 - 1) \equiv 24, 0, 9, 18 \pmod{27}.$$

Les seules valeurs admissibles de m sont donc celles qui vérifient quelqu'une des congruences

$$f(m) \equiv 0, 9, 18, 24 \pmod{27}.$$

Or

$$\begin{aligned}
f(\pm 1) &\equiv -3 \pm (4 - 10) \equiv 18, 3,\\
f(\pm 2) &\equiv -12 \pm 2(16 - 10) \equiv 0, 3,\\
f(\pm 4) &\equiv 6 \pm 4(54) \equiv 6, 6,\\
f(\pm 5) &\equiv 6 \pm 5(9) \equiv 24, 15,\\
f(\pm 7) &\equiv 15 \pm 7(-3) \equiv 21, 9,\\
f(\pm 8) &\equiv 24 \pm 8(3) \equiv 21, 0,\\
f(\pm 10) &\equiv -3 \pm 10(12) \equiv 9, 12,\\
f(\pm 11) &\equiv -12 \pm 11(15) \equiv 18, 12.\\
f(\pm 13) &\equiv 6 \pm 13(-9) \equiv 24, 15,
\end{aligned}$$

On voit par ce Tableau que l'on doit exclure les valeurs -1, -2, $+4$, -4, -5, 7, 8, -10, -11, -13. De plus, parmi les valeurs de la forme $3l$, on doit exclure celles qui ne vérifient pas la congruence

$$\begin{gathered}
-30l \equiv 3(y^2 - 1) \equiv 0, 9, 18, 24 \pmod{27},\\
-l \equiv 0, 3, 6, 8 \pmod{9}.
\end{gathered}$$

Les seules valeurs de l qui vérifient quelqu'une de ces conditions entre o et 9 sont o, 1, 3, 6; on doit donc exclure les valeurs 2, 4, 5, 7 et 8 de l, et par conséquent les valeurs 6, 12, 15, 21, 24 de m. Toutes les valeurs possibles de m sont donc comprises dans les formules

$$(3) \qquad 27l+(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ 18,\ 19,\ 20).$$

16. En combinant les formules (2) et (3), nous trouvons 72 progressions arithmétiques, dont la raison est 675, et dans lesquelles sont renfermées toutes les valeurs de m qui satisfont au problème proposé. Pour les construire, nous avons d'abord à résoudre l'équation indéterminée

$$(a) \qquad 25x_0 - 27y_0 = 1.$$

On trouve aisément la solution $x_0 = 13$, $y_0 = 12$. Or, si l'on désigne par α l'un des six nombres o, 1, 5, 10, 15, 20 et par β l'un des douze nombres qui figurent dans la parenthèse de la formule (3), nous devons résoudre l'équation

$$(b) \qquad 25x - 27y = \beta - \alpha,$$

afin de faire accorder les deux formes du nombre m:

$$m = 25x + \alpha = 27y + \beta.$$

Pour cela, multiplions l'équation (a) par ($\beta - \alpha$) et comparons le résultat avec l'équation (b); nous reconnaissons que cette dernière équation est résolue d'une manière générale par les formules

$$x = 27\lambda + 13(\beta - \alpha), \quad y = 25\lambda + 12(\beta - \alpha);$$

par conséquent toutes les solutions de notre problème sont renfermées dans la formule

$$(c) \qquad m = 675\lambda + 25.13(\beta - \alpha) + \alpha.$$

Si nous voulons obtenir toutes les valeurs positives de m sans attribuer à λ des valeurs négatives, nous devons réduire le produit $13(\beta-\alpha)$ à son résidu minimum positif suivant le module 27. Pour simplifier cette réduction, nous formons le Tableau des résidus des vingt-six premiers multiples de 13, en écrivant chaque résidu au-dessous du multiplicateur correspondant :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	26	12	25	11	24	10	23	9	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
8	21	7	20	6	19	5	18	4	17
21	22	23	24	25	26				
3	16	2	15	1	14.				

Nous obtiendrons les formules cherchées en prenant dans ce Tableau le résidu du produit $13(\beta-\alpha)$ au-dessous du nombre auquel se réduit le facteur $\beta-\alpha$ suivant le module 27. Nous partagerons ces formules en six groupes, correspondant chacun à l'une des valeurs de α.

1° $\alpha=0$:

$$\beta-\alpha=\beta=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5, 9, 10, 11, 13, 18, 19, 20,$$
$$13(\beta-\alpha)\equiv 0, 13, 26, 12, 11, 9, 22,\ 8,\ 7, 18,\ 4, 17.$$

I. $\qquad m=675\lambda+25(0, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 17, 18, 22, 26).$

2° $\alpha=1$:

$$\beta-1\equiv 26, 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8, 9, 10, 12, 17, 18, 19,$$
$$13(\beta-1)\equiv 14, 0, 13, 26, 25, 23, 9, 22, 21,\ 5, 18,\ 4.$$

II. $\quad m=675\lambda+25(0, 4, 5, 9, 13, 14, 18, 21, 22, 23, 25, 26)+1.$

3° $\alpha=5$:

$$\beta-5\equiv 22, 23, 24, 25, 0,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8, 13, 14, 15,$$
$$13(\beta-5)\equiv 16,\ 2, 15,\ 1, 0, 25, 11, 24, 23,\ 7, 20,\ 6.$$

III. $\quad m=675\lambda+25(0, 1, 2, 6, 7, 11, 15, 16, 20, 23, 24, 25)+5.$

4° $\alpha = 10$:

$$\beta - 10 \equiv 17, 18, 19, 20, 22, 26, 0, 1, 3, 8, 9, 10,$$
$$13(\beta - 10) \equiv 5, 18, 4, 17, 16, 14, 0, 13, 12, 23, 9, 22.$$

IV. $m = 675\lambda + 25(0, 4, 5, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 22, 23) + 10.$

5° $\alpha = 15$:

$$\beta - 15 \equiv 12, 13, 14, 15, 17, 21, 22, 23, 25, 3, 4, 5,$$
$$13(\beta - 15) \equiv 21, 7, 20, 6, 5, 3, 16, 2, 1, 12, 25, 11.$$

V. $m = 675\lambda + 25(1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 16, 20, 21, 25) + 15.$

6° $\alpha = 20$:

$$\beta - 20 \equiv 7, 8, 9, 10, 12, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 0,$$
$$13(\beta - 20) \equiv 10, 23, 9, 22, 21, 19, 5, 18, 17, 1, 14, 0.$$

VI. $m = 675\lambda + 25(0, 1, 5, 9, 10, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23) + 20.$

17. On peut exclure une grande partie des valeurs de m renfermées dans les formules précédentes par la considération de divers modules premiers, en cherchant, non plus les formes linéaires dans lesquelles peuvent être renfermées des solutions de notre problème, mais celles qui n'en renferment aucune. Nous prendrons, à cet effet, l'équation (1) sous la forme que nous lui avons donnée au n° **14**, et nous la réduirons suivant le module considéré, comme nous l'avons fait précédemment pour les modules 5 et 27.

En multipliant l'équation (1) par 2 et en la réduisant suivant le module 7, on en déduit

$$f(m) = m^3 - m^2 + 4m \equiv 1 - y^2 \pmod{7},$$

Or

$$f(\pm 1) = -1 \pm (1 + 4) \equiv 4, 1,$$
$$f(\pm 2) \equiv -4 \pm 2(1) \equiv 5, 1,$$
$$f(\pm 3) \equiv -2 \pm 3(-1) \equiv 2, 1.$$

D'ailleurs, y^2 ne peut avoir que l'une des valeurs 0, 1, 2, 4 (mod. 7);

$1-y^2$ ne peut avoir que l'une des valeurs 1, 0, 6, 4, ce qui exclut les valeurs 5 et 2. On doit donc rejeter les valeurs de m pour lesquelles $f(m)$ se réduit à l'un des nombres 2 ou 5 suivant le module 7, c'est-à-dire toutes les valeurs comprises dans les formules

$$7x+(2, 3).$$

18. Suivant le module 11, l'équation (1) multipliée par 3 donne la congruence

$$f(m)=m^3+6m^2\equiv 2(1-y^2).$$

Or on a

$$y^2\equiv 0, 1, 3, 4, 5, 9, \quad 2(1-y^2)\equiv 0, 2, 5, 6, 3, 7 \pmod{11}.$$

On doit donc rejeter les valeurs de m, pour lesquelles le résidu de $f(m)$, suivant le module 11, est l'un des nombres 1, 4, 8, 9 et 10. Or

$$\begin{aligned}
f(\pm 1) &= 6\pm 1\equiv 7,\ 5,\\
f(\pm 2) &\equiv 2\pm 8\equiv 10,\ 5,\\
f(\pm 3) &\equiv 10\pm 5\equiv 4,\ 5,\\
f(\pm 4) &\equiv -3\pm 9\equiv 6,\ 10,\\
f(\pm 5) &\equiv 7\pm 4\equiv 0,\ 3.
\end{aligned}$$

On doit donc exclure les valeurs de m renfermées dans les formules

$$11x+(2, 3, 7).$$

19. On déduit de même de l'équation (1), multipliée par 3 et réduite suivant le module 13, que le nombre m doit vérifier la congruence

$$f(m)=6m^2+m(m^2-2)\equiv 4(y^2-1) \pmod{13}.$$

Les résidus quadratiques de 13 étant 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12, les valeurs possibles de $4y^2-4$ sont

$$9,\ 10,\ 12,\ 0,\ 5,\ 6,\ 8 \pmod{13}.$$

On doit donc rejeter les valeurs de m pour lesquelles $f(m)$ se réduit à l'un des résidus 1, 2, 3, 4, 7, 11. Or,

$$\begin{aligned} f(\pm 1) &= 6 \pm (-1) \equiv 5,\ 7, \\ f(\pm 2) &\equiv -2 \pm 2.2 \equiv 2,\ 7, \\ f(\pm 3) &\equiv 2 \pm 3(7) \equiv 10,\ 7, \\ f(\pm 4) &\equiv 5 \pm 4.1 \equiv 9,\ 1, \\ f(\pm 5) &\equiv -6 \pm 5(-3) \equiv 5,\ 9, \\ f(\pm 6) &\equiv 8 \pm 6(-5) \equiv 4,\ 12. \end{aligned}$$

Les valeurs exclues sont -1, ± 2, -3, -4, 6, auxquelles correspondent respectivement les résidus 7, 2, 7, 7, 1 et 4. Ainsi aucune valeur de m propre à vérifier l'équation (1) n'est renfermée dans la formule

$$13x + (2, 6, 9, 10, 11, 12).$$

20. L'équation (1), multipliée par 4 et réduite suivant le module 17, donne la congruence

$$f(m) = 6m^2 + m(m^2 - 6) \equiv 5(y^2 - 1) \pmod{17}.$$

Comme 5 est non-résidu quadratique de 17, les valeurs de $5y^2$ sont 0 et les non-résidus quadratiques de 17, savoir : 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12 et 14. On a, par conséquent,

$$5y^2 - 5 \equiv 12,\ 15,\ 0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,$$

de sorte que l'on doit exclure les valeurs de m pour lesquelles le résidu minimum de $f(m)$ (mod. 17) est égal à l'un des nombres 3, 4, 8, 10, 11, 13, 14, 16. Or on trouve

$$\begin{aligned} f(-1) &\equiv 6 + 5 \equiv 11, \\ f(-2) &\equiv 7 - 2(-2) \equiv 11, \\ f(-3) &\equiv 3 - 3(3) \equiv 11, \\ f(-5) &\equiv 4, \\ f(-7) &\equiv 10. \end{aligned}$$

On doit donc rejeter toutes les valeurs de m renfermées dans les formules

$$m = 17x + (10, 12, 14, 15, 16).$$

21. Nous prendrons encore le module 23, qui nous donnera un grand nombre de formules d'exclusion. L'équation (1), réduite suivant ce module, donne la congruence

$$f(m) = 4m^3 + m^2 - 2m \equiv 3y^2 - 3 \pmod{23}.$$

Comme 3 est résidu quadratique de 23, $3y^2$ se réduit à l'un des nombres 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18 et $3y^2 - 3$ à l'un des nombres 20, 21, 22, 0, 1, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 15. On doit donc rejeter les valeurs de m qui donnent à $f(m)$ des valeurs équivalentes aux nombres 2, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 19 suivant le module 23. Or on trouve

$$\begin{aligned}
f(\pm 1) &\equiv 1 \pm 2 \equiv 3, 22,\\
f(\pm 2) &\equiv 4 \pm 5 \equiv 9, 22\\
f(\pm 3) &\equiv 9 \pm 10 \equiv 19, 22,\\
f(\pm 4) &\equiv 16 \mp 5 \equiv 11, 21,\\
f(\pm 5) &\equiv 2 \pm 7 \equiv 9, 18,\\
f(\pm 6) &\equiv 13 \pm 1 \equiv 14, 12,\\
f(\pm 7) &\equiv 3 \mp 1 \equiv 2, 4,\\
f(\pm 8) &\equiv -5 \pm 8 \equiv 3, 10,\\
f(\pm 9) &\equiv 12 \pm 0 \equiv 12, 12,\\
f(\pm 10) &\equiv 8 \mp 1 \equiv 9, 7,\\
f(\pm 11) &\equiv 6 \pm 12 \equiv 18, 17.
\end{aligned}$$

On doit donc rejeter les valeurs de m comprises dans la formule

$$23x + (3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18).$$

En réunissant ce résultat à ceux des numéros précédents, nous obtenons ce théorème :

Aucune valeur de m propre à vérifier l'équation (1) *n'est renfermée dans* *l'une des formes linéaires*

$$\begin{aligned}&7x+(2, 3),\\&11x+(2, 3, 7),\\&13x+(2, 6, 9, 10, 11, 12),\\&17x+(10, 12, 14, 15, 16),\\&23x+(3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18).\end{aligned}$$

22. Au moyen de ces formules et d'autres semblables que l'on obtiendrait de la même manière relativement à d'autres modules premiers, on peut exclure le plus grand nombre des termes renfermés dans les six formules du n° **16** et trouver ainsi rapidement toutes les solutions de l'équation (1) en nombres inférieurs à une limite assignée. Afin de ne pas trop allonger ce Mémoire, nous nous contenterons de chercher celles de ces solutions qui sont inférieures à 675 et qui correspondent à la valeur $\lambda = 0$ dans les formules citées.

La formule I se réduit à $25k$, le nombre k ayant les onze valeurs 4, 5, 8, 9, 11, 12, 13, 17, 18, 22, 26. On doit rejeter les termes qui vérifient l'une des congruences $4k \equiv 2, 3 \pmod{7}$, $k \equiv 4, 6 \pmod{7}$. Sont exclues de ce chef les valeurs $k = 4, 11, 13, 18$. Il faut y joindre celles qui satisfont à l'une des congruences

$$3k \equiv 2, 3, 7 \pmod{11}, \quad k \equiv 8, 1, 6 \pmod{11};$$

telles sont les valeurs $k = 8$, 12 et 17.

Après ces exclusions, il ne reste que trois valeurs de m, savoir

$$25 \times 5,\ 25 \times 9,\ 25 \times 26,\ 25 \times 22,$$

dont la première est exclue par le théorème du n° 6, puisqu'elle est égale à une puissance d'un nombre premier sans se réduire à 5; les deux suivantes sont inadmissibles, parce qu'elles vérifient les congruences

$$25 \times 9 \equiv 18, \quad 25 \times 26 \equiv 6 \pmod{23};$$

enfin on reconnait, par le calcul direct, que la dernière valeur, $m = 550$, donne pour n une valeur irrationnelle.

Ainsi la formule I ne renferme, au-dessous de la limite 675, aucune valeur de m propre à vérifier l'équation (1).

23. La formule II, lorsqu'on y fait $\lambda = 0$, renferme douze termes, dont le premier, 1, est une solution de notre problème. Les autres sont

$$25k + 1, \quad k = 4, 5, 9, 13, 14, 18, 21, 22, 23, 25, 26.$$

Nous devons supprimer les termes qui vérifient l'une des congruences

$$4k + 1 \equiv 2, 3 \pmod{7}, \quad k \equiv 2, 4 \pmod{7};$$

tels sont les termes 4, 9, 18, 23 et 25. Ajoutons-y les termes $k = 13$, $k = 26$, car on a

$$25 \times 13 + 1 \equiv 7, \quad 25 \times 26 + 1 \equiv 2 \pmod{11}.$$

La considération du module 13 en exclut deux autres, 5 et 21, car on a

$$25 \times 5 + 1 \equiv 9, \quad 25 \times 21 + 1 \equiv 6 \pmod{13}.$$

Il ne reste ainsi que les deux termes $25 \times 14 + 1$, $25 \times 22 + 1$. Or le premier divisé par 23 donne pour reste 6; on doit le rejeter. Quant au dernier, $m = 25 \times 22 + 1 = 551$, si on le substitue dans l'équation

$$(1) \qquad m^3 + 6m^2 + 11m = 3(n + 1)(n + 2),$$

il donne l'équation

$$n^2 + 3n + 2 = 551.6.17051,$$

dont les racines ne sont pas rationnelles. On en déduit, en effet,

$$2n = \pm\sqrt{1 + 24.551.17051} - 3;$$

or le nombre soumis au signe $\sqrt{}$ se réduit à 15 suivant le module 100; il ne peut être un carré, et, par conséquent, le nombre n est irrationnel.

La solution $m = 1$ est donc la seule qui soit renfermée dans la formule II, au-dessous de 675.

24. La formule III renferme une solution que nous connaissons déjà, $m = 5$. Celles qui nous restent à examiner sont

$$25k + 5, \quad k = 1, 2, 6, 7, 11, 15, 16, 20, 23, 24, 25.$$

Supprimons d'abord les termes qui vérifient l'une des congruences

$$\begin{aligned} 2k + 5 &\equiv 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 16,\ 17,\ 18 \pmod{23}, \\ k &\equiv 22,\ 11,\ 12,\ 1,\ 2,\ 3,\ 15,\ 4,\ 16,\ 17,\ 6,\ 18; \end{aligned}$$

tels sont 1, 2, 6, 11, 15, 16, 24 et 25. Il ne reste que trois termes $k = 7, 20, 23$, dont les deux premiers sont exclus par la considération du module 13, car on a

$$25 \times 7 + 5 \equiv 25 \times 20 + 5 \equiv 11 \pmod{13}.$$

Le troisième, 23, est également inadmissible, car en substituant dans l'équation (1) la valeur correspondante de m, $25 \times 23 + 5 = 20.29$, on obtient

$$\begin{aligned} n^2 + 3n + 2 &= 580 \times 113297, \\ 2n &= \sqrt{1 + 4.580.113297} - 3, \end{aligned}$$

et l'on constate aisément que la valeur de n n'est pas rationnelle.

La solution $m = 5$ est donc la seule que la formule III puisse nous donner au-dessous de la limite 675.

25. Les termes de la formule IV inférieurs à 675 sont

$$25k + 10, \quad k = 0, 4, 5, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 22, 23.$$

Il faut en exclure ceux qui vérifient l'une des congruences

$$4k + 3 \equiv 2, 3 \pmod{7}, \quad k \equiv 5, 0 \pmod{7};$$

tels sont $k=0, 5, 12, 14$. On doit rejeter encore les termes qui satisfont à l'une des congruences

$$3k-1 \equiv 2, 3, 7 \pmod{11}, \quad k \equiv 1, 5, 10 \pmod{11},$$

savoir 16 et 23. Les trois termes 4, 13, 17 sont exclus par la considération du module 13, car on a

$$25\times 4+10 \equiv 25\times 17+10 \equiv 6, \quad 25\times 13+10 \equiv 10 \pmod{13}.$$

Enfin le module 17 nous oblige à supprimer deux autres termes, $k=9$, $k=22$, car on a

$$25\times 9+10 \equiv 14, \quad 25\times 22+10 \equiv 16 \pmod{17}.$$

Il ne reste ainsi qu'un seul terme, $m=25\times 18+10=460$. En le substituant dans l'équation (1), on obtient

$$n^2+3n+2=460.3.23819,$$
$$2n=\sqrt{1+12.460.23819}-3,$$

et l'on constate aisément que la valeur de n est irrationnelle. Donc la formule IV ne renferme aucune solution inférieure à 675.

26. Il en est de même de la formule V, dont les termes inférieurs à 675 sont

$$25k+15, \quad k=1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 16, 20, 21, 25.$$

Supprimons d'abord ceux qui vérifient l'une des congruences

$$\begin{aligned} 2k-8 &\equiv 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18 \pmod{23}, \\ k &\equiv 17, 6, 7, 19, 20, 21, 10, 22, 11, 12, 1, 13, \end{aligned}$$

savoir les sept termes $k=1, 6, 7, 11, 12, 20$ et 21. Ajoutons-y les trois termes 2, 16, 25, qui vérifient les congruences

$$25 \times 2 + 15 \equiv 25 \times 16 + 15 \equiv 2, \quad 25 \times 25 + 15 \equiv 3 \pmod{7}.$$

Il ne reste que deux valeurs de m, $25.3 + 15$, $25.5 + 15$; mais elles sont inadmissibles, car, en les divisant par 13, on obtient les restes 12 et 10 respectivement.

27. La formule VI présente une solution connue, $m = 20$. Les autres termes, au-dessous de 675, sont

$$25k + 20, \quad k = 1, 5, 9, 10, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23.$$

Nous devons en exclure les termes qui vérifient quelqu'une des congruences

$$\begin{aligned} -k &\equiv 6 + 2, 6, \;\; 9, 10, 11, 12 \pmod{13}, \\ k &\equiv 5, 1, 11, 10, \;\; 9, \;\; 8; \end{aligned}$$

tels sont les neuf termes 1, 5, 9, 10, 14, 18, 21, 22, 23. Le terme $k = 17$ est exclu par la considération du module 19, car on a

$$25.17 + 20 \equiv 8 \pmod{19};$$

or, si l'on substitue $m \equiv 8 \pmod{19}$ dans l'équation (1), on obtient

$$\begin{gathered} 3(n+1)(n+2) \equiv 15 \pmod{19}, \\ 4(n+1)(n+2) + 1 = (2n+3)^2 \equiv 2, \end{gathered}$$

ce qui est impossible, puisque 2 est non-résidu quadratique de 19.

Il ne reste ainsi qu'un seul terme, $k = 19$; mais il est également inadmissible, parce que, si l'on divise par 23 la valeur correspondante de m, savoir $25 \times 19 + 20$, on trouve le reste 12. Donc, parmi les solutions que peut renfermer la formule VI, la solution $m = 20$ est la seule qui soit inférieure à 675.

Nous pouvons réunir les résultats obtenus dans la conclusion suivante :

Si, outre les surfaces du premier, du cinquième et du vingtième degré, il en existe d'autres que l'on puisse rendre osculatrices en des points arbitraires d'une surface donnée, leur degré est supérieur à 675 *et l'ordre de leur contact est supérieur à* 13000.